

基于细化频谱的频率迭代插值估计算法

崔维嘉* 鲁航 巴斌

(解放军信息工程大学 郑州 450001)

摘要: 在加性高斯白噪声环境的单频复指数信号频率估计中, 针对现有频率估计算法估计误差分布不均且估计精度较低的问题, 该文提出一种细化频谱迭代插值估计算法。该算法首先根据半长信号的快速傅里叶变换峰值位置计算细化频谱, 再利用细化频谱幅值进行频率的无偏插值估计, 最后利用估计结果和全长信号更新细化频谱并进行迭代插值重估。仿真结果表明, 与现有算法相比, 所提算法估计误差分布均匀, 且在高信噪比的所有频率范围和低信噪比的大部分频率范围内估计精度更高。同时仿真表明, 所提算法在加性均匀噪声环境中也有较好的估计性能。

关键词: 频率估计; 细化频谱; 插值估计

中图分类号: TN911.6

文献标识码: A

文章编号: 1009-5896(2017)09-2141-07

DOI: 10.11999/JEIT161312

Iterative Frequency Estimation Algorithm Based on Interpolated Zoom Spectrum

CUI Weijia LU Hang BA Bin

(The PLA Information Engineering University, Zhengzhou 450001, China)

Abstract: In order to solve the problem of unhomogeneities of estimation error and expensive computing of existing algorithms, an iterative frequency estimation algorithm based on interpolated zoom spectrum is proposed. Firstly, fast Fourier transform algorithm is applied to get the frequency corresponding to the peak spectral amplitude of the half-length signal. The unbiased estimation of frequency of the signal is then given based on the zoom spectra, which are calculated with the half-length signal. The zoom spectra are updated with the complete signal and the frequency is estimated with the updated zoom spectra, lastly. Computing cost analysis proves the superiority of the algorithms when length of signal is long compared with the algorithms in the references. Simulation result verifies good performance of distribution of estimation error and estimation error of the proposed algorithm is closer to the Cramer-Rao lower bound at the circumstance of high signal to noise ratio.

Key words: Frequency estimation; Zoom spectrum; Interpolated estimation

1 引言

噪声污染信号的频率估计由于在通信、军事、生物学等领域具有广泛的工程应用基础, 因此研究精度高、复杂度小、并具备普适性的估计算法具有较高的理论研究价值^[1-5]。传统的基于最大似然的估计方法在高斯白噪声条件下可以达到理论上的性能最优, 但在信号长度较长时计算量大, 不适用于某些实时性要求较高的环境。而基于频域的估计算法以信号频谱中的峰值频率作为信号的估计频率, 是一种简单有效的估计方法。

直接对有限长信号的快速傅里叶变换(FFT)由于存在能量泄漏与栅栏效应, 估计精度受限于频率

分辨率, 因此, 国内外学者提出多种直接校正和迭代校正算法对FFT的粗估计结果进行校正。文献[6]提出的Rife插值算法只有当信号频率位于FFT的“栅栏”中间位置时才能获得较高的估计精度。文献[7]提出的Mrife算法根据Rife算法估计结果对频谱进行平移和重估计, 仿真表明改进后的Mrife算法在信号频率位于“栅栏”附近时的估计精度相较于Rife算法有了较大的提高。文献[8]提出的基于信号子段间的迭代校正算法能够以少于一次FFT的计算量达到与Mrife算法相近的估计精度, 但该算法需要信号长度满足一定的要求, 因而其应用受到了一定的限制。除此之外, 文献[9-12]也提出了相应的内插估计器, 但文献[7-12]估计式的推导过程中均进行了数学近似, 因此其在理论上不能达到性能最优。

文献[13]根据估计结果对初始Candan^[12]算法的偏差进行了消除。文献[14]也分别对Quinn^[9]算法、

收稿日期: 2016-12-08; 改回日期: 2017-03-23; 网络出版: 2017-05-11

*通信作者: 崔维嘉 weijiacm@163.com

基金项目: 国家自然科学基金(61401513)

Foundation Item: The National Natural Science Foundation of China (61401513)

Macleod^[10]算法进行了偏差消除,算法估计性能得到了一定的提升,但与克拉美罗界(CRB)相比仍有一定的提升空间。文献[15]提出的基于细化频谱的估计算法以 0.5 倍的频率分辨率更新频谱的峰值频率并进行插值估计,其理论估计结果具有无偏性。仿真表明相较于 Mrife 算法,该算法能够在提高估计精度的同时降低计算量,具有较高的应用价值。但由于细化频谱的位置只位于 FFT 离散频谱及其中间位置,当信号真实频率处于这些位置时估计精度较高,而在其他位置时估计精度相对较低。

