

椭圆球面函数频域调制解调方法

陆发平 王红星 刘传辉* 康家方 杨大伟

(海军航空大学 烟台 264001)

(山东省信号与信息处理重点实验室 烟台 264001)

摘要: 针对基于椭圆球面波函数(PSWFs)的非正弦时域调制算法复杂度高的不足, 该文引入空间映射, 分析了PSWFs信号频域完备正交性, 推导出PSWFs信号频域有效表示所需最小抽样点数。在此基础上, 引入复数域映射、FFT/IFFT信号处理框架, 提出PSWFs频域调制解调方法。该方法将PSWFs信号处理由时域拓展到频域, 在频域进行信息加载与检测, 为探索研究PSWFs信号在5G、超5G等采用频域信号处理的通信系统中的应用提供了可能。理论和数值分析表明, 相对于PSWFs时域调制, 所提方法将能够在不改变系统频带利用率、系统误码性能、调制信号能量聚集性以及信号峰均功率比的前提下, 显著降低算法复杂度, 将运算复杂度由 $O(2Qg^2)$ 降低为 $O(g^2+g\log_2g)$ 。

关键词: 椭圆球面波函数; 频域调制; FFT/IFFT框架; 频域抽样

中图分类号: TN911.3

文献标识码: A

文章编号: 1009-5896(2020)08-1888-08

DOI: 10.11999/JEIT190642

PSWFs Frequency Domain Modulation and Demodulation Method

LU Faping WANG Hongxing LIU Chuanhui KANG Jiafang YANG Dawei

(Naval Aviation University, Yantai 264001, China)

(Key Laboratory on Signal & Information Processing of Shandong Province, Yantai 264001, China)

Abstract: In view of the problem of high complexity for non-sinusoidal time domain modulation algorithms based on Prolate Spheroidal Wave Functions (PSWFs), spatial mapping is introduced to analyze the complete orthogonality and derive the minimum number of sampling points of PSWFs in the frequency domain. On this basis, the complex domain mapping and FFT/IFFT signal processing framework are introduced, and the PSWFs frequency domain modulation and demodulation method are proposed. The proposed method extends PSWFs signal processing from time domain to frequency domain, providing a possibility for exploring and studying the application of PSWFs signal to 5G, beyond 5G which use frequency domain signal processing. Theory and numerical analysis show that, compared with the time domain modulation, the proposed method can reduce the complexity of the algorithm from $O(2Qg^2)$ to $O(g^2+g\log_2g)$ without changing the system spectral efficiency, system error performance, modulation signal energy aggregation, and peak-to-average power ratio.

Key words: Prolate Spheroidal Wave Functions (PSWFs); Frequency domain modulation; FFT/IFFT frame; Frequency sampling

1 引言

随着通信场景日趋多元化, 如第5代移动通信

技术的增强移动宽带、低功耗大连接和低时延高可靠3大场景^[1,2], 不同信息载体间的信息交互水平不断提高, 不仅对信息交互“质”的要求越来越高, 对信息交互“量”也提出了更高的要求。如何充分利用现有频谱资源, 提高系统频带利用率、资源利用率^[3-5], 成为人们关注的焦点。其中, 信号波形作为通信系统的底层设计, 信号波形的高能量聚集度、时宽与带宽的灵活可控是实现高系统频带利用率、高时频资源利用率的基础^[6]。椭圆球面波函数(Prolate Spheroidal Wave Functions, PSWFs)作

收稿日期: 2019-08-26; 改回日期: 2020-04-29; 网络出版: 2020-05-13

*通信作者: 刘传辉 lchgyf@163.com

基金项目: 国家自然科学基金(61701518), 山东省“泰山学者”建设工程专项经费基金(ts20081130)

Foundation Items: The National Natural Science Foundation of China (61701518), The Special Foundation Project of Taishan Scholar of Shandong Province (ts20081130)

为一类非正弦函数集合, 由美国贝尔实验室Slepian与Pollak于1961年定义, 具有完备性正交、时域奇偶对称性、时间带宽积灵活可控以及最佳带限信号等优良特性^[7-9]。得益于PSWFs信号能够摆脱时间带宽积固定束缚的优良特性, 基于PSWFs的非正弦调制方法能够产生任意时间带宽积信号^[7,10], 最有望从根本上解决正弦波信号存在的时间带宽积固定的不足, 为5G、卫星通信等通信系统提供了一种超越传统正弦波框架下的波形设计理念与性能的新型调制方法。

