

基于非局部低秩和加权全变分的图像压缩感知重构算法

赵 辉* 张 静 张 乐 刘莹莉 张天骐

(重庆邮电大学通信与信息工程学院 重庆 400065)

(重庆邮电大学信号与信息处理重庆市重点实验室 重庆 400065)

摘 要: 为准确有效地实现自然图像的压缩感知(CS)重构, 该文提出一种基于图像非局部低秩(NLR)和加权全变分(WTV)的CS重构算法。该算法考虑图像的非局部自相似性(NSS)和局部光滑特性, 对传统的全变分(TV)模型进行改进, 只对图像的高频分量设置权重, 并用一种差分曲率的边缘检测算子来构造权重系数。此外, 算法以改进的TV模型与NLR模型为约束构建优化模型, 并分别采用光滑非凸函数和软阈值函数来求解低秩和全变分优化问题, 很好地利用了图像的自身性质, 保护了图像的细节信息, 并提高了算法的抗噪性和适应性。仿真结果表明, 与基于NLR的CS算法相比, 相同采样率下, 该文所提算法的峰值信噪比最高可提高2.49 dB, 且抗噪性更强, 验证了算法的有效性。

关键词: 压缩感知; 图像重构; 非局部低秩; 加权全变分

中图分类号: TP391.41

文献标识码: A

文章编号: 1009-5896(2019)08-2025-08

DOI: 10.11999/JEIT180828

Compressed Sensing Image Restoration Based on Non-local Low Rank and Weighted Total Variation

ZHAO Hui ZHANG Jing ZHANG Le LIU Yingli ZHANG Tianqi

(School of Communication and Information Engineering, Chongqing University of Posts
and Telecommunications, Chongqing 400065, China)

(Chongqing Key Laboratory of Signal and Information Processing, Chongqing University of Posts
and Telecommunications, Chongqing 400065, China)

Abstract: In order to reconstruct natural image from Compressed Sensing(CS) measurements accurately and effectively, a CS image reconstruction algorithm based on Non-local Low Rank(NLR) and Weighted Total Variation(WTV) is proposed. The proposed algorithm considers the Non-local Self-Similarity(NSS) and local smoothness in the image and improves the traditional TV model, in which only the weights of image's high-frequency components are set and constructed with a differential curvature edge detection operator. Besides, the optimization model of the proposed algorithm is built with constraints of the improved TV and the non-local low rank model, and a non-convex smooth function and a soft thresholding function are utilized to solve low rank and TV optimization problems respectively. By taking advantage of them, the proposed method makes full use of the property of image, and therefore conserves the details of image and is more robust and adaptable. Experimental results show that, compared with the CS reconstruction algorithm via non-local low rank, at the same sampling rate, the Peak Signal to Noise Ratio(PSNR) of the proposed method increases by 2.49 dB at most and the proposed method is more robust, which proves the effectiveness of the proposed algorithm.

Key words: Compressed Sensing(CS); Image reconstruction; Non-local Low Rank(NLR); Weighted Total Variation(WTV)

1 引言

压缩感知(Compressed Sensing, CS)^[1,2]理论是

收稿日期: 2018-08-22; 改回日期: 2019-01-28; 网络出版: 2019-02-25

*通信作者: 赵辉 zhaohui@cqupt.edu.cn

基金项目: 国家自然科学基金(61671095)

Foundation Item: The National Natural Science Foundation of China (61671095)

近年来提出的一种新的采样技术, 它能够以远低于Nyquist采样定理的采样率进行编码测量, 并通过算法精确或近似地重构原始信号, 成功实现了信号的同时采样与压缩, 解决了Nyquist采样定理存在的问题。其理论框架主要包括3部分^[3]: 稀疏表示、非自适应线性测量和图像重构。信号的精确重构是CS理论研究的核心问题, 而CS理论指出信号

是可压缩的或在某域中是稀疏的,这是CS的先验条件,所以信号的稀疏先验信息对于信号的重构具有重要作用。因此,对于具有显著结构化特征的图像信号而言,如何充分挖掘其先验信息并构造有效的约束条件成为图像重构的关键。目前,利用图像先验知识来重构图像的正则化方法大致分为4类:基于稀疏表示^[4-8]、基于非局部均值(Non-Local Means, NLM)^[9-11]、基于近似低秩矩阵^[12-15]和基于图像梯度的正则化方法^[16-19]。

第1类算法的思想是选择一个合适的稀疏基对图像进行稀疏表示,并求解特定的优化问题实现对原始图像的高精度重构。常用的稀疏表示方法有正交基法和冗余字典法,正交基法主要考虑图像在某变换域中的稀疏性^[4,5],如离散余弦变换域和离散小波变换域等,但图像作为复杂的2维信号,往往包含平滑、边缘和纹理等不同的形态特征,单一的基函数很难同时对图像的多种结构特征进行自适应的最优稀疏表示。为了解决这一问题,可以运用过完备字典来表示图像信号^[5-7],该方法通过找到一个优化字典来最大化信号的稀疏性,但获得可有效表示图像各类结构特征的冗余字典,往往需要付出较大的计算成本。

后3类算法主要考虑图像在空间域的稀疏性。Buades等人^[9]首次提出NLM算法,该算法利用图像的非局部自相似性(Non-local Self-Similarity, NSS)进行降噪的加权滤波,达到了很好的去噪效果,并有效地保护了图像的边缘和细节信息。Dong等人^[12]利用NSS进一步挖掘图像的非局部结构或组稀疏特性,提出基于非局部低秩(Non-local Low Rank, NLR)的CS算法(NLR-CS),该算法把图像重构问题转换为求解图像中各相似块矩阵的低秩问题,能有效地去除图像冗余信息以及图像伪影。虽然基于图像NSS特性的算法很大程度上提高了图像重构性能,但由于图像中不可避免地存在不具有重复性的结构(如角点)和被噪声破坏的图像数据,所以这类算法在保护图像纹理细节方面仍有不足。基于图像梯度的重构算法中最常用的是全变分(Total Variation, TV)模型^[16],该模型是根据自然图像具有局部光滑性,并且不同区域之间像素密度不同这一特点而提出的。标准的TV模型对所有的梯度给予相同的惩罚,这不利于保护图像边缘信息。针对该问题,Candès等人^[20]提出了一种自适应加权策略,即对梯度大的像素点设置较小的惩罚,对梯度小的像素点设置较大的惩罚,显然该方法比标准的TV模型能更好地保护图像边缘。但是现在提出的加权策略^[20-22]都普遍存在以下问题:同时对

