

# 基于循环自相关的PSK信号码速率估计的噪声影响分析

金艳 姬红兵

(西安电子科技大学电子工程学院 西安 710071)

**摘要:** 采用循环自相关函数或基于循环自相关的循环统计量可以有效地估计PSK信号的码速率。与理论分析结果不符的是, 实际中不具有循环平稳性的平稳噪声仍对基于循环自相关处理的PSK码速率估计有影响。该文分析了这类影响产生的原因, 推导了循环自相关处理后, 不期望项(即由平稳噪声所产生的项)的均值和方差的数学表达式, 并给出了高斯白噪声情况下的简化表达式。仿真实验证明了这些结论的正确性。

**关键词:** 平稳噪声; 循环自相关; 循环平稳; PSK; 码速率

中图分类号: TN911.7

文献标识码: A

文章编号: 1009-5896(2008)02-0505-04

## Influence of Stationary Noise on Cyclic-Autocorrelation Based PSK Symbol Rate Estimation

Jin Yan Ji Hong-bing

(School of Electronic Engineering, Xidian Univ., Xi'an 710071, China)

**Abstract:** Symbol rate estimation of PSK signals could be effectively implemented by employing the cyclic-autocorrelation function or cyclic-autocorrelation based cyclic statistics. Stationary noise, which does not possess cyclostationarity, has an influence on cyclic-autocorrelation based PSK symbol rate estimation in practice, and this is not consistent with the theoretical analysis. The origin of such influence is studied in this paper, and the analytic expressions of means and variances of those undesired items (which are produced by stationary noise), as well as the simplified forms for Gaussian white noise are derived. Simulation experiments have testified the analytic results.

**Key words:** Stationary noise; Cyclic-autocorrelation; Cyclostationary; PSK; Symbol rate

### 1 引言

截获数字通信信号(Intercepted Digital Communication Signals)的参数识别是侦察、监视、定位、识别等情报搜集活动中的一个重要环节。码速率是数字通信信号的重要参数, 码速率的准确估计对于调制方式的识别、特定信号的搜索以及盲解调等方面具有重要的意义。PSK(Phase-Shifted-Keying)信号在现代数字通信领域中广泛采用, 寻求有效的PSK信号参数的盲估计方法成为近年来受到广泛关注的研究课题, 许多研究者对此做了大量卓有成效的研究工作, 尤其是在Gardner等<sup>[1-3]</sup>提出循环平稳理论后, 基于循环平稳理论的PSK码速率的盲估计成为新的研究热点。在循环平稳理论框架下, 文献[4-7]采用循环自相关或基于循环自相关的循环统计量来估计码速率。这类方法计算复杂度低, 且在低信噪比时仍有较高的估计精度<sup>[4,5,7]</sup>, 因而具有较高的实用价值。

PSK信号具有循环平稳性<sup>[1,2]</sup>, 而噪声一般是平稳过程。基于循环自相关的PSK码速率估计原理就是在循环自相关处理后, 搜索与码速率有关的非零循环频率; 平稳噪声不存在非零的循环频率, 因此, 理论上平稳噪声对基于循环自相

关的PSK码速率估计不会产生影响; 然而实际中, 由于观测数据长度有限, 平稳噪声对基于循环自相关的PSK码速率估计仍有影响。本文重点分析了这种影响, 推导了在有限数据长度情况下经循环自相关处理后, 不期望项(即由平稳噪声所产生的项)的均值和方差的数学表达式, 并进行了仿真验证。

### 2 基于循环自相关的PSK码速率估计

#### 2.1 循环平稳理论概述

设 $x(t)$ 为一离散循环平稳随机过程, 其自相关函数 $R_{xx}(t; \tau) = E\{x(t)x^*(t + \tau)\}$ 为时间 $t$ 的周期函数, 且可以展开为Fourier级数<sup>[1]</sup>

$$R_{xx}(t; \tau) = \sum_{\alpha \in A} R_{xx}(\alpha; \tau) \exp(j2\pi\alpha t) \quad (1)$$

其中Fourier系数 $R_{xx}(\alpha; \tau)$ 称为 $x(t)$ 的循环自相关函数, 且满足

$$R_{xx}(\alpha; \tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \sum_{t=0}^{T-1} R_{xx}(t; \tau) \exp(-j2\pi\alpha t) \quad (2)$$

