

倒数粗糙熵图像阈值化分割算法

范九伦 雷博*

(西安邮电大学通信与信息工程学院 西安 710121)

(电子信息现场勘验应用技术公安部重点实验室 西安 710121)

摘要: 基于粗糙集理论的粗糙熵阈值法不需要图像之外的先验信息。粗糙熵阈值法需要解决两个问题, 一是图像信息不完整性的度量, 二是图像的粒化。该文基于倒数信息熵, 提出一种倒数粗糙熵用来度量图像中信息的不完整性。为了更好地对图像进行粒化, 采用一种基于均匀性直方图的粒子选取方式。该文提出的倒数粗糙熵表述简洁, 计算简单。实验验证了该文方法的有效性。

关键词: 图像处理; 阈值分割; 粗糙熵; 倒数粗糙熵; 粒化

中图分类号: TP391.4

文献标识码: A

文章编号: 1009-5896(2020)01-0214-08

DOI: 10.11999/JEIT190559

Image Thresholding Segmentation Method Based on Reciprocal Rough Entropy

FAN Jiulun LEI Bo

(School of Communication and Information Engineering, Xi'an University of

Posts & Telecommunications, Xi'an 710121, China)

(Key Laboratory of Electronic Information Application Technology for Scene Investigation,

Public Security Ministry, Xi'an 710121, China)

Abstract: Image thresholding methods based on the rough entropy segment the images without prior information except the images. There are two problems to be considered in the rough entropy based thresholding methods, i.e., measuring the incompleteness of knowledge about an image and granulating the image. In this paper, reciprocal rough entropy, a new form of rough entropy, is defined to measure the incompleteness of the image information. In order to granulate the image effectively, a granule size selection method based on the homogeneity histogram is employed. The proposed reciprocal rough entropy is simple in expression and calculation. The experimental results verify the effectiveness of the proposed algorithm.

Key words: Image processing; Thresholding segmentation; Rough entropy; Reciprocal rough entropy; Granulation

1 引言

图像分割是把图像分成各具特性的不同区域并提取出感兴趣目标的方法和过程^[1]。图像分割是图像分析、理解和计算机视觉中的难点。在众多的图像分割法中, 阈值化分割由于其原理简单、易于实现而被广泛使用。图像阈值化分割技术基于图像的直方图, 建立对应的阈值选取准则, 寻找最佳的分

割阈值。阈值化分割技术已被用于医学图像处理^[1,2]、红外目标检测^[3]、工业无损检测^[4]和遥感图像^[5]等领域。基于图像信息利用的不同, 阈值化技术大致可分为: 基于图像统计信息的阈值法^[1]、基于图像模糊信息的阈值法^[1]、基于图像粗糙信息的阈值法^[6]。

粗糙集是波兰学者Pawlak^[7]在1982年提出的。粗糙集理论是一种新的研究不确定、不完整知识和数据的表达、学习、归纳的方式^[8]。由于粗糙集理论在分析求解问题时不需要数据集以外的任何先验信息, 只是利用现有的集合数据进行分析, 因此, 粗糙集理论被广泛用于各个领域。在图像分割中, 岳晓冬等人^[9]通过构造图像色彩分布的上下近似以及量化粗糙性表示, 设计了基于量化粗糙信息的分割方法; 印度学者Pal等人^[6]基于粗糙熵, 首次提出了一种图像阈值分割法。Pal等人给出了图像的粗

收稿日期: 2019-07-25; 改回日期: 2019-10-25; 网络出版: 2019-11-13

*通信作者: 雷博 leileibo@xupt.edu.cn

基金项目: 国家自然科学基金(61671377, 61571361, 61601362), 西安邮电大学西邮新星团队项目(xyt2016-01)

Foundation Items: The National Natural Science Foundation of China(61671377, 61571361, 61601362), The Project of New Star Team of Xi'an University of Posts & Telecommunications (xyt2016-01)

粗糙集模型, 定义了一种图像粗糙熵表达式。该表达式采用对数运算, 最佳分割阈值选取在粗糙熵取最大值对应的灰度值处。基于文献[6]的工作, 我国研究者讨论了粗糙粒度及窗宽之间的相互关系以及基于变精度粗糙熵的阈值选取^[10-12], 印度研究者Sardar等人^[13]将其应用于虹膜图像分割。有关粗糙集在医学图像上的应用综述可参考文献[14]。鉴于文献[6]中给出的粗糙熵仅是形式上采用香农信息熵, 熵取最大时, 获得图像的最佳分割阈值意义并不明确。Sen等人^[15,16]重新定义了对数型粗糙熵, 并给出了相应的指数型粗糙熵, 最佳分割阈值选取在粗糙熵取最小值的灰度值处。这两种新的粗糙熵表达式具有较好的性质。文献[17]将粗糙熵阈值法推广到多阈值情形, 提出了对应的多阈值粗糙熵分割算法。我国研究者讨论了相应的基于变精度粗糙熵的阈值选取^[18,19]。

在信息论中, 基于对数运算的香农熵是最常用的熵表述。印度学者Pal等人^[20]在分析对数运算的优缺点后, 提出了熵的指数运算下的表述: 指数熵。与对数运算和指数运算相对应, 我国学者吴一全等人^[21,22]基于分数运算, 提出了倒数熵并将其用于图像分割。由于倒数灰度熵不仅考虑了直方图中的概率信息, 而且反映了图像中目标与背景的类内像素灰度级差异, 因此倒数信息熵阈值化算法对于红外小目标图像有很好的分割效果^[22]。基于已有对数型粗糙熵和指数型粗糙熵定义, 本文给出倒数型粗糙熵公式和相应的图像阈值化方法。倒数型粗糙熵意义明确, 表述简洁。实验表明, 本文提出的倒数粗糙熵阈值分割法是一种有效的图像分割技术, 进一步丰富了基于粗糙熵的阈值化方法。