图像的低频信息和高频信息进行加权处理,且都是利用图像1阶梯度来构造权重系数,这种加权方式会向重构图像引入错误的纹理以及边缘状伪影,而且易受噪声影响,使算法抗噪能力弱。

针对以上分析,本文提出一种基于非局部低秩和加权全变分的压缩感知重构算法(NLR-WTV)。本文算法使用NSS先验来消除传统算法中全局信息丢失的影响,保护图像的纹理等结构信息;利用TV先验来抑制噪声,并减小或移除低秩矩阵恢复过程产生的虚假信息,通过调整这两项正则项的比重来恢复图像。为了提高重构图像的质量,本文对传统的TV模型进行了改进,即在重构前先将图像分解成低频分量和高频分量,并只对高频分量的梯度设置权重,同时,利用一种差分曲率边缘检测算子来构造TV的加权系数,以提高算法的鲁棒性。最后,本文算法采用交替方向乘子法(Alternative Direction Multiplier Method, ADMM)^[23]来简化问题的求解。实验结果表明了本文算法的有效性,重构图像的主观视觉质量、客观峰值信噪比(Peak Signal to Noise Ratio, PSNR)和结构相似性(Structural SIMilarity, SSIM)均优于目前主流的压缩感知图像重构算法。

2 理论基础

CS重构是从低维的观测值 $\mathbf{y} = \Phi \mathbf{u} + \mathbf{e}$, $\mathbf{y} \in R^M$ 中恢复出高维的原信号 $\mathbf{u} \in R^N$,其中 $\Phi \in R^{M \times N}$ ($M \ll N$)是观测矩阵, $\mathbf{e}$ 为高斯白噪声。由于 $M \ll N$,测量矩阵 Φ 在观测过程中表示退化操作,所以信号重构本质上是一种病态的逆问题。为了从上述欠定系统中恢复图像,常见的优化算法模型为

$$\hat{\mathbf{u}} = \arg \min_{\mathbf{u}} \frac{1}{2} \|\mathbf{y} - \Phi \mathbf{u}\|_2^2 + \lambda \Psi(\mathbf{u}) \quad (1)$$

其中, $\Psi(\mathbf{u})$ 为正则项,表示图像在某域中的稀疏性, λ 为数据保真项和正则项之间的调和参数。

式(1)中的稀疏正则项 $\Psi(\mathbf{u})$ 可以用基于图像NSS性质的低秩模型来表示,该模型利用基于欧氏距离的块匹配方法,在搜索范围内找到 m 个与样本块(大小为 $n \times n$)相似的相似图像块,并将每个相似图像块按列展开聚合成 $n^2 \times m$ 的矩阵 $\mathbf{P}_i$ (i 为像素点坐标), $\mathbf{P}_i$ 具有低秩属性。实际上,图像可能含噪声,即 $\mathbf{P}_i = \mathbf{L}_i + \mathbf{N}_i$, $\mathbf{L}_i$ 和 $\mathbf{N}_i$ 分别表示低秩矩阵和高斯噪声矩阵,所以基于低秩矩阵的图像块恢复可以用式(2)的无约束优化问题来解决

$$\hat{\mathbf{L}}_i = \arg \min \sum_i^m \{\|\mathbf{R}_i \mathbf{u} - \mathbf{L}_i\|_2^2 + \eta \text{rank}(\mathbf{L}_i)\} \quad (2)$$

其中, $\mathbf{P}_i = \mathbf{R}_i \mathbf{u} = [\mathbf{R}_{i,0} \mathbf{u} \ \mathbf{R}_{i,1} \mathbf{u} \ \cdots \ \mathbf{R}_{i,m-1} \mathbf{u}]$ 表示与样本块 $\mathbf{u}_i$ 相似的相似图像块组成的矩阵。

3 基于非局部低秩和加权全变分的压缩感知重构算法

3.1 加权全变分模型

Dong等人^[12]提出的NLR-CS算法具有重构效果好,效率高等特点,但该算法在重构时需要对各低秩矩阵的解进行调整聚合,即平均操作,这会模糊图像的边缘和结构信息,尤其是在低采样率的情况下会造成重构图像过于平滑,而且该算法只利用了图像的单一性质,适应性不强。所以,本文引入加权TV正则项约束来保护图像的边缘等细节信息,并将其与非局部低秩约束相结合来提高算法的适应性。TV模型是根据自然图像具有局部光滑性,并且不同区域之间像素密度不同这一特点而提出的,传统的加权TV定义为

$$\text{TV}(\mathbf{u}) = \sum_i \mathbf{w}_i (|\mathbf{D}_i^h \mathbf{u}| + |\mathbf{D}_i^v \mathbf{u}|) = \sum_i \mathbf{w}_i |\mathbf{D}_i \mathbf{u}| \quad (3)$$

其中, $\mathbf{w}_i = 1/(\|\mathbf{D}_i \mathbf{u}\|_2 + \varepsilon)$, i 为像素点坐标, ε 为正常数, $\mathbf{D}_i^h = [1, -1]$ 和 $\mathbf{D}_i^v = [1; -1]$ 分别表示水平方向和垂直方向的差分算子。传统的加权TV模型对所有梯度设置权重,没有考虑图像信号的结构属性,这会向重构图像引入错误的纹理以及边缘状伪影。为了解决该问题,本文先对图像进行预处理,将其分为低频分量 $\mathbf{u}_L$ 和高频分量 $\mathbf{u}_R$,然后只对高频分量的梯度赋予权重,因此加权TV可重新定义为

$$\text{WTV}(\mathbf{u}) = \sum_{i \in \mathbf{u}_L} |\mathbf{D}_i \mathbf{u}_L| + \sum_{i \in \mathbf{u}_R} \mathbf{w}_i |\mathbf{D}_i \mathbf{u}_R| \quad (4)$$