$\alpha$ 称为循环频率, 且有 $A \triangleq \{\alpha : R_{xx}(\alpha; \tau) \neq 0\}$ 。

对于有限长观测数据 $\{x(t)\}_{t=0}^{N-1}$ , 循环自相关函数 $R_{xx}(\alpha; \tau)$ 的一致估计为<sup>[8]</sup>

$$\hat{R}_{xx}(\alpha; \tau) \triangleq \frac{1}{N} \sum_{t=0}^{N-1} x(t)x^*(t + \tau) \exp(-j2\pi\alpha t) \quad (3)$$

由式(3)可知,  $\widehat{R}_{xx}(\alpha; \tau)$  可以通过 FFT 来计算, 实际中, 一般用式(3)来代替  $R_{xx}(\alpha; \tau)$ 。

## 2.2 基于循环自相关的 PSK 码速率估计

PSK 信号可以表示为

$$s(t) = p(t - nT_d - t_0)e^{j\phi(t)}e^{j(2\pi f_0 t + \phi_0)} \quad (4)$$

其中  $f_0$  为载频,  $t_0$  和  $\phi_0$  分别为起始时刻和初相,  $T_d$  为码片时宽,  $\phi(t)$  为  $s(t)$  的相位调制信号,  $p(t)$  为脉冲成形波形。令  $a(t) = p(t - nT_d - t_0)e^{j\phi(t)}$ , 则  $a(t)$  为  $s(t)$  的复包络。记  $a_n = e^{j\phi(t)}, (n-1)T_d \leq t \leq nT_d$ , 则  $a_n$  对应于调制星座图上的独立同分布的星座点, 且平稳复随机序列  $\{a_n\}$  满足

$$E\{a_n\} = 0, \quad E\{a_m a_n^*\} = \sigma_a^2 \delta_{m,n} \quad (5)$$

其中  $\delta_{n,m}$  为离散 Dirac 函数。复包络  $a(t)$  可以进一步表示为  $a(t) = \sum_n a_n p(t - nT_d - t_0)$ 。由式(5), 可得  $a(t)$  的循环自相关函数为<sup>[6,7]</sup>

$$R_{aa}(\alpha; \tau) = \frac{\sin(\pi\alpha(T_d - |\tau|))}{\pi\alpha T_d} \sigma_a^2 e^{j2\pi\alpha t_0}, \quad |\tau| < T_d \text{ 且 } \alpha = \frac{k}{T_d} \quad (k \in Z) \quad (6)$$

由式(6)可知,  $R_{aa}(\alpha; \tau)$  的循环频率为一族离散值, 且仅与 PSK 信号  $s(t)$  的码速率  $f_d$  (即  $1/T_d$ ) 有关。由于复信号与其相应复包络的循环自相关的模相等<sup>[5]</sup>, 即得

$$|R_{ss}(\alpha; \tau)| = |R_{aa}(\alpha; \tau)| = \sigma_a^2 \left| \frac{\sin(\pi\alpha(T_d - |\tau|))}{\pi\alpha T_d} \right|, \quad |\tau| < T_d \text{ 且 } \alpha = \frac{k}{T_d} \quad (k \in Z) \quad (7)$$

可知  $|R_{ss}(\alpha; \tau)|$  的循环频率为一族仅与 PSK 信号  $s(t)$  的码速率  $f_d$  有关的离散值。当延迟  $\tau \neq 0$  时,  $|R_{ss}(\alpha; \tau)|$  在其所有的循环频率处都取非零值。图1所示为某一延迟  $\tau = \tau_0 \neq 0$  时, PSK 信号的循环自相关函数幅值。由图1可见,  $|R_{ss}(\alpha; \tau_0)|$  为一系列离散谱线, 这些谱线所对应的循环频率即为整数倍的码速率。因此, 取延迟  $\tau \neq 0$ , 搜索距零频最近的循环频率, 计算它与零频之间的间隔, 即可得码速率的估计。

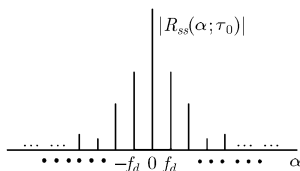


图1 PSK 信号的循环自相关幅值

## 3 平稳噪声对 PSK 码速率估计的影响

### 3.1 问题的提出

设待处理的截获信号  $r(t)$  由 PSK 信号  $s(t)$  和零均值加性平稳噪声  $n(t)$  组成, 即  $r(t) = s(t) + n(t)$ 。由于  $s(t)$  为循环平稳信号, 而  $n(t)$  不具有循环平稳性, 所以  $r(t)$  具有与  $s(t)$  相同的循环频率结构。设  $s(t)$  与  $n(t)$  相互独立, 则  $r(t)$