基于以上的分析,为了以较低计算量在整个估计频段获得较高频率估计精度,本文提出一种基于细化频谱的插值迭代估计算法。该算法基于本文估计式的信号真实频率与细化频谱中心频率的频差越小,估计误差越小的思想,通过半长信号无偏插值估计与全长信号的迭代插值重估,使算法与文献[13-15]算法相比,估计误差分布更均匀,同时在高信噪比的所有频率范围与低信噪比的大部分频率范围内均具有更好的估计精度。

2 基于细化频谱的迭代插值估计算法

在无噪环境下, t_n 时刻接收到的单频复指数信号可以表示为

$$s(n) = Ae^{j(2\pi f_d n T_s + \varphi)}, n = 0, 1, \dots, N-1 \quad (1)$$

其中, A 为信号的幅值,不失一般性,本文中将 A 归一化为 1。 f_d 为信号频率, $T_s = 1/f_s$ 为信号的采样间隔, f_s 为采样频率, φ 为信号的初始相位, N 为信号长度。假设 $s(n)$ 的 FFT 频谱在序号为 k^* 处取得幅值最大值。则 f_d 可以表示为

$$f_d = f_0(k^* + \delta) \quad (2)$$

式中, $f_0 = f_s/N$ 为频率分辨率, δ 为单位化频差,其取值为 $|\delta| \leq 0.5$, 通过式(2)将 f_d 的估计问题转变为 δ 的估计问题。

由于通过 FFT 计算得到的频谱是 N 条离散的谱线,因此利用这 N 条离散谱线估计频率时,忽略了离散频谱之间的频率成分的信息。而时间序列 $s(n)$ 中已包含频率为 $0 \sim f_s/2$ 的信号频域信息,为了充分利用 FFT 离散谱线之间的频率信息,借鉴文献[16]的思想,利用连续傅里叶变换把离散的谱线扩展成连续谱线,则位于 k 位置的频谱可以表示为

$$s(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j2\pi kn/N} = \frac{\sin\left(\pi\left(f_d/f_0 - k\right)\right)}{\sin\left(\pi\left(f_d/f_0 - k\right)/N\right)} \cdot e^{j\left(\varphi + \pi \frac{N-1}{N}\left(f_d/f_0 - k\right)\right)}, k \in R, 0 \leq k \leq N \quad (3)$$

将式(2)代入式(3),则 FFT 峰值处的频谱可以

表示为

$$s(k^*) = \frac{\sin(\pi(\delta))}{\sin(\pi(\delta)/N)} e^{j\left(\varphi + \pi \frac{N-1}{N}\delta\right)} \quad (4)$$

定义

$$\gamma = k - k^*, 0 < \gamma \leq 1 \quad (5)$$

表示位置 k 与 k^* 之间的单位化频差。将式(5)代入式(3)中,则可以得到

$$|s(k^* + \gamma)| = \left| \frac{\sin(\pi(\delta - \gamma))}{\sin(\pi(\delta - \gamma)/N)} \right| \quad (6)$$

因为 $|\delta| \leq 0.5$, 因此当 $|\gamma| \leq 0.5$ 时,式(6)等号右边的绝对值符号可以去掉,变为

$$s^+ = |s(k^* + \gamma)| = \frac{\sin(\pi(\delta - \gamma))}{\sin(\pi(\delta - \gamma)/N)} \quad (7)$$

同理可以得到

$$s^- = |s(k^* - \gamma)| = \frac{\sin(\pi(\delta + \gamma))}{\sin(\pi(\delta + \gamma)/N)} \quad (8)$$

$$s^0 = |s(k^*)| = \frac{\sin(\pi\delta)}{\sin(\pi\delta/N)} \quad (9)$$

联立式(7),式(8),式(9),可以解得

$$\tan \pi\delta = \frac{s^0(s^+ - s^-)\sin(\pi\gamma)}{2s^+s^- \cos(\pi\gamma/N) - (s^+ + s^-)\cos(\pi\gamma)} \quad (10)$$

现假设实际接收信号的 FFT 得到的峰值谱线幅值为 x^0 , 其左右 $k^* - \gamma$ 与 $k^* + \gamma$ 位置谱线幅值分别为 x^-, x^+ , 则根据式(10)可以得到 δ 的估计式为

$$\hat{\delta} = \frac{1}{\pi} \text{atan}\left(\frac{x^0(x^+ - x^-)\sin(\pi\gamma)}{2x^+x^- \cos(\pi\gamma/N) - (x^+ + x^-)\cos(\pi\gamma)}\right) = f(x^0, x^-, x^+) \quad (11)$$