式(4)涉及到低频分量 $\mathbf{u}_L$ 、高频分量 $\mathbf{u}_R$ 和权重系数 $\mathbf{w}_i$ 的定义问题,下面将分别对其进行讨论。

(1) 低频分量 $\mathbf{u}_L$ 和高频分量 $\mathbf{u}_R$: 受文献^[24]启发,图像的低频分量 $\mathbf{u}_L$ 可通过求解式(5)中的反卷积问题得到

$$\arg \min \frac{1}{2} \|\mathbf{u} - \mathbf{f}_L \otimes \mathbf{z}_L\|_2^2 + \kappa \sum_d \|\mathbf{g}_d \otimes \mathbf{z}_L\|_2^2 \quad (5)$$

其中, $\mathbf{z}_L$ 是图像 $\mathbf{u}$ 的低频特征映射, $\mathbf{f}_L$ 是一个大小为 3×3 的低通滤波器,且所有元素值为 $1/9$, $\mathbf{g}_d$ 是垂直方向和水平方向的梯度算子。在傅里叶变换域中可有效地求解式(5),即

$$\mathbf{z}_L = \mathcal{F}^{-1} \left(\frac{\mathcal{F}^*(\mathbf{f}_L) \circ \mathcal{F}(\mathbf{u})}{\mathcal{F}^*(\mathbf{f}_L) \circ \mathcal{F}(\mathbf{f}_L) + \kappa \sum_d \mathcal{F}^*(\mathbf{g}_d) \circ \mathcal{F}(\mathbf{g}_d)} \right) \quad (6)$$

$\mathcal{F}$ 是2维离散傅里叶变换, $*$ 表示复共轭, κ 是自定义参数, $\circ$ 表示逐元素相乘。所以通过 $\mathbf{z}_L$ 将 $\mathbf{u}_L$ 表示为

$$\mathbf{u}_L = \mathbf{f}_L \otimes \mathbf{z}_L \quad (7)$$

因此,高频分量为

$$\mathbf{u}_R = \mathbf{u} - \mathbf{u}_L \quad (8)$$

(2) 权重系数 $\mathbf{w}_i$: 式(3)可以自适应地给与图像梯度不同程度的惩罚,当梯度大时,对应的权重小,因此可以保护边缘等细节,但由于在图像处理过程中难免会引入噪声,而噪声区域的梯度也比较大,相应的权重小,即对噪声的惩罚小,故而这种加权方式的抗噪能力弱。针对该问题,本文提出了一种新的加权策略。

文献^[18]指出,2阶导数能够有效地区分边缘和渐变区域(即光滑图案、纹理图案或噪声),并提出了一种差分曲率的边缘检测算子 $\mathbf{C} = \|\mathbf{e}_{\eta\eta}\| - \|\mathbf{e}_{\xi\xi}\|$,其中 $\mathbf{e}_{\eta\eta} = (\mathbf{e}_x^2 \mathbf{e}_{xx} + 2\mathbf{e}_x \mathbf{e}_y \mathbf{e}_{xy} + \mathbf{e}_y^2 \mathbf{e}_{yy})/(\mathbf{e}_x^2 + \mathbf{e}_y^2)$, $\mathbf{e}_{\xi\xi} = (\mathbf{e}_y^2 \mathbf{e}_{xx} - 2\mathbf{e}_x \mathbf{e}_y \mathbf{e}_{xy} + \mathbf{e}_x^2 \mathbf{e}_{yy})/(\mathbf{e}_x^2 + \mathbf{e}_y^2)$, $\mathbf{e}_x$ 和 $\mathbf{e}_y$ 分别表示水平方向和垂直方向的1阶梯度, $\mathbf{e}_{xx}$ 和 $\mathbf{e}_{xy}$ 为像素的2阶梯度。边缘区域的 $\mathbf{e}_{\eta\eta}$ 大 $\mathbf{e}_{\xi\xi}$ 小, $\mathbf{C}$ 值大;平坦和渐变区域的 $\mathbf{e}_{\eta\eta}$ 和 $\mathbf{e}_{\xi\xi}$ 都很小, $\mathbf{C}$ 值小;噪声区域的 $\mathbf{e}_{\eta\eta}$ 和 $\mathbf{e}_{\xi\xi}$ 都很大且几乎相等, $\mathbf{C}$ 值小,所以根据 $\mathbf{C}$ 值的大小就可以区分出图像边缘像素点。因此,本文利用边缘检测算子 $\mathbf{C}$ 将像素点 i 处的权重系数定义为

$$\mathbf{w}_i = \frac{1}{\mathbf{C}_i + \varepsilon} \quad (9)$$

式(9)中的权重系数既能提高TV模型的抗噪能力,又能有效地保护图像中的边缘信息。注意,由于本文算法只对图像的高频部分设置权重,因此边缘检测算子 $\mathbf{C}_i$ 是在 $\mathbf{u}_R$ 中计算的,而不是整个图像 $\mathbf{u}$ 中。

3.2 联合模型

将提出的加权TV正则项约束与非局部低秩正则项约束结合,得到新的能量函数,如式(10)

$$\begin{aligned} \arg \min_u \frac{1}{2} \|\mathbf{y} - \Phi \mathbf{u}\|_2^2 \\ + \lambda_1 \sum_i^m \{ \|\mathbf{R}_i \mathbf{u} - \mathbf{L}_i\|_2^2 + \eta \text{rank}(\mathbf{L}_i) \} \\ + \lambda_2 \{ |\mathbf{D} \mathbf{u}_L| + \mathbf{w} |\mathbf{D} \mathbf{u}_R| \} \end{aligned} \quad (10)$$