的循环自相关函数为<sup>[9]</sup>

$$\left. \begin{aligned} R_{rr}(\alpha; \tau) &= I_1 + I_2 + I_3 \\ I_1 &= R_{ss}(\alpha; \tau) \\ I_2 &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \sum_{t=0}^{T-1} (R_{sn}(t; \tau) + R_{ns}(t; \tau)) \exp(-j2\pi\alpha t) \\ I_3 &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \sum_{t=0}^{T-1} R_{nn}(t; \tau) \exp(-j2\pi\alpha t) \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

其中  $I_1$  是 PSK 信号的循环自相关函数, 即信号项;  $I_2$  是信号与噪声的交叉项, 由于  $s(t)$  和  $n(t)$  相互独立, 理论上  $I_2$  应该为零;  $I_3$  是平稳噪声的循环自相关函数, 由于平稳噪声不具有循环平稳性, 理论上当  $\alpha \neq 0$  时有  $I_3 = 0$ 。因此, 理论上平稳噪声对基于循环自相关的 PSK 码速率估计没有影响。

然而, 实际中循环相关函数  $R(\alpha; \tau)$  是以式(3)中的一致估计  $\widehat{R}(\alpha; \tau)$  来代替的, 因此由于有限数据长度的影响, 式(8)中的噪声寄生项(即与平稳噪声有关的  $I_2$  和  $I_3$  两项)也就不会为零, 从而对 PSK 码速率的估计带来影响。

### 3.2 平稳噪声对基于循环自相关的 PSK 码速率估计的影响

实际中, 以式(3)中的一致估计  $\widehat{R}(\alpha; \tau)$  来代替循环相关函数  $R(\alpha; \tau)$ , 则式(8)变为

$$\left. \begin{aligned} \widehat{R}_{rr}(\alpha; \tau) &= \widehat{I}_1 + \widehat{I}_2 + \widehat{I}_3 \\ \widehat{I}_1 &= \widehat{R}_{ss}(\alpha; \tau) = \frac{1}{N} \sum_{t=0}^{N-1} s(t) s^*(t + \tau) \exp(-j2\pi\alpha t) \\ \widehat{I}_2 &= \widehat{R}_{sn}(\alpha; \tau) + \widehat{R}_{ns}(\alpha; \tau) \\ &= \frac{1}{N} \sum_{t=0}^{N-1} [s(t) n^*(t + \tau) + n(t) s^*(t + \tau)] \cdot \exp(-j2\pi\alpha t) \\ \widehat{I}_3 &= \widehat{R}_{nn}(\alpha; \tau) = \frac{1}{N} \sum_{t=0}^{N-1} n(t) n^*(t + \tau) \exp(-j2\pi\alpha t) \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

由于式(3)中  $\widehat{R}(\alpha; \tau)$  在均方意义下一致收敛于  $R(\alpha; \tau)$ <sup>[8]</sup>, 因此, 当数据长度  $N$  趋于无穷时, 式(9)中的  $\widehat{I}_2$  将趋于零, 且当  $\alpha \neq 0$  时  $\widehat{I}_3$  也趋于零。这样则  $r(t)$  的循环自相关估计值  $\widehat{R}_{rr}(\alpha; \tau)$  趋于 PSK 信号的循环自相关。然而, 在有限数据长度情况下, 在非零循环频率处  $\widehat{I}_2$  和  $\widehat{I}_3$  均不为零, 从而对基于循环自相关的 PSK 码速率估计带来了影响。下面对  $\widehat{I}_2$  项和  $\widehat{I}_3$  项的影响进行理论分析。

$\widehat{I}_2$  的影响

$$\text{均值 } E\{\widehat{I}_2\} = E\{\widehat{R}_{sn}(\alpha; \tau)\} + E\{\widehat{R}_{ns}(\alpha; \tau)\} = 0 \quad (10)$$

$$\text{方差 } \text{Var}(\widehat{I}_2) = \text{Var}(\widehat{R}_{sn}(\alpha; \tau)) + \text{Var}(\widehat{R}_{ns}(\alpha; \tau)) \quad (11)$$