由于当 $\gamma \neq 0$ 时无法通过 FFT 得到 x^- 和 x^+ , 因此 x^-, x^+ 需要通过定义式(3)计算。则由式(2)可以得到 f_d 的估计式为

$$\hat{f}_d = f_0(k^* + \hat{\delta}) \quad (12)$$

由式(11)可以看出本文是利用频谱幅值进行插值估计,因此估计精度受限于噪声环境中频谱幅值误差的大小。对于估计式(11),当 x^0, x^-, x^+ 受到同样的噪声影响,估计误差显然更多取决于 x^0, x^-, x^+ 中的最小项。根据有限长信号的 DFT 定义和 x^0, x^-, x^+ 的定义可知, x^0 对应的频谱离 f_d 越近, $\min(x^-, x^+)$ 越大,因此可以考虑通过移动 x^0 对应的频谱使其位置接近 f_d , 再进行迭代重估减小首次估计误差(以上结论在仿真 2 中进行验证)。同时考虑如果初始估计与迭代重估均利用完整信号,则两部分计算中存在冗余的计算量,而随着 N 的增加,FFT

的计算量占总计算量的比重逐渐增加。基于以上的分析, 为了以较低的计算量提高估计式(11)的估计精度, 本文首先利用半长信号进行初始估计, 再利用完整信号进行迭代重估。假设半长信号的初始估计结果为 $\hat{f}_{d,0}$, 则迭代重估过程如下:

(1) 计算 $k_1^* = \hat{f}_{d,0}/f_0$ 和计算 x_1^0, x_1^-, x_1^+ :

$$\left. \begin{aligned} x_1^0 &= |x(k_1^*)| \\ x_1^- &= |x(k_1^* - \gamma)| \\ x_1^+ &= |x(k_1^* + \gamma)| \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

(2) 通过式(11)计算本次迭代的频率估计值 $\hat{\delta}_1$:

$$\hat{\delta}_1 = f(x_1^0, x_1^-, x_1^+) \quad (14)$$

(3) 计算本次迭代的 $\hat{f}_{d,1}$:

$$\hat{f}_{d,1} = f_0(k_1^* + \hat{\delta}_1) \quad (15)$$

3 估计误差分析与计算量分析

3.1 估计误差分析

本文中 γ 取 0.5, 则估计式简化为

$$\hat{\delta} = f(x^0, x^-, x^+) = \frac{1}{\pi} \operatorname{atan} \left(\frac{x^0(x^+ - x^-)}{2x^+x^- \cos(\pi/2N)} \right) \quad (16)$$

在加性高斯噪声背景下的接收信号可以表示为

$$x(n) = s(n) + v(n) \quad (17)$$

其中, $v(n)$ 是方差为 $2\sigma_v^2$ 的高斯白噪声, 接收信号信噪比为 $\text{SNR} = 1/2\sigma_v^2$ 。FFT 峰值谱线的幅度可以近似写为

$$x^0 = s^0 + v^0 \quad (18)$$

其中, $v^0 = \operatorname{real}(v(k^*))$ 为 $v(n)$ 在频率为 $f_0 k^*$ 处的 DFT 的实部^[17], 并且有

$$\operatorname{var}(\operatorname{real}(v(k))) = N\sigma_v^2/2 \quad (19)$$

则 k^* 与 $k^* \pm 0.5$ 位置谱线幅值满足

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} x^0 \\ x^- \\ x^+ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s^0 \\ s^- \\ s^+ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v^0 \\ v^- \\ v^+ \end{bmatrix} \quad (20)$$

其中, v^0, v^-, v^+ 相互独立且满足同样的分布。因为式(16)的推导过程中没有进行数学近似, 因此在 k^* 判断正确时, 估计式(16)属于无偏估计^[18], 有

$$\operatorname{MSE}(\hat{\delta}) = \operatorname{var}(\hat{\delta}) = E(\delta - \hat{\delta})^2 \quad (21)$$

其中, δ 满足

$$P(\hat{k}^* \neq k^*) \approx P\{s^0 + v^0 - s^+ - v^+ < 0 \vee s^0 + v^0 - s^- - v^- < 0\}$$

$$= P\left\{v^+ - v^0 > \left|\frac{\sin(\pi\delta)}{\sin(2\pi\delta/N)}\right| - \left|\frac{\sin(\pi\delta)}{\sin(2\pi(\delta-1)/N)}\right| \cup v^- - v^0 > \left|\frac{\sin(\pi\delta)}{\sin(2\pi\delta/N)}\right| - \left|\frac{\sin(\pi\delta)}{\sin(2\pi(\delta+1)/N)}\right|\right\} \quad (31)$$

$$\delta = f(s^0, s^-, s^+) \quad (22)$$

为了计算式(21), 将估计式(16)在 $\mathbf{X} = \mathbf{S} = [s^0, s^-, s^+]^T$ 处进行泰勒展开并省去高阶项, 为

$$\begin{aligned} \hat{\delta} &\approx f(\mathbf{X})|_{\mathbf{S}} + \frac{\partial f(\mathbf{X})}{\partial \mathbf{X}}|_{\mathbf{S}} (\mathbf{X} - \mathbf{S}) \\ &= f(\mathbf{X})|_{\mathbf{S}} + b(x^0 - s^0) + c(x^- - s^-) + d(x^+ - s^+) \end{aligned} \quad (23)$$