其中, λ_1 和 λ_2 为正则化参数, $\mathbf{w} = [\omega_1 \ \omega_2 \ \cdots \ \omega_N]$, 第1项为保真项,第2项和第3项分别为图像的非局部低秩先验和局部梯度稀疏先验。式(10)包含了低秩矩阵最小化以及不同分量的梯度优化问题,直接求解非常困难,因此首先对上述问题进行变量替换,得到式(11)

$$\begin{aligned}
& \arg \min_{\mathbf{u}} \frac{1}{2} \|\mathbf{y} - \Phi \mathbf{u}\|_2^2 \\
& + \lambda_1 \sum_i^m \{ \|\mathbf{R}_i \mathbf{x} - \mathbf{L}_i\|_2^2 + \eta \text{rank}(\mathbf{L}_i) \} \\
& + \lambda_2 \{ |\mathbf{z}_1| + \mathbf{w} |\mathbf{z}_2| \}, \\
& \text{s.t. } \mathbf{u} = \mathbf{x}, \mathbf{D} \mathbf{u}_L = \mathbf{z}_1, \mathbf{D} \mathbf{u}_R = \mathbf{z}_2
\end{aligned} \quad (11)$$

与式(11)对应的增广拉格朗日函数为

$$\begin{aligned}
L(\mathbf{u}, \mathbf{L}_i, \mathbf{x}, \mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2) = & \arg \min_{\mathbf{u}, \mathbf{L}_i, \mathbf{x}, \mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2} \frac{1}{2} \|\mathbf{y} - \Phi \mathbf{u}\|_2^2 \\
& + \lambda_1 \sum_i^m \{ \|\mathbf{R}_i \mathbf{x} - \mathbf{L}_i\|_2^2 + \eta \text{rank}(\mathbf{L}_i) \} \\
& + \lambda_2 \{ |\mathbf{z}_1| + \mathbf{w} |\mathbf{z}_2| \} + \frac{\alpha}{2} \|\mathbf{x} - \mathbf{u} + \mathbf{a}\|_2^2 \\
& + \frac{\mu_1}{2} \|\mathbf{z}_1 - \mathbf{D} \mathbf{u}_L + \mathbf{b}\|_2^2 + \frac{\mu_2}{2} \|\mathbf{z}_2 \\
& - \mathbf{D} \mathbf{u}_R + \mathbf{c}\|_2^2
\end{aligned} \quad (12)$$

其中, $\mathbf{x}$, $\mathbf{z}_1$ 和 $\mathbf{z}_2$ 为引入的辅助变量, α , μ_1 和 μ_2 为超参数, $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ 和 $\mathbf{c}$ 为拉格朗日乘子, 式(12)的鞍点即为式(10)的最优解。这里利用式(13)、式(14)来对式(10)进行求解。

$$\begin{aligned}
& (\mathbf{u}^{(k+1)}, \mathbf{L}_i^{(k+1)}, \mathbf{x}^{(k+1)}, \mathbf{z}_1^{(k+1)}, \mathbf{z}_2^{(k+1)}) \\
& = \arg \min_{\mathbf{u}, \mathbf{L}_i, \mathbf{x}, \mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2} L(\mathbf{u}^{(k)}, \mathbf{L}_i^{(k)}, \mathbf{x}^{(k)}, \mathbf{z}_1^{(k)}, \mathbf{z}_2^{(k)}) \quad (13)
\end{aligned}$$

$$\left. \begin{aligned}
\mathbf{a}^{(k+1)} &= \mathbf{a}^{(k)} - (\mathbf{u}^{(k+1)} - \mathbf{x}^{(k+1)}) \\
\mathbf{b}^{(k+1)} &= \mathbf{b}^{(k)} - (\mathbf{D} \mathbf{u}_L^{(k+1)} - \mathbf{z}_1^{(k+1)}) \\
\mathbf{c}^{(k+1)} &= \mathbf{c}^{(k)} - (\mathbf{D} \mathbf{u}_R^{(k+1)} - \mathbf{z}_2^{(k+1)})
\end{aligned} \right\} \quad (14)$$

其中, k 为迭代次数。最后, 利用ADMM将原问题分解成以下4类子问题的求解。

(1) $\mathbf{L}_i$ 子问题的求解: 固定 $\mathbf{u}$, $\mathbf{x}$, $\mathbf{z}_1$ 和 $\mathbf{z}_2$, $\mathbf{L}_i$ 的优化问题转化为

$$\mathbf{L}_i^{(k+1)} = \arg \min_{\mathbf{L}_i} \lambda_1 \sum_i^m \{ \|\mathbf{R}_i \mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{L}_i\|_2^2 + \eta \text{rank}(\mathbf{L}_i) \} \quad (15)$$

由于矩阵的低秩求解是一个NP-hard问题, 不能直接求解, Dong等人^[12]使用光滑非凸函数 $L(\mathbf{L}_i, \varepsilon)$ 来近似 $\text{rank}(\mathbf{L}_i)$, 并指出 $\log \det(\cdot)$ 的低秩近似效果要优于核范数, $L(\mathbf{L}_i, \varepsilon)$ 定义为

$$L(\mathbf{L}_i, \varepsilon) = \log \det \left((\mathbf{L}_i \mathbf{L}_i^T)^{1/2} + \varepsilon \mathbf{I} \right) \quad (16)$$

其中, ε 为正常数, $\mathbf{I}$ 表示单位矩阵。由文献^[12]可知, $\mathbf{L}_i$ 可以通过式(17)迭代求得

$$\mathbf{L}_i^{(k+1)} = \mathbf{U}(\tilde{\Sigma} - \tau \text{diag}(\mathbf{w}^{(k)}))_+ \mathbf{V}^T \quad (17)$$

$\mathbf{U} \tilde{\Sigma} \mathbf{V}^T$ 表示式(15)中 $\mathbf{R}_i \mathbf{x}$ 的奇异值分解。 $\tau = \eta/2\lambda_1$, $(x)_+ = \max\{x, 0\}$, $w_j^{(k)} = 1/(\sigma_j^{(k)} + \varepsilon)$, $\sigma_j^{(k)}$ 表示

$\mathbf{L}_i^{(k)}$ 的第 j 个奇异值。

(2) $\mathbf{x}$ 子问题的求解: 固定 $\mathbf{u}$, $\mathbf{L}_i$, $\mathbf{z}_1$ 和 $\mathbf{z}_2$, $\mathbf{x}$ 的优化问题转化为

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}^{(k+1)} = & \arg \min_{\mathbf{x}} \lambda_1 \sum_i^m \{ \|\mathbf{R}_i \mathbf{x} - \mathbf{L}_i\|_2^2 \} \\
& + \frac{\alpha}{2} \|\mathbf{x} - \mathbf{u}^{(k)} + \mathbf{a}^{(k)}\|_2^2
\end{aligned} \quad (18)$$