其中

$$\begin{aligned} &\text{Var}(\widehat{R}_{sn}(\alpha; \tau)) \\ &= E\left\{ \left[ \widehat{R}_{sn}(\alpha; \tau) \right]^2 \right\} - E^2\left\{ \widehat{R}_{sn}(\alpha; \tau) \right\} \\ &= \frac{1}{N^2} \sum_{t_1=0}^{N-1} \sum_{t_2=0}^{N-1} E\left\{ \sum_{t=0}^{N-1} [s(t_1) n^*(t_1 + \tau) s^*(t_2) n(t_2 + \tau)] \cdot \exp(j2\pi\alpha(t_2 - t_1)) \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{N^2} \sum_{t_1=0}^{N-1} \sum_{t_2=0}^{N-1} R_{nm}^*(t_2 - t_1) \exp(j2\pi\alpha(t_2 - t_1)) \\
&\quad \cdot \sum_{\beta} R_{ss}(\beta; t_2 - t_1) \exp(j2\pi\beta t_1) \\
&= \frac{1}{N^2} \sum_{\beta} \sum_{t=0}^{N-1} \sum_{\varepsilon=t-(N-1)}^t R_{nm}^*(\varepsilon) R_{ss}(\beta; \varepsilon) \\
&\quad \cdot \exp(j2\pi\beta(t - \varepsilon)) \exp(j2\pi\alpha\varepsilon)
\end{aligned}$$

同样可得

$$\begin{aligned}
\text{Var}(\hat{R}_{ns}(\alpha; \tau)) &= \frac{1}{N^2} \sum_{\beta} \sum_{t=0}^{N-1} \sum_{\varepsilon=t-(N-1)}^t R_{nm}^*(\varepsilon) R_{ss}(\beta; \varepsilon) \\
&\quad \cdot \exp(j2\pi\beta(t - \varepsilon + \tau)) \exp(-j2\pi\alpha\varepsilon)
\end{aligned}$$

$\hat{I}_3$  的影响

$$\text{均值 } E\{\hat{I}_3\} = E\{\hat{R}_{nm}(\alpha; \tau)\} = R_{nm}(\tau) f(\alpha; N) \quad (12)$$

其中  $f(\alpha; N) = \left(1/N\right) \sum_{t=0}^{N-1} \exp(-j2\pi\alpha t) = \left(1/N\right) \exp(-j\pi\alpha(N-1)) \left(\sin(\pi\alpha N) / \sin(\pi\alpha)\right)$ 。

$$\begin{aligned}
\text{方差 } \text{Var}(\hat{I}_3) &= \text{Var}(\hat{R}_{nm}(\alpha; \tau)) \\
&= \frac{1}{N^2} \sum_{t_1=0}^{N-1} \sum_{t_2=0}^{N-1} E\{n(t_1) n^*(t_1 + \tau) n^*(t_2) n(t_2 + \tau)\} \\
&\quad \cdot \exp(-j2\pi\alpha(t_1 - t_2)) \quad (13)
\end{aligned}$$

上面的分析结果较为繁琐。不失一般性, 以下讨论中, 只考虑常用的高斯白噪声的情况。

设  $n(t)$  为高斯白噪声, 即其自相关函数  $R_{nn}(\tau) = \sigma_n^2 \delta(\tau)$ , 其中  $\sigma_n^2$  为  $n(t)$  的方差(即平均功率),  $\delta(\tau)$  为 Dirac 函数, 记信号的方差为  $\sigma_s^2$ , 则有

$$\begin{aligned}
\text{Var}(\hat{R}_{nm}(\alpha; \tau)) &= \frac{1}{N^2} \sum_{\beta} \sum_{t=0}^{N-1} \sum_{\varepsilon=t-(N-1)}^t R_{nm}^*(\varepsilon) R_{ss}^{\beta}(\varepsilon) \\
&\quad \cdot \exp(j2\pi\beta(t - \varepsilon)) \exp(j2\pi\alpha\varepsilon) \\
&= \frac{1}{N^2} \sigma_n^2 \sum_{\beta} R_{ss}(\beta; 0) \sum_{t=0}^{N-1} \exp(j2\pi\beta t) \\
&= \frac{1}{N} \sigma_n^2 \sum_{\beta} R_{ss}(\beta; 0) f(\alpha; N) \\
&= \frac{1}{N} \sigma_n^2 \sigma_s^2 + \frac{1}{N} \sum_{\beta \neq 0} R_{ss}(\beta; 0) f(\alpha; N) \\
&= \frac{1}{N} \sigma_n^2 \sigma_s^2
\end{aligned}$$