其中,

$$b = \frac{\partial f}{\partial x^0}|_{\mathbf{S}} = \frac{1}{\pi} \frac{2s^+s^- (s^+ - s^-) \cos(\pi/2N)}{(2s^+s^- \cos(\pi/2N))^2 + (s^0(s^+ - s^-))^2} \quad (24)$$

$$c = \frac{\partial f}{\partial x^-}|_{\mathbf{S}} = \frac{1}{\pi} \frac{-2s^0(s^+)^2 \cos(\pi/2N)}{(2s^+s^- \cos(\pi/2N))^2 + (s^0(s^+ - s^-))^2} \quad (25)$$

$$d = \frac{\partial f}{\partial x^+}|_{\mathbf{S}} = \frac{1}{\pi} \frac{2s^0(s^-)^2 \cos(\pi/2N)}{(2s^+s^- \cos(\pi/2N))^2 + (s^0(s^+ - s^-))^2} \quad (26)$$

将式(22), 式(23)代入式(21), 可以得到

$$\begin{aligned} \operatorname{MSE}(\hat{\delta}) &\approx E(\delta - f(\mathbf{S}) - b(x^0 - s^0) \\ &\quad - c(x^- - s^-) - d(x^+ - s^+))^2 \\ &= E(-bv^0 - cv^- - dv^+)^2 \end{aligned} \quad (27)$$

又因为 v^0, v^-, v^+ 独立同分布, 因此

$$\operatorname{MSE}(\hat{\delta}) \approx (b^2 + c^2 + d^2) N\sigma_v^2/2 \quad (28)$$

则由式(12)可以得到

$$\operatorname{MSE}(\hat{f}_d) = E(f_d - \hat{f}_d)^2 = f_0^2 \operatorname{MSE}(\hat{\delta}) \quad (29)$$

式(29)即为式(12)的理论估计均方误差。

需要注意的是, 式(29)的估计误差是在 k^* 判断正确情况下得到的, 但当存在较大的噪声导致 k^* 判断错误时, 则估计结果也完全错误。现假设初始估计中半长信号 FFT 后的频谱峰值位置为 $\hat{k}^*$, 由于 $k^* \pm q, q > 1$ 处的谱线幅值远小于 k^* 和 $k^* \pm 1$ 处的谱线幅值, 因此其误判成 k^* 的概率几乎为 0, 在下面推导 k^* 判断错误的概率 $P(\hat{k}^* \neq k^*)$ 中不予以考虑。则

$$P(\hat{k}^* \neq k^*) \approx P(x^0 < x^+ \cup x^0 < x^-) \quad (30)$$

式(30)中, x^+, x^- 的 $\gamma = 1$ 。 x^+, x^- 与式(20)的噪声模型类似, 将其代入式(7), 式(8), 式(9), 可以得到

在 N 较大时, 进行等价无穷小替换。由于 v^0, v^-, v^+ 独立同分布, 因此当 $\delta > 0$, 有

$$\begin{aligned} P(\hat{k}^* \neq k^*) &\approx P\left\{v^+ - v^0 > \frac{(2\delta - 1)N \sin(\pi\delta)}{2\pi\delta(\delta - 1)}\right\} \\ &\quad + P\left\{v^- - v^0 > \frac{N \sin(\pi\delta)}{2\pi\delta(\delta + 1)}\right\} \\ &= \frac{1}{2} \operatorname{erfc}\left[\frac{(2\delta - 1)\sin \pi\delta}{2\pi\delta(\delta - 1)}\sqrt{N \cdot \text{SNR}}\right] \\ &\quad + \frac{1}{2} \operatorname{erfc}\left[\frac{\sin \pi\delta}{2\pi\delta(\delta + 1)}\sqrt{N \cdot \text{SNR}}\right] \quad (32) \end{aligned}$$

当 $\delta < 0$ 时, 有

$$\begin{aligned} P(\hat{k}^* \neq k^*) &\approx \frac{1}{2} \operatorname{erfc}\left[\frac{-\sin \pi\delta}{2\pi\delta(\delta - 1)}\sqrt{N \cdot \text{SNR}}\right] \\ &\quad + \frac{1}{2} \operatorname{erfc}\left[\frac{(2\delta + 1)\sin \pi\delta}{2\pi\delta(\delta + 1)}\sqrt{N \cdot \text{SNR}}\right] \quad (33) \end{aligned}$$