2 粗糙熵阈值法

2005年, Pal等人^[6]首次将粗糙集引入图像的阈值化分割, 提出了对应的最大粗糙熵阈值法。设论域 U 表示一幅数字图像。如果将 U 划分为一些不重叠的大小为 $m \times n$ 的区域, 每一个区域称为一个粒子, 用 G 表示。粒子确定后, 图像中的目标和背景就可以用粗糙集来近似表示。考虑单目标提取情况, 设图像 U 的大小为 $M \times N$, 灰度级为 L 。利用阈值 T 将图像的灰度值分为目标区域和背景区域。目标的上下近似分别为 $\bar{O}_T = \left\{ \bigcup_i G_i, \exists j, j = 1, 2, \dots, mn, \text{s.t. } P_j > T, P_j \in G_i \right\}$ 和 $\underline{O}_T = \left\{ \bigcup_i G_i | P_j > T, \forall j = 1, 2, \dots, mn, P_j \in G_i \right\}$ 。背景的上下近似分别为 $\bar{B}_T = \left\{ \bigcup_i G_i, \exists j, j = 1, 2, \dots, mn, \text{s.t. } P_j \leq T, P_j \in G_i \right\}$ 和 $\underline{B}_T = \left\{ \bigcup_i G_i | P_j \leq T, \forall j = 1, 2, \dots, mn \right\}$ 。

$P_j \in G_i \}$ 。目标和背景的粗糙度分别为 $R_{O_T} = 1 - |\underline{O}_T|/|\bar{O}_T| = |\bar{O}_T| - |\underline{O}_T|/|\bar{O}_T|$ 和 $R_{B_T} = 1 - \frac{|\underline{B}_T|}{|\bar{B}_T|} = \frac{|\bar{B}_T| - |\underline{B}_T|}{|\bar{B}_T|}$, 其中, $|\cdot|$ 表示集合的基数。

文献[6]给出图像粗糙熵的定义为

$$RE_T = -\frac{e}{2} [R_{O_T} \ln(R_{O_T}) + R_{B_T} \ln(R_{B_T})] \quad (1)$$

由式(1)可知, 当 $R_{O_T} = R_{B_T} = 1/e$ 时, RE_T 取得最大值。文献[6]给出的最佳分割阈值 T^* 选取为

$$T^* = \arg \max_T RE_T \quad (2)$$

式(1)定义的粗糙熵 RE_T 本身不满足信息熵的定义要求即 $R_{O_T} + R_{B_T} = 1$, 因此取其最大值作为阈值选取准则只能看成是“比照”概率阈值法。对于图像阈值分割而言, 好的阈值点应使得目标和背景的上下近似尽可能地接近。即 $|\underline{O}_T|$ 尽可能接近 $|\bar{O}_T|$ 且 $|\underline{B}_T|$ 尽可能接近 $|\bar{B}_T|$ 。也就是说最佳的阈值应该选取在 R_{O_T} 和 R_{B_T} 同时靠近0处。由式(1)可知, 文献[6]提出的最大粗糙熵阈值法得到的阈值不满足此要求。因此, Sen等人在文献[15,16]中重新构造了指数型粗糙熵和对数型粗糙熵。

3 倒数粗糙熵

3.1 倒数粗糙熵定义及性质

在信息论中, 除了对数熵 $H = -\sum_{i=1}^n p_i \lg p_i$ 和指数熵 $H = \sum_{i=1}^n p_i e^{1-p_i}$ 外, 吴一全等人^[21,22]还给出了倒数熵: $H''(P) = \sum_{i=1}^n \frac{p_i}{1+p_i}$ 。吴一全等人指出, 由于倒数灰度熵不仅考虑了直方图中的概率信息, 而且反映了图像中目标与背景的类内像素灰度级差异, 因此倒数信息熵阈值化算法对于红外小目标图像有很好的分割效果^[22]。基于此, 本文定义倒数粗糙熵 FE_T 为

$$FE_T = \frac{1}{2} \left[\frac{R_{O_T}}{1+R_{O_T}} + \frac{R_{B_T}}{1+R_{B_T}} \right] \quad (3)$$

由式(3)可知, FE_T 满足以下性质:

(1)非负性: $FE_T \geq 0$; 当且仅当 $R_{O_T} = R_{B_T} = 0$ 时, 等号成立。

(2)连续性: FE_T 是 R_{O_T} 和 R_{B_T} 的连续函数, 其中 $R_{O_T}, R_{B_T} \in [0, 1]$ 。

(3)分明性: 若 $R_{O_T}^*$ 和 $R_{B_T}^*$ 是 R_{O_T} 和 R_{B_T} 的分明修改, 即 $R_{O_T}^* \leq R_{O_T}, R_{B_T}^* \leq R_{B_T}$ 则 $FE_T(R_{O_T}^*, R_{B_T}^*) \leq FE_T(R_{O_T}, R_{B_T})$ 。

(4)规范性: 当且仅当 $R_{O_T} = R_{B_T} = 1$ 时, FE_T 取得其最大值1/2。即 $FE_T(R_{O_T}, R_{B_T}) \leq FE_T(1, 1)$, 其中 $R_{O_T}, R_{B_T} \in [0, 1]$ 。