式(18)有闭式解, 对其进行求导, 并令导数等于0可得

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}^{(k+1)} = & \left(\lambda_1 \sum_i^m \mathbf{R}_i^T \mathbf{R}_i + \alpha \mathbf{I} \right)^{-1} \\
& \cdot \left(\lambda_1 \sum_i^m \mathbf{R}_i^T \mathbf{L}_i + \alpha (\mathbf{u}^{(k)} - \mathbf{a}^{(k)}) \right)
\end{aligned} \quad (19)$$

其中, $\sum_i^m \mathbf{R}_i^T \mathbf{R}_i$ 是对角矩阵, 且对角元素的值为图像块覆盖像素点的个数, $\sum_i^m \mathbf{R}_i^T \mathbf{L}_i$ 为图像块的平均值。

(3) $\mathbf{z}_1$ 和 $\mathbf{z}_2$ 子问题的求解: 固定 $\mathbf{u}$, $\mathbf{L}_i$, $\mathbf{x}$ 和 $\mathbf{z}_2$, $\mathbf{z}_1$ 的优化问题转化为

$$\begin{aligned}
\mathbf{z}_1^{(k+1)} = & \arg \min_{\mathbf{z}_1} \lambda_2 |\mathbf{z}_1| + \frac{\mu_1}{2} \|\mathbf{z}_1 - \mathbf{D} \mathbf{u}_L^{(k)} \\
& + \mathbf{b}^{(k)}\|_2^2
\end{aligned} \quad (20)$$

式(20)可以用文献^[17]中提出的软阈值算子求解, 得到

$$\mathbf{z}_1 = \text{shrink}(\mathbf{D} \mathbf{u}_L - \mathbf{b}, \lambda_2 \mathbf{I} / \mu_1) \quad (21)$$

式(21)中 $\text{shrink}(\mathbf{x}, \mathbf{p}) = \text{sign}(\mathbf{x}) \cdot \max(|\mathbf{x}| - \mathbf{p}, 0)$, $\mathbf{I}$ 为单位矩阵。

同理可得

$$\mathbf{z}_2 = \text{shrink}(\mathbf{D} \mathbf{u}_R - \mathbf{c}, \lambda_2 \mathbf{w} / \mu_2) \quad (22)$$

(4) $\mathbf{u}$ 子问题的求解

固定 $\mathbf{x}$, $\mathbf{z}_1$, $\mathbf{z}_2$ 和 $\mathbf{L}_i$, 并根据式(8)可知, $\mathbf{u}$ 的优化问题转化为

$$\begin{aligned}
\mathbf{u}^{(k+1)} = & \arg \min_{\mathbf{u}} \frac{1}{2} \|\mathbf{y} - \Phi \mathbf{u}\|_2^2 \\
& + \frac{\alpha}{2} \|\mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{u} + \mathbf{a}^{(k)}\|_2^2 \\
& + \frac{\mu_2}{2} \|\mathbf{D} \mathbf{u} - \mathbf{z}_2^{(k)} - \mathbf{z}_1^{(k)} - \mathbf{c}^{(k)}\|_2^2
\end{aligned} \quad (23)$$

式(23)为一个2次优化问题, 有封闭解, 对其进行求导, 并令导数等于0, 即

$$\begin{aligned}
& \Phi^T (\Phi \mathbf{u}^{(k+1)} - \mathbf{y}) + \alpha (\mathbf{u}^{(k+1)} - \mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{a}^{(k)}) \\
& + \mu_2 \mathbf{D}^T (\mathbf{D} \mathbf{u}^{(k+1)} - \mathbf{z}_1^{(k)} - \mathbf{z}_2^{(k)} - \mathbf{c}^{(k)}) = 0
\end{aligned} \quad (24)$$

进而获得 $\mathbf{u}^{(k+1)}$ 的解为

$$\mathbf{u}^{(k+1)} = \left(\Phi^T \Phi + \alpha \mathbf{I} + \mu_2 \mathbf{D}^T \mathbf{D} \right)^{-1} \left(\Phi^T \mathbf{y} + \alpha (\mathbf{x}^{(k)} + \mathbf{a}^{(k)}) + \mu_2 \mathbf{D}^T (\mathbf{z}_1^{(k)} + \mathbf{z}_2^{(k)} + \mathbf{c}^{(k)}) \right) \quad (25)$$

式(25)包含了矩阵的求逆运算, 计算复杂度高, 尤其是对于图像数据来说, 矩阵的维度较大, 直接求解需要耗费大量的内存和时间, 因此采用共轭梯度法对其进行求解。

获得以上各个子问题之后, 利用式(14)进行参数更新, 并继续下一次迭代, 直到满足迭代终止条件为止。最后一次迭代输出的 $\mathbf{u}^{(k+1)}$ 就是原图像的重构图像 $\hat{\mathbf{u}}$, 完整算法如表1所示。

表 1 基于非局部低秩和加权全变分的图像压缩感知重构算法(NLR-WTV)

输入:	从原始图像 $\mathbf{u}$ 采样得到的压缩感知测量值 $\mathbf{y}$
初始化:	$\mathbf{u}_0 = \Phi^T \mathbf{y}$, $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$, λ_1 , λ_2 , μ_1 , μ_2 ;
Outer loop for	$k = 1, 2, \dots, K$
(1)	根据块匹配法找到图像各相似像素点的位置;
(2)	根据式(6)、式(7)和式(8)计算图像的低频分量 $\mathbf{u}_L$ 和低频分量 $\mathbf{u}_R$;
(3)	if $k \leq K_0$, $w_i = 1$ else 根据式(9)计算 w_i ; end if
Inner loop for	$t = 1, 2, \dots, T$
(a)	根据式(17)计算 $\mathbf{L}_i^{(k+1)}$;
(b)	根据式(19)计算 $\mathbf{a}^{(k+1)}$;
(c)	分别根据式(21)和式(22)计算图像在低频和高频的梯度 $\mathbf{z}_1^{(k+1)}$ 和 $\mathbf{z}_2^{(k+1)}$;
(d)	根据式(25)计算 $\mathbf{u}^{(k+1)}$;
end for	
	根据式(14)更新 $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ 和 $\mathbf{c}$;
end for	
输出:	重构图像 $\hat{\mathbf{u}} = \mathbf{u}^{(k+1)}$