其中, erfc 为补误差函数。结合 erfc 的曲线特点, 从式(32), 式(33)可以看出, 当 $|\delta|$ 趋近 0.5 时, $P(\hat{k}^* \neq k^*)$ 会迅速增大。而 $|\delta|=0.5$ 时, 则 $P(\hat{k}^* \neq k^*) = 50\%$, 表明有一半的可能出现 k^* 判断错误。同时, 从式(33)也可以看出降低 k^* 判断错误概率的关键在于提高 $N \cdot \text{SNR}$ 的值。

3.2 计算量分析

假设信号长度为 N , 首先对文献[15]算法的计算量进行分析, 其估计过程为:

(1)进行 N 点的复数 FFT 运算和求模运算, 其中复数求模运算计算量相当于半次的复数乘法运算量, 其计算量为 $\frac{N}{2}\log_2 N + \frac{N}{2}$ 次复数乘法与 $N\log_2 N$ 次复数加法。

(2)根据 DFT 定义计算两个细化频谱, 并对其求模, 其计算量为 $2N + 1$ 次复数乘法和 $2(N - 1)$ 次复数加法。

(3)通过估计式计算 $\hat{f}_d$, 由于估计式只涉及单次的运算, 并且 $\arctan$ 与 $\cos$ 值可以通过查表的方式获得, 因此在 N 较大时, 此步计算量相较于前两步可以忽略。则算法总的计算量为 $\frac{N}{2}\log_2 N + \frac{N}{2} + 2N + 1$ 次复数乘法与 $N\log_2 N + 2(N - 1)$ 次复数加法。

由于复数乘法的计算量远大于复数加法的计算量, 因此以复数乘法次数衡量各个算法的计算量大小。忽略各个算法估计式带来的计算量, 以同样的方法可以分析得到本文算法与 4 种对比算法的计算量如表 1。

由于文献[13]与文献[14]算法未进行迭代运算, 因此其计算量与文献[15]算法、本文算法相比具有优

表 1 计算量对比表

算法	计算量
Candan ^[13] 算法	$\frac{N}{2}\log_2 N + \frac{N}{2}$
Quinn ^[14] 算法	
Macleod ^[14] 算法	
文献[15]算法	$\frac{N}{2}\log_2 N + \frac{N}{2} + 2N + 1$
本文算法	$\frac{N}{4}\log_2 \frac{N}{2} + \frac{N}{4} + 4N + 2$

势; 而本文算法与同为迭代估计的文献[15]算法相比, 在 $N > 66$ 时具有计算量的优势。

4 算法仿真

仿真信号为加噪声的复正弦信号:

$$x(n) = e^{j(2\pi(4+\delta)n/N + 0.5\pi)} + v(n), n = 0, 1, \dots, N - 1 \quad (34)$$

δ 的变化范围为 $0 < \delta \leq 0.5$, 信号采样频率为 4 Hz。估计模型的克拉美罗下界(CRLB)^[19]为

$$\operatorname{var}(f_d) \geq \frac{6}{\text{SNR} \cdot t_s^2 \cdot N(N^2 - 1)} \quad (35)$$

式中, t_s 为采样间隔。对不同的 SNR 与 δ 均进行了 1000 次的 Monte-Carlo 试验, 以均方根误差(RMSE)作为衡量估计误差的标准。

仿真 1 为了确定参数 γ 的最佳取值, 利用式(12)在 SNR = 5 dB, $N = 64$ 时的估计结果如图 1 所示。可以看出当 δ 较小时, γ 的取值几乎不影响估计误差的大小; 而当 δ 趋近于 0.5 时, 则只有 γ 取值也趋近于 0.5 时才能获得较低的估计误差, 在其他信噪比条件下估计结果具有类似的分布。因此, 本文中 γ 取值为 0.5。

仿真 2 为了验证本文迭代估计的有效性, 首先对全长信号($N = 64$)进行初始估计, 再进行迭代重估, 仿真的估计误差与利用式(29)计算的理论估计误差分布如图 2。

从图 2 中的理论估计误差曲线与仿真的初始估计误差曲线首先可以看出, 本文推导的理论估计误差能够较好地反映不同 SNR 与 δ 时的估计误差的变化趋势。由于估计式的泰勒展开中省略了高阶项, 因此理论估计误差与实际估计误差有小幅度的偏差。从图 2 中还可以看出, 随着 δ 的减小, 估计误差也逐渐减小, 这验证了本文迭代重估中的“ δ 越小, 估计误差越小”推论正确性。对比图 2(a)和图 2(b)可以观察到, 在低 SNR 条件下, 当 δ 较大时, 理论估计误差与实际估计误差出现较大的差距, 这是因为受 k^* 的判断错误的影响, 通过对比初始估计误差曲线与式(32)的分析结论, 可以看出初始估计误差曲线与利用式(32)分析的结果相一致。