(5)对称性: $FE_T(R_{O_T}, R_{B_T})$ 关于 $R_{O_T}=R_{B_T}$ 对称。

(6)单调性: $FE_T(R_{O_T}, R_{B_T})$ 是 R_{O_T} 和 R_{B_T} 的单调非降函数。

(7)凸性: $FE_T(R_{O_T}, R_{B_T})$ 是 R_{O_T} 和 R_{B_T} 的凸函数。

(8)可解性。

3.2 倒数粗糙熵阈值化分割算法

由3.1节中倒数粗糙熵的性质可知, 倒数粗糙熵在图像中不确定性最大时取到最大值, 即当 $R_{O_T} = R_{B_T} = 1$ 时, FE_T 取得其最大值 $1/2$ 。对图像单阈值分割而言, 希望分割后目标和背景区域的不确定性最小, 即目标和背景的粗糙度 $R_{O_T} = R_{B_T} = 0$ 。基于这一性质, 可以利用倒数粗糙熵来选取图像的最佳分割阈值, 即最佳阈值应该位于倒数粗糙熵取最小值处。

$$\begin{aligned} T^* &= \arg \min_T FE_T \\ &= \arg \min_T \left\{ \left[\frac{R_{O_T}}{1+R_{O_T}} + \frac{R_{B_T}}{1+R_{B_T}} \right] / 2 \right\} \end{aligned} \quad (4)$$

由式(4)可知, 在最佳的阈值 T^* 处, $|O_T| = |\overline{O_T}|$ 且 $|B_T| = |\overline{B_T}|$ 。此时 T^* 位于目标与背景的边界处。倒数粗糙熵形式较对数粗糙熵和指数粗糙熵更为简单。

式(4)为单阈值倒数粗糙熵算法, 该算法可推广至多阈值情形。设阈值 $\{t_1, t_2, \dots, t_k\}$ 将图像的灰度范围分为 $k+1$ 个区间, $I(0) = (0, t_1)$, $I(1) = (t_1, t_2), \dots, I(k) = (t_k, L-1)$, 将图像中的像素分为 $k+1$ 个类 C_0, C_1, \dots, C_k , 设粒子的总个数为 tng 。 $C_j(j=0, 1, 2, \dots, k)$ 类的下近似定义为

$$\underline{C}_j = \left\{ \bigcup_i G_i \mid G_i \subseteq I(j), i = 1, 2, \dots, tng \right\} \quad (5)$$

$C_j(j=0, 1, 2, \dots, k)$ 类的上近似定义为

$$\overline{C}_j = \left\{ \bigcup_i G_i \mid G_i \cap I(j) \neq \emptyset, i = 1, 2, \dots, tng \right\} \quad (6)$$

C_j 类的粗糙度定义为

$$R_{C_j} = 1 - \frac{|\underline{C}_j|}{|\overline{C}_j|} = \frac{|\overline{C}_j| - |\underline{C}_j|}{|\overline{C}_j|}, j = 0, 1, 2, \dots, k \quad (7)$$

此时, 图像的倒数粗糙熵定义为

$$FE = \frac{1}{k+1} \sum_{j=0}^k \frac{R_{C_j}}{1+R_{C_j}} \quad (8)$$

最佳的分割阈值选取在倒数粗糙熵取最小处。

$$\begin{aligned} & [t_1^*, t_2^*, \dots, t_k^*] \\ &= \underset{0 < t_1 < t_2 < \dots < t_k < L-1}{\text{Arg min}} FE \\ &= \underset{0 < t_1 < t_2 < \dots < t_k < L-1}{\text{Arg min}} \left[\frac{1}{k+1} \sum_{j=0}^k \frac{R_{C_j}}{1+R_{C_j}} \right] \end{aligned} \quad (9)$$

式(9)即为多阈值倒数粗糙熵算法。

3.3 倒数粗糙熵阈值化算法的实现

基于粗糙熵的阈值化分割算法中, 首先需要对图像进行粒化。不同的粒化方式直接影响最终的图像分割结果, 目前已提出了一些粒化算法。在最大粗糙熵阈值化算法中^[6], 将图像分为大小相等的互不重叠的粒子, 粒子的大小选取为图像直方图最小峰宽度的 $1/2$ 。但是, 由于图像的直方图并不是光滑的曲线, 而且直方图中的峰不能准确代表图像中的区域。因此, 为了选择更为准确的粒子大小, 本文基于图像的均匀性直方图^[23]来选取粒子的大小。

均匀性直方图可以描述图像中的一致性区域, 每一个峰代表了图像中的一类均匀性区域, 如图1所示。图1(a)是“cameraman”图像的灰度直方图, 图1(b)是该图像的均匀性直方图。可以看出, 在均匀性直方图中两个峰区分非常明显, 而且小峰的宽度更为准确和清晰。均匀性直方图的统计方法可参考文献^[23]中定义。本文粗糙熵阈值化算法采用互不重叠的大小为 $gsize \times gsize$ 的粒子对图像进行粒化。粒子的宽度 $gsize$ 选取为均匀性直方图中最小峰的 $1/2$ 。

对图像进行粒化后, 即可计算图像的粗糙熵, 下面给出单阈值粗糙熵算法的步骤。设 ol , ou , bl 和

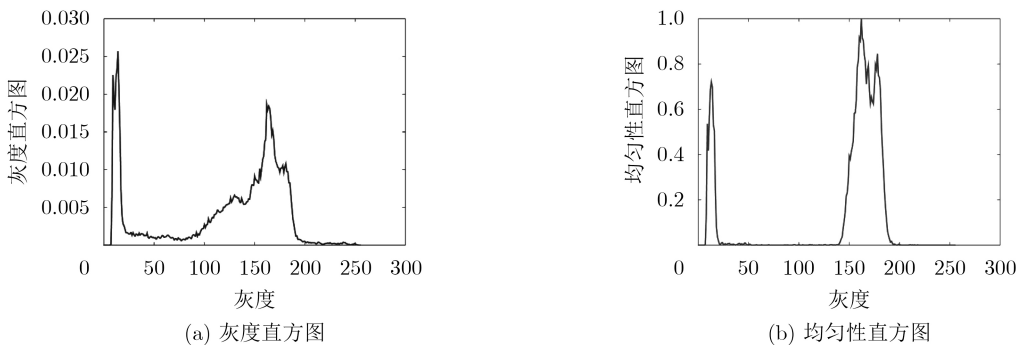


图1 cameraman 图像的直方图和均匀性直方图

\mathbf{bu} 分别表示目标上下近似矩阵和背景上下近似矩阵。最小倒数粗糙熵单阈值法的步骤如下:

步骤 1 统计图像的均匀性直方图, 选取均匀性直方图中最小峰的1/2作为粒子的宽度。确定了粒子的大小后, 可将图像分块粒化。

步骤 2 初始化阈值 t , 阈值 t 的初始值选为图像的最小灰度值。

步骤 3 根据阈值 t 计算目标和背景上下近似集合 \mathbf{ol} , \mathbf{ou} , \mathbf{bl} 和 \mathbf{bu} 的值, 根据式(3)计算阈值 t 对应的倒数粗糙熵的值。 $t = t + 1$ 。

步骤 4 重复第3步, 直至阈值 t 等于图像的最大灰度值。

步骤 5 根据式(4), 选取粗糙熵取最小值时的灰度值作为最佳的分割阈值。

步骤 6 根据最佳阈值 T^* 对图像中像素进行分类, 得到分割后图像。

$$U^*(i, j) = \begin{cases} 0, & U(i, j) < T^* \\ 255, & U(i, j) \geq T^* \end{cases} \quad (10)$$

$U(i, j)$ 为分割前图像中像素 (i, j) 处的灰度值, $U^*(i, j)$ 表示分割后图像中像素 (i, j) 处的灰度值。

由上面的算法步骤可以看出, 最小倒数粗糙熵阈值化分割算法包含两部分。第1部分是图像均匀性直方图的统计, 该部分算法复杂度为 $O(M \cdot N)$ 。第2部分是计算倒数粗糙熵, 寻找最佳的分割阈值。该部分的算法复杂度为 $O(L \cdot \text{tng})$ 。如果粒子之间互不重叠, 则 $\text{tng} = \lfloor (M \cdot N) / (\text{gsize} \cdot \text{gsize}) \rfloor$, $L \cdot \text{tng} = L \cdot \lfloor (M \cdot N) / (\text{gsize} \cdot \text{gsize}) \rfloor$,

$\approx \lfloor L / (\text{gsize} \cdot \text{gsize}) \rfloor \cdot (M \cdot N)$, 这里 L 是图像的最大灰度级数, gsize 是粒子的宽度, $M \cdot N$ 是图像的大小, $\lfloor \cdot \rfloor$ 表示取整运算。由于 $L / (\text{gsize} \cdot \text{gsize}) \ll M \cdot N$, 因此最小倒数粗糙熵阈值化算法的时间复杂度为 $O(M \cdot N)$, 与图像的大小成线性关系。

4 实验结果分析

为了验证本文算法的有效性, 在不同类型的图像上进行了测试。实验比较了本文提出的最小倒数粗糙熵阈值化分割算法与最大粗糙熵算法^[6]、罗均等人^[24]提出的改进的自适应差分演化算法的2维Otsu多阈值法(简记为“罗的方法”)、最大Masi熵法^[25]、最大模糊熵法^[26]和最大倒数熵法^[21,22]的分割结果。这里仅比较了各种算法的单阈值情形。限于篇幅, 这里列出了2幅NDT图像^[1]和2幅OTCBVS库^[27]中红外图像的分割结果, 如图3—图6所示。OTCBVS库中为不同环境下的红外视频序列, 在实验中测试了整个视频序列, 这里仅列出不同视频序列中的两幅图像。图2绘出了实验中4幅图像的均匀性直方图。由图2可知, 在粗糙熵阈值法中粒子大小 gsize 分别取为10, 2, 3和4。

为了定量比较几种方法分割效果的优劣, 实验中采用分割图像质量评价指标: 分类误差(Misclassification Error, ME)^[4]和结构相似性指标SSIM^[28]来评价算法的优劣。这两个指标的计算表达式为

$$\text{ME} = 1 - \frac{|B_O \cap B_T| + |F_O \cap F_T|}{|B_O| + |F_O|} \quad (11)$$