其中最后一个等式成立是应用了式(7)中  $R_{ss}(\alpha; 0)|_{\alpha \neq 0} = 0$  的结论。类似地, 可推得  $\text{Var}(\hat{R}_{ns}(\alpha; \tau)) = \sigma_n^2 \sigma_s^2 / N$ 。则可得式(11)的简化形式为

$$\text{Var}(\hat{I}_2) = \frac{2}{N} \sigma_n^2 \sigma_s^2 \quad (14)$$

式(12)可简化为

$$E\{\hat{I}_3\} \Big|_{\tau \neq 0} = \sigma_n^2 \delta(\tau) f(\alpha; N) \Big|_{\tau \neq 0} = 0 \quad (15)$$

由于基于循环自相关的 PSK 码速率估计是在延迟  $\tau \neq 0$  时实现的, 所以上式中只考虑  $\tau \neq 0$  的情况。

式(1)可简化为

$$\text{Var}(\hat{I}_3) = \text{Var}(\hat{R}_{nm}(\alpha; \tau)) = \sigma_n^4 / N \quad (16)$$

式(10), 式(14)~式(16)表明, 在高斯白噪声情况下, 采用循环自相关法估计 PSK 信号的码速率时, 信号与噪声的交叉项  $\hat{I}_2$  均值为零, 方差为  $2\sigma_n^2 \sigma_s^2 / N$ , 其方差随着数据长度  $N$  的增加而下降, 并且方差的大小与信号和噪声的方差(功率)均成正比; 噪声项  $\hat{I}_3$  的均值也为零, 方差为  $\sigma_n^4 / N$ , 其方差随着数据长度  $N$  的增加而下降, 且与噪声方差(功率)的平方成正比。由此可见, 通过减小噪声功率或增加数据长度等可以有效提高估计精度。

#### 4 实验分析

实验中采用 QPSK 信号, 采样频率归一化为 1, 载频取为采样率的 1/8, 码速率  $f_d$  取为采样率的 1/16。噪声为加性高斯白噪声, 且与信号独立。在作循环相关处理时, 选取时间延迟  $\tau = 5T_s$ , 其中  $T_s$  为采样周期( $\tau$  的选取原则参见文献[7])。

首先, 通过计算不同信噪比下码速率估计的归一化均方根误差(Normalized Root Mean Squared Errors, NRMSE), 来考察平稳噪声对基于循环自相关的 QPSK 信号码速率估计的影响。图 2 是在采集时间  $T$  分别为  $128T_d$  和  $64T_d$  两种情况下, 1000 次 Monte Carlo 实验运行的平均结果。由图 2 可见, 在码速率的估计达到其最小分辨率之前, 估计误差随着信噪比的增加而减小, 且  $T = 128T_d$  时的误差均小于  $T = 64T_d$  时的误差, 这与理论分析结果是一致的。

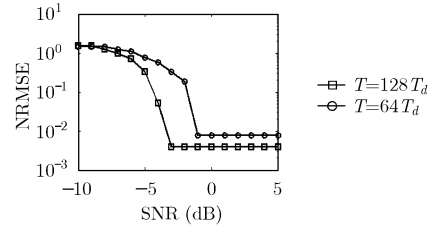


图 2 码速率估计的归一化均方根误差

下面考察在 QPSK 信号码速率的估计中, 观测数据长度对  $\hat{I}_2$  和  $\hat{I}_3$  各自方差的影响。时间延迟同图 2 一样为  $\tau = 5T_s$ , 循环频率选为  $\alpha = f_d$ , 信噪比为 0dB 和 -5dB 两种情况; 图 3 和图 4 分别给出了经 1000 次 Monte Carlo 仿真实验结果平