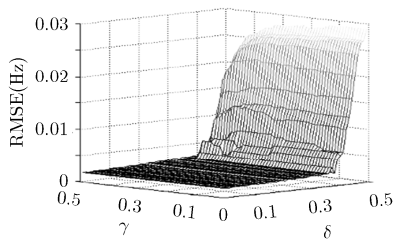
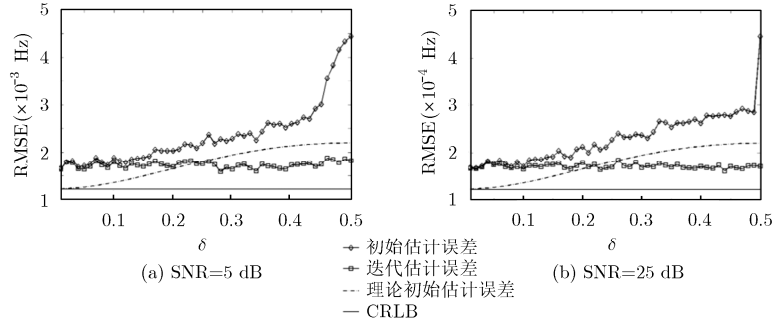
图1 不同 SNR 与 δ 条件下估计误差分布图

图2 迭代估计效果验证图

通过比较图 2 中初始估计误差曲线与迭代估计误差曲线可以看出, 迭代后的估计误差在整个 δ 取值区间内分布较为均匀且与初始估计在 δ 趋近于 0 时的估计精度相近, 这表明迭代重估对估计精度提升具有明显的效果, 迭代重估后可以达到与 $\delta = 0$ 相近的估计误差。本文算法的思想与初始估计 $\hat{\delta}$ 较大时对信号进行频移和重估计相似, 但本文算法计算量明显小于对信号频移重估计。

仿真 3 为了验证相较于利用全长信号进行初始估计, 本文的利用半长信号的初始估计对最终的估计结果影响很小, 现分别利用全长信号 ($N = 64$) 与半长信号 ($N = 32$) 对频率进行初始估计, 再利用全长信号进行迭代重估, 最终估计结果如图 3 所示。

对比图 3(a)和图 3(b)可以看出信号长度减半对最终估计精度的影响在低信噪比下较大, 随着信噪比的提高, 其影响逐渐减小。虽然信号长度减半的

影响在高信噪比与低信噪比下有差异, 但总体来看, 与通过全长信号进行初始估计相比, 利用半长信号降低的估计精度在可接受范围内, 因此利用半长信号替代全长信号进行初始估计是有意义的。

仿真 4 为了验证噪声环境中本文算法在不同 δ 和 SNR 时的估计性能, 对 Candan^[13]算法、Quinn^[14]算法、Macleod^[14]算法、文献[15]算法和本文算法分别在加性高斯白噪声与均匀噪声环境中进行仿真实验, 信号长度 $N = 64$ 。仿真结果如图 4 和图 5。

从图 4(a)中可以看出低信噪比条件下, 本文算法在 δ 趋近于 0 和 0.5 位置估计精度低于文献[15]算法与 Macleod^[14]算法; 而在 δ 取值区间的大部分中间区域, 本文算法估计精度比 4 种对比算法估计精度高。图 4(b)的高信噪比条件下, 本文算法估计精度优于 4 种对比算法。综合图 4 可以看出, 在同一信噪比条件下, 整个 δ 取值区间内本文算法估计误