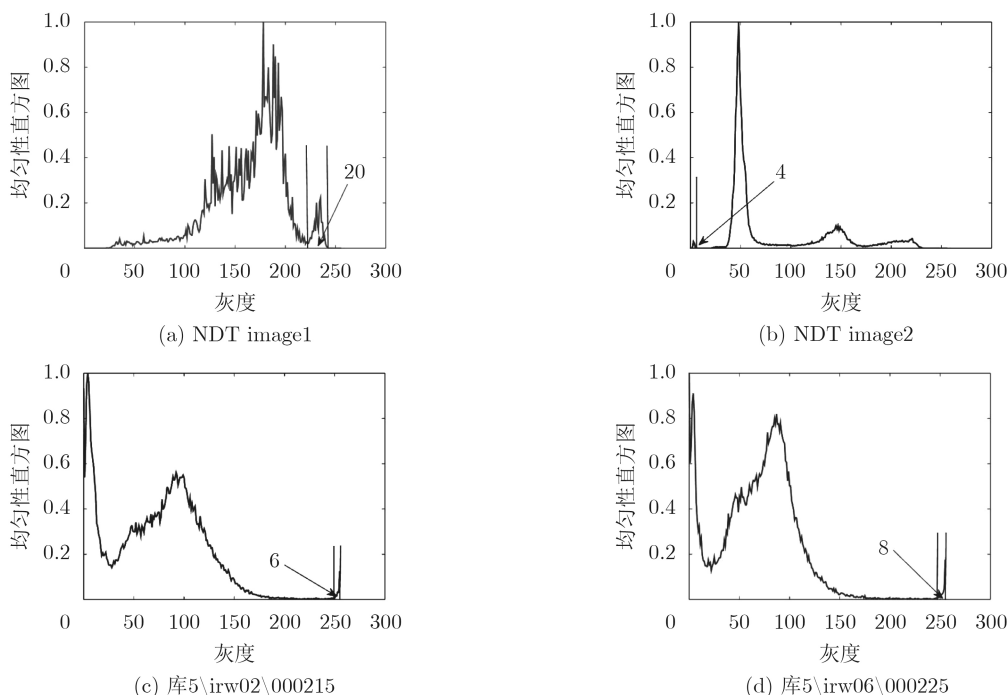


图 2 均匀性直方图及最小峰宽度

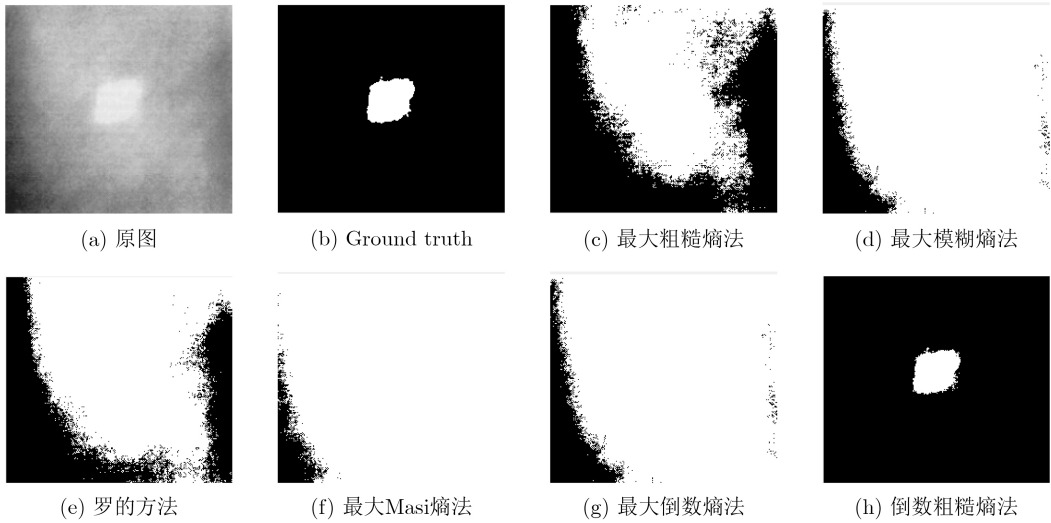


图3 NDT image1分割结果

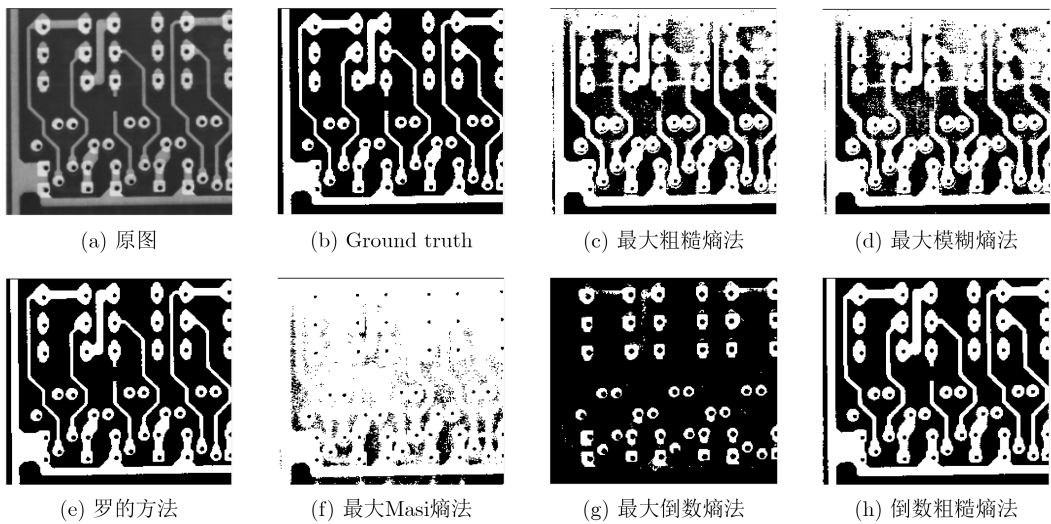


图4 NDT image2分割结果

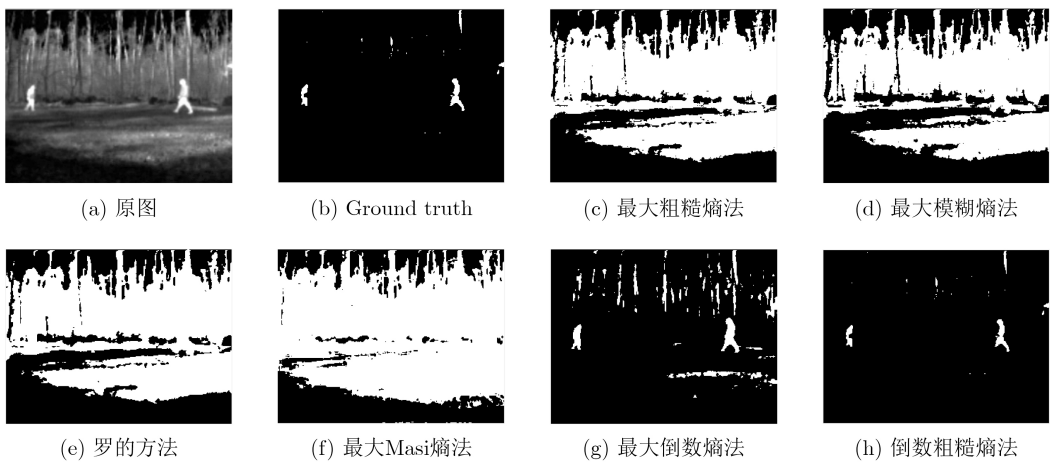


图5 OTCBVS\库5\irw02\000215分割结果

其中, B_O 和 F_O 分别表示原图像中的目标和背景区域(即,理想分割时对应的目标和背景区域), B_T 和 F_T 分别表示采用分割算法分割后图像中的目标和