4 仿真实验

实验中, 先对图像进行2维CS观测, 再由重构算法来恢复, 其中, 观测矩阵 Φ 为部分傅里叶矩阵。为了评估提出算法的性能, 选择图像Monarch, Barbara, Lena, Boats, Parrots和Cameraman进行性能测试, 所有测试图像都是分辨率为 256×256 的灰度图像。为了评估提出算法的鲁棒性, 同时测试了算法在测量值有噪和无噪情况下的重建性能。所选择的用于性能比较的算法为: TVAL3^[17], BM3D-CS^[8], TVNLR^[19]和NLR-CS^[12], 它们都是当前主流的压缩感知重构算法。在所有实验中, 均采用相同的采样方式, 并用PSNR值和SSIM值对重构图像的质量进行客观评估。

4.1 参数设置

在进行压缩感知图像恢复性能比较的过程中, 本文算法的参数设置如下: 拉格朗日乘子 $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ 和 $\mathbf{c}$ 均初始化为全0矩阵, K , T 和 K_0 分别设置为18, 15和5; 在求解 $\mathbf{L}_i$ 子问题时, 经验性地将样本块大小设置为 6×6 , 相似块个数为45个, 两个相邻样本块之间的间隔设置为5个像素, 即水平和垂直方向均是每隔5个像素提取1个样本块; 在进行相似块搜索时, 根据相似块大多分布在样本块的邻近位置, 将搜索窗口设置为以当前样本块为中心的 20×20 的图像区域。本文算法NLR-WTV和比较的NLR-CS算法采用相同的相似块数量和相同大小的搜索窗口, 且总的迭代次数均设置为270次。

4.2 实验结果

(1) 无噪观测下与现有算法的比较实验: 在无噪观测环境下, 比较了5种算法在采样率为0.05时的重构质量, 图1和图2分别为图像Barbara和Parrots的仿真结果对比图。从图中可以看出, 基于TV约束的TVAL3算法, 不能很好地适应纹理丰富的图

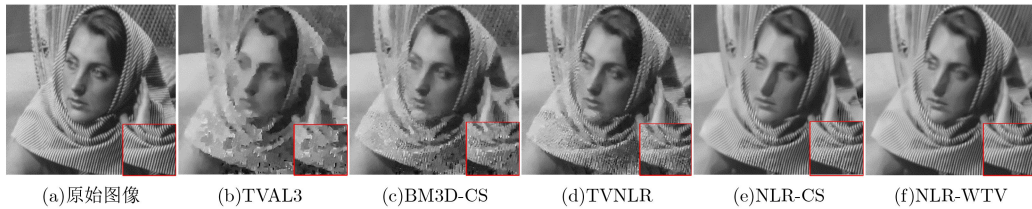


图 1 Barbara仿真效果对比图

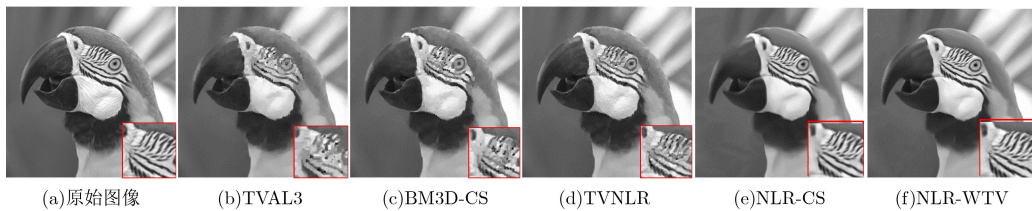


图 2 Parrots仿真效果对比图

像,使得重构图像细节丢失严重;BM3D-CS算法和TVNLR算法的恢复图像整体过于平滑,纹理细节处理得不够好;本文算法NLR-WTV和NLR-CS算法的重构图像与原图最接近,但NLR-WTV算法与NLR-CS算法相比,图1的PSNR增益达到1.16 dB,图2的PSNR增益达到0.60 dB,放大图像也可以看到NLR-WTV算法恢复的图像纹理、边缘等细节更清晰。

为了客观的评价测试图像的重构质量,表2详细列出了这5种算法在采样率为0.05时的PSNR和SSIM,从表中可以看出,本文算法重构图像的

PSNR和SSIM都高于其他几种算法。联合局部TV约束和非局部正则项约束的TVNLR算法的重构性能要优于利用单一性质的TVAL3算法和BM3D-CS算法;本文的NLR-WTV算法和NLR-CS算法进一步挖掘图像的非局部相似性,并以非局部低秩为约束,能很好地保护图像的纹理等细节信息,故而重构效果明显优于传统的算法。但NLR-WTV算法在恢复纹理丰富的图像时具有更好的重构效果,从表2中可以看出,采用NLR-WTV算法的重构图像Cameraman, Monarch和Barbara的PSNR值分别高于采用NLR-CS算法2.49 dB, 1.83 dB和1.16 dB。

表2 不同算法重构图像的PSNR(dB)和SSIM比较

采样率	算法	性能指标	Monarch	Barbara	Lena	Boats	Parrots	Cameraman
5%	TVAL3	PSNR	20.06	19.79	23.08	22.38	22.87	22.89
		SSIM	0.508	0.412	0.560	0.543	0.593	0.605
	BM3D-CS	PSNR	22.73	21.34	24.12	23.31	24.13	23.76
		SSIM	0.642	0.523	0.693	0.610	0.692	0.658
	TVNLR	PSNR	23.02	22.65	25.41	24.79	25.89	24.39
		SSIM	0.751	0.568	0.745	0.696	0.800	0.737
	NLR-CS	PSNR	26.38	27.94	30.64	29.81	31.71	25.38
		SSIM	0.848	0.830	0.875	0.830	0.885	0.770
	NLR-WTV	PSNR	28.21	29.10	30.83	30.14	32.31	27.87
		SSIM	0.883	0.862	0.879	0.857	0.891	0.817