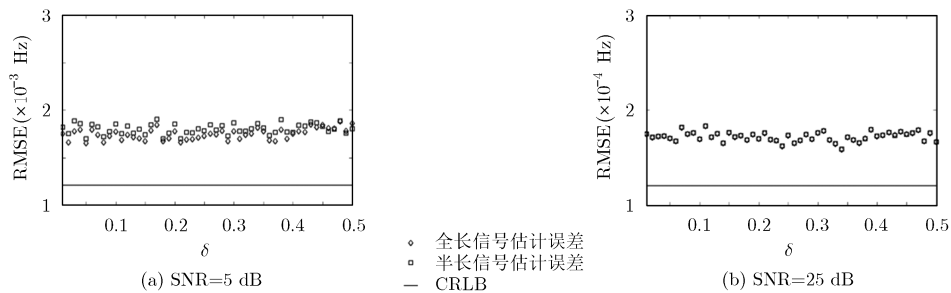


图3 信号长度减半对估计结果影响曲线

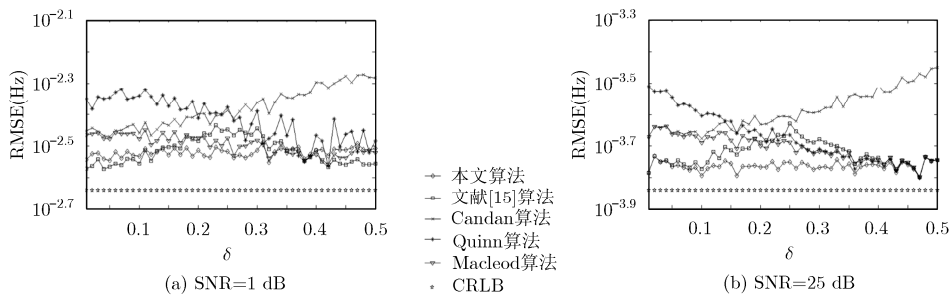


图4 加性高斯白噪声环境估计误差分布曲线

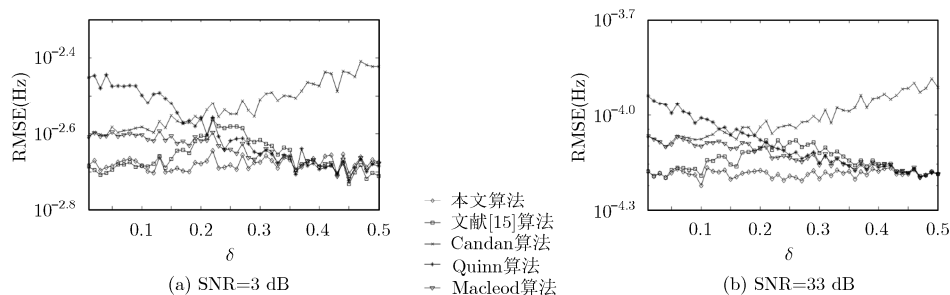


图5 加性均匀噪声环境估计误差分布曲线

差分布更均匀。从图5的加性均匀噪声环境仿真结果中可以得到相同的结论。

结合计算量分析与仿真4可以得出,虽然本文算法计算量稍高于Candan^[13]算法、Quinn^[14]算法、Macleod^[14]算法,但在加性高斯白噪声与均匀噪声环境中,以上3种算法估计误差分布不均匀,估计精度整体较低;而与文献[15]算法相比,本文算法计算量与估计精度均具有一定优势,因此综合而言,在较长的SNR区间与整个 δ 取值区间内,本文算法的估计性能更优。但是由于本文算法思想是基于加性高斯白噪声假设,因此在其他类型噪声环境中无法保证同样的估计性能。

5 结论

针对加性高斯白噪声污染的单频复指数信号频率估计问题,本文提出一种基于细化频谱的迭代插值估计算法并分析了算法的理论估计误差。在加性高斯白噪声与均匀噪声环境中,与文献[13–15]算法相比,本文算法的优势有两方面:频率估计误差分布均匀;高信噪比的所有频率范围与低信噪比的大部分频率范围均具有较高的估计精度。综合而言,本文算法可以更好地在相关工程加以应用。