背景区域。分类误差ME的取值范围为[0, 1]。ME取值越小,表明分割误差越小,分割后图像的效果越接近理想分割。

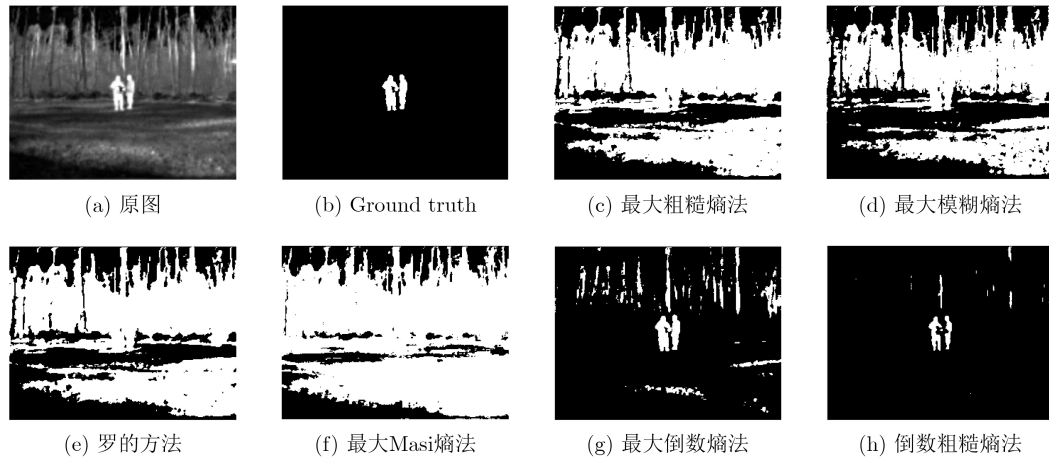


图6 OTCBVS\库5\irw06\000225分割结果

SSIM用来比较两幅图像的结构相似性，其计算公式为

$$SSIM(x, y) = \frac{(2\mu_x\mu_y + C_1)(2\sigma_{xy} + C_2)}{(\mu_x^2 + \mu_y^2 + C_1)(\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + C_2)} \quad (12)$$

其中， μ_x 和 μ_y 分别为图像 x 和 y 的灰度均值， σ_x 和 σ_y 分别为图像 x 和 y 的标准差， σ_{xy} 是图像 x 和 y 的相关系数。 C_1 和 C_2 为常数，以避免分母为0。这里 $C_1 = C_2 = 0.065$ 。SSIM的取值范围为 $[-1, 1]$ ，值越大分割效果越好。

图3和图4为6种算法对NDT图像的分割结果。由图3可以看出，此时本文的倒数粗糙熵阈值法分割结果最好。本文算法的分割结果接近理想分割图像，而其他5种算法均失效，不能有效检测NDT图像中的目标区域。对于图4所示图像，罗的方法和本文的倒数粗糙熵算法分割效果比较接近于理想分割图像。其他4种算法不能有效提取图像中的目标区域。

图5和图6列出了2幅OTCBVS库中红外图像的分割结果。图5和图6的两幅图像分别取自库5\irw02数据集和库5\irw06数据集。这两个数据集均显示了两个人进入场景到走出场景的整个过程，本文对数据集中的视频序列进行了测试，图5和图6仅展示了这两个视频序列中的一幅图像。图5展示了两个人进入场景的图像，图6展示了两个人接触的图像。红外图像对比度低，目标比较小。对于这2幅图像，此时最大粗糙熵算法、最大模糊熵算法、罗的方法和最大Masi熵算法失效。最大倒数熵算法对于红外小目标图像有较好的分割效果，因此可以检测出目标区域，但将过多背景错分为目标。本文的倒数粗糙熵算法效果最为理想。

表1列出了6种算法对实验中4幅图像的分割阈值比较。表2分别列出了6种算法对4幅图像分割结果的ME值和SSIM值比较。从表2可以看出，对于

表1 6种算法的阈值比较

	最大粗糙熵法	模糊熵法	罗的方法	Masi熵法	倒数熵法	倒数粗糙熵法
NDT image1	177	51	(151,151)	83	116	221
NDT image2	52	177	(106,115)	45	160	72
D5\irw02\000215	68	75	(66,70)	46	148	211
D5\irw06\000225	65	75	(66,67)	46	128	209

表2 6种算法的ME值与SSIM值比较

	NDT image1		NDT image2		D5\irw02\000215		D5\irw06\000225	
	ME	SSIM	ME	SSIM	ME	SSIM	ME	SSIM
最大粗糙熵法	0.3605	0.0283	0.1996	0.5880	0.5556	0.0011	0.5671	0.0021
模糊熵法	0.9507	0.0015	0.2250	0.2345	0.5082	0.0013	0.4722	0.0029
罗的方法	0.6341	0.0098	0.0077	0.9822	0.5596	0.0013	0.5679	0.0021
Masi熵法	0.9136	0.0033	0.5470	0.1658	0.6841	0.0007	0.7181	0.0013
倒数熵法	0.8486	0.0049	0.2041	0.3172	0.0366	0.1367	0.0461	0.1585
倒数粗糙熵法	0.0016	0.9765	0.0429	0.9015	0.0051	0.7286	0.0084	0.6833

图4所示的图像, 罗的方法ME值最小, SSIM最大, 分割效果最接近理想分割结果, 本文的算法次之。对于其他3幅图像本文倒数粗糙熵算法的ME值均是最小, SSIM值最大, 因此本文算法的分割效果最好。