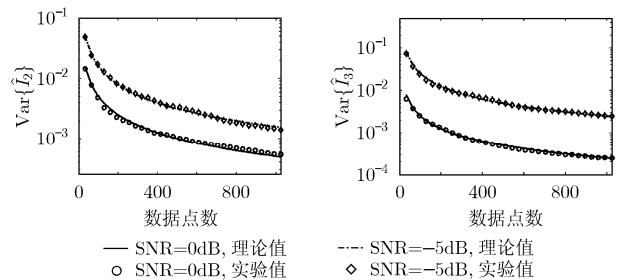


图 3 交叉项  $\hat{I}_2$  的方差随数据点数变化曲线

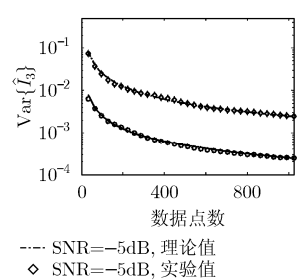


图 4 噪声项  $\hat{I}_3$  的方差随数据点数的变化曲线

均后,  $\hat{I}_2$  项和  $\hat{I}_3$  项的方差随数据长度的变化曲线。由图可见, 实验结果与理论计算结果是一致的。

## 5 结束语

本文研究了平稳噪声对基于循环自相关的 PSK 码速率估计的影响, 分析了有限数据长度情况下用循环自相关的一致估计代替循环自相关是产生该影响的原因, 推导了噪声寄生项的均值和方差的表达式, 且给出了高斯白噪声情况下的简化表达式。其中交叉项的均值为零, 方差与信号和噪声的功率均成正比, 与观测数据长度成反比; 噪声项的均值也为零, 方差与噪声功率的平方成正比, 与观测数据长度成反比。即减小噪声功率或增加观测数据长度可以提高码速率的估计精度。仿真结果验证了这些结论的正确性。

然而, 对于截获数字通信信号来讲, 噪声功率为外部环境的因素, 而观测数据长度也是受限制的, 因此要提高基于循环自相关的 PSK 信号码速率估计的精度, 必须对算法自身进行改进, 这将是我們进一步研究的重要方向。

## 参考文献

- [1] Gardner W A. Exploitation of spectral redundancy in cyclostationary signals. *IEEE Signal Processing Magazine*, 1991, 8(2): 14-36.
- [2] Gardner W A. Signal Interception: A unifying theoretical framework for feature detection. *IEEE Trans. on Commun.*, 1988, 36(8): 897-906.
- [3] Gardner W A, Brown W A, and Chen C. Spectral correlation of modulated signals: part II, —digital modulation. *IEEE Trans. on Commu.*, 1987, 35(6): 595-601.
- [4] Tang S and Yu Y. Fast algorithm for symbol rate estimation. *IEICE Trans. Commun.*, 2005, e88-b(4): 1649-1652.
- [5] 汤素华, 戴旭初, 徐佩霞等. 基于循环自相关的符号率估计. 兵工学报, 2005, 26(2): 251-255.  
Tang S, Dai X, and Xu P, *et al.*. Cyclostationarity-based symbol rate estimation. *Acta Armamentarii*, 2005, 26(2): 251-255.
- [6] 金艳, 姬红兵, 罗军辉. 一种基于循环统计量的直扩信号检测与参数估计方法. 电子学报, 2006, 34(4): 634-637.  
Jin Y, Ji H, and Luo J. A cyclic-cumulant based method for DS-SS signal detection and parameter estimation. *Acta Electronica Sinica*, 2006, 34(4): 634-637.
- [7] 金艳, 姬红兵. 基于循环自相关的PSK信号盲参数估计新方法. 西安电子科技大学学报, 2006, 33(6): 892-895.  
Jin Y, and Ji H. A new cyclic autocorrelation based blind parameter estimation method for PSK signals. *Journal of Xidian University*, 2006, 33(6): 892-895.
- [8] Dandwate A V and Ginnakis G B. Statistical tests for presence of cyclostationarity. *IEEE Trans. on SP*, 1994, 42(9): 2355-2369.
- [9] 于宏毅, 保铮. 平稳过程循环相关处理的有限数据消失特性. 西安电子科技大学学报, 1999, 26(2): 133-136.  
Yu H and Bao Z. Vanishing characteristics of stationary processes processed by cyclic correlation. *Journal of Xidian University*, 1999, 26(2): 133-136.

金 艳: 女, 1978年生, 讲师, 博士生, 研究方向为统计信号处理、信号检测与参数识别。

姬红兵: 男, 1963年生, 教授, 博士生导师, 研究方向为模式识别、现代信号处理等。