参考文献

- [1] SHEN Yanlin, TU Yaqing, CHEN Linjun, *et al.* A phase match based frequency estimation method for sinusoidal signals[J]. *Review of Scientific Instruments*, 2015, 86(4): 721–726. doi: 10.1063/1.4916365.
- [2] DJUKANOVIC S. An accurate method for frequency estimation of a real sinusoid[J]. *IEEE Signal Processing Letters*, 2016, 23(7): 915–918. doi: 10.1109/LSP.2016.2564102.
- [3] SYED A A, SUN Q, and FOROOSH H. Frequency estimation of sinusoids from nonuniform samples[J]. *Signal Processing*, 2016, 129: 67–81. doi: 10.1016/j.sigpro.2016.05.024.
- [4] LUO Jiufei, XIE Zhijiang, and XIE Ming. Frequency estimation of the weighted real tones or resolved multiple tones by iterative interpolation DFT algorithm[J]. *Digital Signal Processing*, 2015, 41(6): 118–129. doi: 10.1016/j.dsp.2015.03.002.
- [5] 黄翔东, 王越冬, 靳旭康, 等. 无窗全相位 FFT/FFT 相位差频移补偿频率估计器[J]. *电子与信息学报*, 2016, 38(5): 1135–1142. doi: 10.11999/JEIT151041.
HUANG Xiangdong, WANG Yuedong, JIN Xukang, *et al.* No-windowed apFFT/FFT phase difference frequency estimator based on frequency-shift & compensation[J]. *Journal of Electronics & Information Technology*, 2016, 38(5): 1135–1142. doi: 10.11999/JEIT151041.
- [6] RIFE D C and VINCENT G A. Use of the discrete fourier transform in the measurement of frequencies and levels of tones[J]. *Bell Labs Technical Journal*, 1970, 49(2): 197–228. doi: 10.1002/j.1538-7305.1970.tb01766.x.
- [7] 邓振森, 刘渝, 王志忠. 正弦波频率估计的修正 Rife 算法[J]. *数据采集与处理*, 2006, 21(4): 473–477. doi: 10.3969/j.issn.1004-9037.2006.04.020.
DENG Zhenmiao, LIU Yu, and WANG Zhizhong. Modified Rife algorithm for frequency estimation of sinusoid wave[J]. *Journal of Data Acquisition and Processing*, 2006, 21(4): 473–477. doi: 10.3969/j.issn.1004-9037.2006.04.020.
- [8] 胥嘉佳, 刘渝, 邓振森, 等. 正弦波信号频率估计快速高精度递推算法的研究[J]. *电子与信息学报*, 2009, 31(4): 865–869. doi: 10.3724/SP.J.1146.2008.00075.
XU Jiajia, LIU Yu, DENG Zhenmiao, *et al.* A research of fast and accurate recursive algorithm for frequency estimation of sinusoid signal[J]. *Journal of Electronics & Information Technology*, 2009, 31(4): 865–869. doi: 10.3724/SP.J.1146.2008.00075.
- [9] QUINN B G. Estimation of frequency, amplitude, and phase from the DFT of a time series[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 1997, 45(3): 814–817. doi: 10.1109/78.558515.
- [10] MACLEOD M D. Fast nearly ML estimation of the parameters of real or complex single tones or resolved multiple tones[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 1998, 46(1): 141–148. doi: 10.1109/78.651200.
- [11] MAO X H and TING H. Estimation of complex single-tone

- parameters in the DFT domain[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2010, 58(7): 3879–3883. doi: 10.1109/TSP.2010.2046693.
- [12] CANDAN C. A method for fine resolution frequency estimation from three DFT samples[J]. *IEEE Signal Processing Letters*, 2011, 18(6): 351–354. doi: 10.1109/LSP.2011.2136378.
- [13] CANDAN C. Analysis and further improvement of fine resolution frequency estimation method from three DFT samples[J]. *IEEE Signal Processing Letters*, 2013, 20(9): 913–916. doi: 10.1109/LSP.2013.2273616.
- [14] JAN-RAY L and SHYING L. Analytical solutions for frequency estimators by interpolation of DFT coefficients[J]. *Signal Processing*, 2014, 100: 93–100. doi: 10.1016/j.sigpro.2014.01.012.
- [15] LIANG X, LIU A, PAN X, *et al.* A new and accurate estimator with analytical expression for frequency estimation [J]. *IEEE Communications Letters*, 2016, 20(1): 105–108. doi: 10.1109/LCOMM.2015.2496149.
- [16] 刘进明, 应怀樵. FFT 谱连续细化分析的富里叶变换法[J]. 振动工程学报, 1995, 8(2): 162–166.
- LIU Jinming and YING Huaiqiao. Zoom FFT spectrum by Fourier transform[J]. *Journal of Vibration Engineering*, 1995, 8(2): 162–166.
- [17] 齐国清, 贾欣乐. 插值 FFT 估计正弦信号频率的精度分析[J]. 电子学报, 2004, 32(4): 625–629. doi: 10.3321/j.issn:0372-2112.2004.04.022.
- QI Guoqing and JIA Xinle. Accuracy analysis of frequency estimation of sinusoid based on interpolated FFT[J]. *Acta Electronica Sinica*, 2004, 32(4): 625–629. doi: 10.3321/j.issn:0372-2112.2004.04.022.
- [18] 黄翔东, 孟天伟, 丁道贤, 等. 前后向子分段相位差频率估计法[J]. 物理学报, 2014, 63(21): 202–208. doi: 10.7498/aps.63.214304.
- HUANG Xiangdong, MENG Tianwei, DING Daoxian, *et al.* A novel phase difference frequency estimator based on forward and backward sub-segmenting[J]. *Acta Physica Sinica*, 2014, 63(21): 202–208. doi: 10.7498/aps.63.214304.
- [19] 曹燕. 含噪实信号频率估计算法研究[D]. 华南理工大学, 2012.
- 崔维嘉: 男, 1976 年生, 博士, 副教授, 研究方向为移动通信、信号处理等.
- 鲁航: 男, 1993 年生, 硕士生, 研究方向为频谱分析等.
- 巴斌: 男, 1987 年生, 博士, 讲师, 研究方向为数字信号处理等.