5 结束语

粗糙熵阈值法是基于图像局部信息的方法, 信息利用的程度取决于粒子的大小, 因此合理的粒子大小可以有效提取图像中的弱小目标。本文在已有对数粗糙熵和指数粗糙熵的基础上, 定义了倒数粗糙熵, 进而提出了一种基于最小倒数粗糙熵的图像阈值分割算法。实验表明, 倒数粗糙熵阈值法不仅形式简单, 而且可以有效分割NDT图像和红外图像。鉴于研究者已经将变精度的粗糙熵用于图像分割, 本文的下一步工作是提出变精度的倒数粗糙熵并用于图像分割。

参考文献

- [1] SEZGIN M and SANKUR B. Survey over image thresholding techniques and quantitative performance evaluation[J]. *Journal of Electronic Imaging*, 2004, 13(1): 146–165. doi: [10.1117/1.1631315](https://doi.org/10.1117/1.1631315).
- [2] OLIVA D, HINOJOSA S, CUEVAS E, et al. Cross entropy based thresholding for magnetic resonance brain images using Crow Search Algorithm[J]. *Expert Systems with Applications*, 2017, 79: 164–180. doi: [10.1016/j.eswa.2017.02.042](https://doi.org/10.1016/j.eswa.2017.02.042).
- [3] 聂方彦, 李建奇, 张平凤, 等. 复杂图像的Kaniadakis熵阈值分割方法[J]. *激光与红外*, 2017, 47(8): 1040–1045. doi: [10.3969/j.issn.1001-5078.2017.08.022](https://doi.org/10.3969/j.issn.1001-5078.2017.08.022).
NIE Fangyan, LI Jianqi, ZHANG Pingfeng, et al. Threshold segmentation method of complex image based on Kaniadakis entropy[J]. *Laser & Infrared*, 2017, 47(8): 1040–1045. doi: [10.3969/j.issn.1001-5078.2017.08.022](https://doi.org/10.3969/j.issn.1001-5078.2017.08.022).
- [4] NG H F. Automatic thresholding for defect detection[J]. *Pattern Recognition Letters*, 2006, 27(14): 1644–1649. doi: [10.1016/j.patrec.2006.03.009](https://doi.org/10.1016/j.patrec.2006.03.009).
- [5] BHANDARI A K, KUMAR A, and SINGH G K. Tsallis entropy based multilevel thresholding for colored satellite image segmentation using evolutionary algorithms[J]. *Expert Systems with Applications*, 2015, 42(22): 8707–8730. doi: [10.1016/j.eswa.2015.07.025](https://doi.org/10.1016/j.eswa.2015.07.025).
- [6] PAL S K, SHANKAR B U, and MITRA P. Granular computing, rough entropy and object extraction[J]. *Pattern Recognition Letters*, 2005, 26(16): 2509–2517. doi: [10.1016/j.patrec.2005.05.007](https://doi.org/10.1016/j.patrec.2005.05.007).
- [7] PAWLAK Z. Rough sets[J]. *International Journal of Computer & Information Sciences*, 1982, 11(5): 341–356. doi: [10.1007/BF01001956](https://doi.org/10.1007/BF01001956).
- [8] PAWLAK Z. Rough Sets: Theoretical Aspects of Reasoning about Data[M]. Dordrecht: Springer, 1991: 2–8.
- [9] 岳晓冬, 苗夺谦, 钟才明. 基于粗糙性度量的彩色图像分割方法[J]. *自动化学报*, 2010, 36(6): 807–816.
YUE Xiaodong, MIAO Duoqian, and ZHONG Caiming. Roughness measure approach to color image segmentation[J]. *Acta Automatica Sinica*, 2010, 36(6): 807–816.
- [10] 吴涛. 图像阈值化的自适应粗糙熵方法[J]. *中国图象图形学报*, 2014, 19(1): 1–10. doi: [10.11834/jig.20140101](https://doi.org/10.11834/jig.20140101).
WU Tao. Adaptive rough entropy method for image thresholding[J]. *Journal of Image and Graphics*, 2014, 19(1): 1–10. doi: [10.11834/jig.20140101](https://doi.org/10.11834/jig.20140101).
- [11] 姚龙洋, 张清华, 胡帅鹏, 等. 基于近似集与粒子群的粗糙熵图像分割方法[J]. *计算机科学与探索*, 2016, 10(5): 699–708.
YAO Longyang, ZHANG Qinghua, HU ShuaiPeng, et al. Rough entropy for image segmentation based on approximation sets and particle swarm optimization[J]. *Journal of Frontiers of Computer Science and Technology*, 2016, 10(5): 699–708.
- [12] 刘丽华, 周涛, 周乾智. 基于VPRS粗糙熵的图像分割[J]. *计算机工程与应用*, 2018, 54(20): 178–183. doi: [10.3778/j.issn.1002-8331.1804-0090](https://doi.org/10.3778/j.issn.1002-8331.1804-0090).
LIU Lihua, ZHOU Tao, and ZHOU Qianzhi. Image segmentation on entropy of variable precision rough entropy[J]. *Computer Engineering and Applications*, 2018, 54(20): 178–183. doi: [10.3778/j.issn.1002-8331.1804-0090](https://doi.org/10.3778/j.issn.1002-8331.1804-0090).
- [13] SARDAR M, MITRA S, and SHANKAR B U. Iris localization using rough entropy and CSA: A soft computing approach[J]. *Applied Soft Computing*, 2018, 67: 61–69. doi: [10.1016/j.asoc.2018.02.047](https://doi.org/10.1016/j.asoc.2018.02.047).
- [14] HASSANIEN A E, ABRAHAM A, PETERS J F, et al. Rough sets and near sets in medical imaging: A review[J]. *IEEE Transactions on Information Technology in Biomedicine*, 2009, 13(6): 955–968. doi: [10.1109/TITB.2009.2017017](https://doi.org/10.1109/TITB.2009.2017017).
- [15] SEN D and PAL S K. Generalized rough sets, entropy, and image ambiguity measures[J]. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics, Part B (Cybernetics)*, 2009, 39(1): 117–128. doi: [10.1109/TSMCB.2008.2005527](https://doi.org/10.1109/TSMCB.2008.2005527).
- [16] SEN D and PAL S K. Histogram thresholding using beam theory and ambiguity measures[J]. *Fundamenta Informaticae*, 2007, 75(1/4): 483–504.
- [17] MAŁYSZKO D and STEPANIUK J. Adaptive multilevel rough entropy evolutionary thresholding[J]. *Information Sciences*, 2010, 180(7): 1138–1158. doi: [10.1016/j.ins.2009.11.034](https://doi.org/10.1016/j.ins.2009.11.034).
- [18] 邓廷权, 盛春冬. 结合变精度粗糙熵和遗传算法的图像阈值分