目前, PSWFs非正弦调制均在时域进行信息加载与检测, 由于PSWFs为非周期信号, 信号频率连续、时变, 为保证PSWFs数值解精度, 信号时域抽样频率通常要高于Nyquist抽样频率^[11]。而调制方法算法复杂度与抽样点数密切相关, 故PSWFs时域调制存在算法复杂度高的不足。同时, 由Nyquist抽样定理可知, 信号频域的抽样点数应不低于时域抽样点数, 但得益于在频域PSWFs信号波形具有奇偶对称性, 在频域可利用1/2频率范围内的信号波形, 通过对称拓展的方式, 获取整个频率范围的信号波形, 能够有效降低参与信号处理的抽样点数, 这为低复杂度PSWFs调制方法研究提供了一个很好思路。此外, 得益于离散傅里叶变换的快速算法(Fast Fourier Transform, FFT)、离散傅里叶反变换的快速算法(Inverse FFT, IFFT)易于实现的优势, 已被应用于长期演进系统(Long Term Evolution, LTE)等通信系统^[12], 且5G系统仍然考虑采用该信号处理框架^[13], 这意味着在LTE, 5G等通信系统中, 调制方法必须采用该信号处理框架, 这严重限制了PSWFs信号在该系统中的应用。而由Fourier变换定义可知, 其作为时频空间映射的一条路径, 对于PSWFs信号同样适用, 这为探索研究PSWFs频域调制解调提供了可能。但由于PSWFs信号为频率连续信号^[7,11], 而FFT/IFFT要求信号频率离散、有限。因此, 如何用有限离散频率对PSWFs信号进行有效表示, 成为引入该信号处理框架, 探索研究PSWFs频域调制解调的关键。

在此背景下, 围绕“如何在频域对PSWFs信号进行有效表示?”以及“如何在频域进行信息加载与检测?”2个问题, 本文对PSWFs信号频域描述以及频域调制解调方法展开研究。首先, 结合PSWFs信号Fourier变换对称性, 分析PSWFs信号频域完备正交性、奇偶对称性, 推导信号频域有效表示所需最小抽样点数, 为研究PSWFs频域调制提供依据。其次, 引入复数域映射、FFT/IFFT信号处理框架, 提出PSWFs频域调制解调方法, 将

信号信息加载与检测由时域拓展到频域, 降低了基于PSWFs的非正弦调制系统复杂度。

2 PSWFs信号频域描述

本节从空间信息量的角度出发, 结合信号Fourier变换以及Fourier级数表示, 分析PSWFs信号频域完备正交性、奇偶对称性以及信号频域有效表示所需最小抽样点数。

2.1 信号频域完备正交性

由线性映射基本原理可知, 若前 g 阶基带PSWFs信号构成的线性空间 $\Phi(\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_{c-1})$, 为其张成线性空间 $\text{span}(\Phi)$ 的闭线性子空间, 即 $\forall x_i \in \text{span}(\Phi)$ 均可由空间 Φ 中元素线性表示; 同时, 若存在线性映射 $\Gamma: \Phi \rightarrow M, \text{span}(\Phi) \rightarrow P$, 且空间 Φ 与 M 同构, 则存在 $\dim(M) = \dim(\Phi) = g$, $\dim(\cdot)$ 为信号空间维度。

而对于Fourier变换, 其将信号由时域空间 Φ 映射到频域空间 M , 且由Fourier变换基本性质、帕塞瓦尔定理可知, PSWFs信号Fourier变换满足

$$\begin{aligned} F(\alpha\varphi_i(t) + \beta\varphi_j(t)) &= \alpha F(\varphi_i(t)) + \beta F(\varphi_j(t)) \\ &\langle F(\varphi_i(t)), F(\varphi_j(t)) \rangle = 2\pi \langle \varphi_i(t), \varphi_j(t) \rangle \\ &= \begin{cases} 2\pi\lambda_i, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases} \end{aligned} \quad (1)$$

式中, λ_i 为第 i 阶PSWFs信号积分方程特征值, α, β 不为0, $F(\cdot)$ 为信号Fourier变换, $\langle \cdot \rangle$ 为信号内积。

由式(1)可知, Fourier变换为1-1的线性同构映射、保内映射, 即空间 Φ 与 M 同构, 存在 $\dim(M) = \dim(\Phi) = c$ 。这表明对于时域具有完备正交性的PSWFs信号, 其Fourier变换后信号同样具有完备正交性, 即频域PSWFs信号具有完备正交性。

2.2 信号频域奇偶对称性

由Fourier变换定义可知, PSWFs信号Fourier变换后信号为复信号形式, 且由式(1)可知, PSWFs信号完备正交性指的是复信号形式。而若PSWFs信号Fourier变换后信号的实部、虚部呈现不同的奇偶对称性, 则PSWFs信号Fourier变换后信号实数形式同样具备完备正交性, 相应地在频域能够以实数形式进行信号处理, 相对于以复数形式进行信号处理, 将能够进一步降低信号处理算法复杂度。