图3为6幅测试图在不同采样率下各算法重构得到的PSNR平均值图,从图3可以看出,本文算法NLR-WTV在不同采用率下的PSNR值明显高于TVAL3, BM3D-CS和TVNLR算法,在低采样下,尤其是采样率为0.05时,平均高于NLR-CS算法1.10 dB,在采样率逐渐增大时,由于测量值较多,对图像细节的表达已经比较清晰,所提算法NLR-WTV和NLR-CS算法性能相当。

(2) 有噪观测下与现有算法的比较实验:为了测试本文算法对噪声的鲁棒性,在观测值中加入不同量级的噪声进行测试,并比较各种算法在含噪观

测情况下的重构质量。以采样率20%为例,图4分别给出图像Monarch和Boats在测量值受不同量级高斯白噪声影响下的重构性能曲线,横轴为测量值的信噪比,取值范围从15~35 dB,纵轴为重构图像的峰值信噪比PSNR。从图4中可以看出,在受不同程度噪声干扰的情况下,本文算法的PSNR值均比比较算法NLR-CS高。其中,图像Monarch的PSNR增益最高达1.07 dB,图像Boats的PSNR增益最高达1.24 dB,这验证了本文算法对噪声具有更好的鲁棒性。

表3为图像Monarch和Boats在采样率为20%时SSIM值随SNR值变化的情况,从表3可以看出,随SNR的增加,重构图像的SSIM值递增,且这两幅图像由NLR-WTV算法重构得到的SSIM值均比NLR-CS算法高,这验证本文算法的去噪效果优于NLR-CS算法。

5 结论

经典的CS重构算法一般只考虑了图像的单一性质,使得重构信号的质量差且算法适应不强,针对以上考虑,本文提出了一种基于非局部低秩和加权全变分的压缩感知重构算法。首先,本文对传统

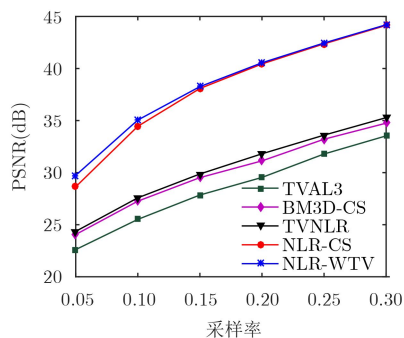


图3 6幅测试图在不同采样率下各种算法的PSNR平均值

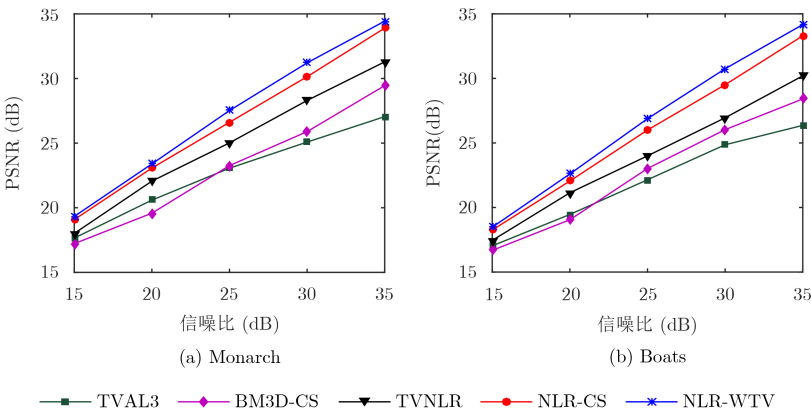


图 4 算法测量值含噪的PSNR值比较

表 3 算法测量值含噪的SSIM值比较

图像	算法	15	20	25	30	35
Monarch	NLR-CS	0.374	0.550	0.748	0.874	0.939
	NLR-WTV	0.387	0.569	0.761	0.890	0.948
Boats	NLR-CS	0.276	0.452	0.672	0.824	0.904
	NLR-WTV	0.281	0.466	0.681	0.844	0.927

的TV模型进行了改进，即在重构前先将图像分解成低频分量和高频分量，并只对高频分量的梯度设置权重，同时，利用一种差分曲率边缘检测算子来构造TV的加权系数，以提高算法的鲁棒性；然后，将改进的TV模型与非局部低秩模型相结合，并将其作为正则项约束构建优化模型；最后，利用 $\log \det(\cdot)$ 函数和软阈值函数分别求解低秩和全变分优化问题。实验结果验证了加权TV先验模型的引入对改善原始NLR-CS算法重构质量的有效性，且比其他只考虑图像单一性质的CS重构算法具有更好的细节保护能力。

参 考 文 献

[1] CANDLES E J, ROMBERG J, and TAO T. Robust uncertainty principles: Exact signal reconstruction from highly incomplete frequency information[J]. *IEEE Transactions on Information Theory*, 2006, 52(2): 489–509. doi: 10.1109/TIT.2005.862083.

[2] DONOHO D L. Compressed sensing[J]. *IEEE Transactions on Information Theory*, 2006, 52(4): 1289–1306. doi: 10.1109/TIT.2006.871582.

[3] 石光明, 刘丹华, 高大化, 等. 压缩感知理论及其研究进展[J]. *电子学报*, 2009, 37(5): 1070–1081. doi: 10.3321/j.issn:0372-2112.2009.05.028.

SHI Guangming, LIU Danhua, GAO Dahua, *et al.* Advances in theory and application of compressed sensing[J]. *Acta Electronica Sinica*, 2009, 37(5): 1070–1081. doi: 10.3321/j.issn:0372-2112.2009.05.028.

[4] ZHANG Jian, ZHAO Debin, ZHAO Chen, *et al.* Compressed sensing recovery via collaborative sparsity[C]. 2012 Data Compression Conference, Snowbird, USA, 2012: 287–296.

[5] HE Guiqing, XING Siyuan, DONG Dandan, *et al.* Panchromatic and multi-spectral image fusion method based on two-step sparse representation and wavelet transform[C]. The 9th Asia-Pacific Signal and Information Processing Association Annual Summit and Conference, Kuala Lumpur, Malaysia, 2017: 259–262.

[6] RUBINSTEIN R, BRUCKSTEIN A M, and ELAD M. Dictionaries for sparse representation modeling[J]. *Proceedings of the IEEE*, 2010, 98(6): 1045–1057. doi: 10.1109/JPROC.2010.2040551.