- 割方法[J]. 控制与决策, 2011, 26(7): 1079–1082.
- DENG Tingquan and SHENG Chundong. Image threshold segmentation based on entropy of variable precision rough sets and genetic algorithm[J]. *Control and Decision*, 2011, 26(7): 1079–1082.
- [19] 吴尚智, 余志用, 张霞, 等. 利用变精度粗糙熵的图像分割算法[J]. 计算机工程与科学, 2018, 40(10): 1837–1843. doi: [10.3969/j.issn.1007-130X.2018.10.016](https://doi.org/10.3969/j.issn.1007-130X.2018.10.016).
- WU Shangzhi, SHE Zhiyong, HANG Xia, *et al.* An image segmentation algorithm using variable precision rough entropy[J]. *Computer Engineering & Science*, 2018, 40(10): 1837–1843. doi: [10.3969/j.issn.1007-130X.2018.10.016](https://doi.org/10.3969/j.issn.1007-130X.2018.10.016).
- [20] PAL N R and PAL S K. Entropic thresholding[J]. *Signal Processing*, 1989, 16(2): 97–108. doi: [10.1016/0165-1684\(89\)90090-X](https://doi.org/10.1016/0165-1684(89)90090-X).
- [21] 吴一全, 占必超. 基于混沌粒子群优化的倒数熵阈值选取方法[J]. 信号处理, 2010, 26(7): 1044–1049. doi: [10.3969/j.issn.1003-0530.2010.07.015](https://doi.org/10.3969/j.issn.1003-0530.2010.07.015).
- WU Yiquan and ZHAN Bichao. Thresholding based on reciprocal entropy and chaotic particle swarm optimization[J]. *Signal Processing*, 2010, 26(7): 1044–1049. doi: [10.3969/j.issn.1003-0530.2010.07.015](https://doi.org/10.3969/j.issn.1003-0530.2010.07.015).
- [22] 吴一全, 殷骏, 毕硕本. 最大倒数熵/倒数灰度熵多阈值选取[J]. 信号处理, 2013, 29(2): 143–151. doi: [10.3969/j.issn.1003-0530.2013.02.001](https://doi.org/10.3969/j.issn.1003-0530.2013.02.001).
- WU Yiquan, YIN Jun, and BI Shuoben. Multi-threshold selection using maximum reciprocal entropy/reciprocal gray entropy[J]. *Journal of Signal Processing*, 2013, 29(2): 143–151. doi: [10.3969/j.issn.1003-0530.2013.02.001](https://doi.org/10.3969/j.issn.1003-0530.2013.02.001).
- [23] CHENG Hengda and SUN Ying. A hierarchical approach to color image segmentation using homogeneity[J]. *IEEE Transactions on Image Processing*, 2000, 9(12): 2071–2082. doi: [10.1109/83.887975](https://doi.org/10.1109/83.887975).
- [24] 罗钧, 杨永松, 侍宝玉. 基于改进的自适应差分演化算法的二维Otsu多阈值图像分割[J]. 电子与信息学报, 2019, 41(8): 2017–2024. doi: [10.11999/JEIT180949](https://doi.org/10.11999/JEIT180949).
- LUO Jun, YANG Yongsong, and SHI Baoyu. Multi-threshold image segmentation of 2D Otsu based on improved adaptive differential evolution algorithm[J]. *Journal of Electronics & Information Technology*, 2019, 41(8): 2017–2024. doi: [10.11999/JEIT180949](https://doi.org/10.11999/JEIT180949).
- [25] SHUBHAM S and BHANDARI A K. A generalized Masi entropy based efficient multilevel thresholding method for color image segmentation[J]. *Multimedia Tools and Applications*, 2019, 78(12): 17197–17238. doi: [10.1007/s11042-018-7034-x](https://doi.org/10.1007/s11042-018-7034-x).
- [26] LI Xueqin, ZHAO Zhiwei, and CHENG H S. Fuzzy entropy threshold approach to breast cancer detection[J]. *Information Sciences - Applications*, 1995, 4(1): 49–56. doi: [10.1016/1069-0115\(94\)00019-x](https://doi.org/10.1016/1069-0115(94)00019-x).
- [27] <http://vcipl-okstate.org/pbvs/bench/>, 2013.
- [28] WANG Zhou, BOVIK A C, SHEIKH H R, *et al.* Image quality assessment: From error visibility to structural similarity[J]. *IEEE Transactions on Image Processing*, 2004, 13(4): 600–612. doi: [10.1109/TIP.2003.819861](https://doi.org/10.1109/TIP.2003.819861).
- 范九伦: 男, 1964年生, 教授, 研究方向为模糊集理论、模糊信息处理、模式识别与图像处理、信息安全。
- 雷 博: 女, 1981年生, 副教授, 研究方向为模糊信息处理、粗糙集理论、图像分割。