[7] HONG Tao and ZHU Zhihui. Online learning sensing matrix and sparsifying dictionary simultaneously for compressive sensing[J]. *Signal Processing*, 2018, 153: 188–196. doi: 10.1016/j.sigpro.2018.05.021.

[8] EGI-AZARIAN K, FOI A, and KATKOVNIK V. Compressed sensing image reconstruction via recursive spatially adaptive filtering[C]. 2007 IEEE International Conference on Image Processing, San Antonio, USA, 2007: I-549–I-552. doi: 10.1109/ICIP.2007.4379013.

[9] BUADES A, COLL B, and MOREL J M. A review of image denoising algorithms, with a new one[J]. *Multiscale Modeling & Simulation*, 2005, 4(2): 490–530. doi: 10.1137/040616024.

[10] LIU Hangfan, XIONG Ruiqin, ZHANG Xinfeng, *et al.* Nonlocal gradient sparsity regularization for image restoration[J]. *IEEE Transactions on Circuits and Systems for Video Technology*, 2017, 27(9): 1909–1921. doi: 10.1109/TCSVT.2016.2556498.

[11] YU Jun and DONG Shumin. Nonlocal variational method application for image denoising[C]. 2017 IEEE International Conference on Signal Processing, Communications and Computing, Xiamen, China, 2017: 1–6.

[12] DONG Weisheng, SHI Guangming, LI Xin, *et al.*

- Compressive sensing via nonlocal low-rank regularization[J]. *IEEE Transactions on Image Processing*, 2014, 23(8): 3618–3632. doi: [10.1109/TIP.2014.2329449](https://doi.org/10.1109/TIP.2014.2329449).
- [13] 宋云, 李雪玉, 沈燕飞, 等. 基于非局部相似块低秩的压缩感知图像重建算法[J]. *电子学报*, 2017, 45(3): 695–703. doi: [10.3969/j.issn.0372-2112.2017.03.029](https://doi.org/10.3969/j.issn.0372-2112.2017.03.029).
- SONG Yun, LI Xueyu, SHEN Yanfei, *et al.* Compressed sensing image reconstruction based on low rank of non-local similar patches[J]. *Acta Electronica Sinica*, 2017, 45(3): 695–703. doi: [10.3969/j.issn.0372-2112.2017.03.029](https://doi.org/10.3969/j.issn.0372-2112.2017.03.029).
- [14] LIU Hangfan, XIONG Ruiqin, LIU Dong, *et al.* Low rank regularization exploiting intra and inter patch correlation for image denoising[C]. 2017 IEEE Visual Communications and Image Processing, USA, 2017: 1–4.
- [15] GU Shuhang, XIE Qi, MENG Deyu, *et al.* Weighted nuclear norm minimization and its applications to low level vision[J]. *International Journal of Computer Vision*, 2017, 121(2): 183–208. doi: [10.1007/s11263-016-0930-5](https://doi.org/10.1007/s11263-016-0930-5).
- [16] RUDIN L I, OSHER S, and FATEMI E. Nonlinear total variation based noise removal algorithms[C]. The 11th Annual International Conference of the Center for Nonlinear Studies on Experimental mathematics: Computational Issues in Nonlinear Science, Los Alamos, USA, 1992: 259–268.
- [17] LI Chengbo, YIN Wotao, and ZHANG Yin. TVAL3: TV minimization by augmented lagrangian and alternating direction algorithms[EB/OL]. <http://www.caam.rice.edu/~optimization/L1/TVAL3/>, 2013.
- [18] CHEN Qiang, MONTESINOS P, SUN Quansen, *et al.* Adaptive total variation denoising based on difference curvature[J]. *Image and Vision Computing*, 2010, 28(3): 298–306. doi: [10.1016/j.imavis.2009.04.012](https://doi.org/10.1016/j.imavis.2009.04.012).
- [19] ZHANG Jian, LIU Shaohui, XIONG Ruiqin, *et al.* Improved total variation based image compressive sensing recovery by nonlocal regularization[C]. 2013 IEEE International Symposium on Circuits and Systems, Beijing, China, 2013: 2836–2839.
- [20] CANDÈS E J, WAKIN M B, and BOYD S P. Enhancing sparsity by reweighted ℓ_1 minimization[J]. *Journal of Fourier Analysis and Applications*, 2008, 14(5/6): 877–905. doi: [10.1007/s00041-008-9045-x](https://doi.org/10.1007/s00041-008-9045-x).
- [21] WANG Ting, NAKAMOTO K, ZHANG Heye, *et al.* Reweighted anisotropic total variation minimization for limited-angle CT reconstruction[J]. *IEEE Transactions on Nuclear Science*, 2017, 64(10): 2742–2760. doi: [10.1109/TNS.2017.2750199](https://doi.org/10.1109/TNS.2017.2750199).
- [22] LI Yan. Sparse hyperspectral unmixing combined L1/2 norm and reweighted total variation regularization[C]. The Ninth International Conference on Digital Image Processing, Hong Kong, China, 2017: 1042046.
- [23] BOYD S, PARIKH N, CHU E, *et al.* Distributed optimization and statistical learning via the alternating direction method of multipliers[J]. *Foundations and Trends in Machine Learning*, 2011, 3(1): 1–122. doi: [10.1561/22000000016](https://doi.org/10.1561/22000000016).
- [24] ZHANG Mingli, DESROSIER C, and ZHANG Caiming. Effective compressive sensing via reweighted total variation and weighted nuclear norm regularization[C]. 2017 IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing, New Orleans, LA, United States, 2017: 1802–1806.
- 赵 辉: 女, 1980年生, 教授, 硕士生导师, 研究方向为信号与图像处理.
- 张 静: 女, 1992年生, 硕士生, 研究方向为信号与图像处理.
- 张 乐: 女, 1993年生, 硕士生, 研究方向为信号与图像处理.
- 刘莹莉: 女, 1994年生, 硕士生, 研究方向为信号与图像处理.
- 张天骐: 男, 1971年生, 博士后, 教授, 研究方向为通信信号的调制解调、盲处理、语音信号处理、神经网络实现以及 FPGA, VLSI实现.