假设第 i 与 j 阶PSWFs信号 $\varphi_i(t), \varphi_j(t)$ 分别为偶对称、奇对称信号, 其Fourier变换为

$$\left. \begin{aligned} \psi_i(j\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_i(t) \cos(\omega t) dt = \psi_i(-j\omega) \\ \psi_j(j\omega) &= i \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_j(t) \sin(\omega t) dt = -\psi_j(-j\omega) \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

由式(2)可知, 偶对称PSWFs信号Fourier变换后信号实部为偶对称, 奇对称PSWFs信号Fourier变换后信号虚部为奇对称, 即存在如下关系

$$\langle \text{Re}[\psi_i(j\omega)], \text{Im}[\psi_j(j\omega)] \rangle = 0 \quad (3)$$

这表明PSWFs信号Fourier变换后信号同样具有奇偶对称性, 且偶对称(奇对称)PSWFs信号Fourier变换后信号的实部(虚部), 在频域可以实数形式构成一组完备正交基, 即PSWFs信号在频域可以实数形式进行信号处理。

2.3 信号频域有效表示最小抽样点数

假设基带PSWFs信号时宽为 T (s)、带宽为 B (Hz)、时间带宽积为 $g = 2BT$ (Hz·s), 由PSWFs微分定义式可知, 第 i 阶PSWFs信号 $\varphi_i(t)$, $i \in [0, g-1]$ 可表示为

$$(T^2 - t^2) \frac{d^2 \varphi_i(t)}{dt^2} - 2t \frac{d\varphi_i(t)}{dt} + \left(\chi_i - \frac{g^2 t^2}{T^2} \right) \varphi_i(t) = 0 \quad (4)$$

式中, χ_i 为第 i 阶PSWFs信号微分方程特征值。由微分方程振动特性可知^[14], PSWFs信号对应自然振荡频率为

$$\omega_0 = \sqrt{(T^2 \chi_n - g^2 t^2) / (T^2 (T^2 - t^2))} \quad (5)$$

由式(5)可知, PSWFs信号频率连续, 且随时间不断变化。由Fourier级数定义可知, 第 i 阶PSWFs信号 $\varphi_i(t)$ 可表示为

$$\varphi_i(t) = \frac{a_{i,0}}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_{i,n} \cos(n\Omega t) + b_{i,n} \sin(n\Omega t)) \quad (6)$$

式中, $a_{i,0}/2 = \frac{1}{T} \int_T \varphi_i(t) dt$ 为直流分量, Ω 为基波频率, $a_{i,n}, b_{i,n}$ 为分量系数, 可表示为

$$\left. \begin{aligned} a_{i,n} &= \frac{2}{T} \int_T \varphi_i(t) \cos(n\Omega t) dt, \\ b_{i,n} &= \frac{2}{T} \int_T \varphi_i(t) \sin(n\Omega t) dt \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

由式(6)、式(7)可知, 当 $\Omega \rightarrow 0$ 时, 即离散频率趋于连续, 则式(6)趋于PSWFs信号理论值。但是受Fourier级数分析工具限制, $\Omega = 2\pi/T$, 即式(6)为利用离散频率对PSWFs信号进行表示。同时,

由于PSWFs具有最佳带限函数集的良好特性^[7-9], 信号能量能够最大限度地集中在频带 B (Hz)内, 相应地式(6)对应的谐波频率个数为

$$N_F = 2\pi B / \Omega + 1 = BT + 1 \quad (8)$$

同时, 由2.1节可知, PSWFs信号在时域、频域的空间维度为 g , 故利用 $g/2 + 1$ 个谐波频率对PSWFs信号进行表示, 不会造成信息丢失。因此, 从空间信息量角度, 对于非周期、频率连续的PSWFs信号, Fourier级数能够对其进行有效表示, 且所需谐波频率个数为 $BT + 1$, 即频域的抽样点数为 $2BT + 1$ 。此外, 由2.2节分析可知, 在频域PSWFs信号波形具有奇偶对称性, 故已知PSWFs信号 $1/2$ 频率范围(正半轴或负半轴)的波形, 则在频域可通过对称拓展的方式, 获取整个频率范围的PSWFs信号波形, 如图1所示。

通过上述分析可知, PSWFs信号在频域具有完备正交性、奇偶对称性, 可由有限频域抽样点进行有效表示, 且可以实数形式进行信号处理。同时, 对于时间带宽积为 $2BT$ 的PSWFs信号, 相对于时域最小抽样点数 $2BT$ ^[11], PSWFs信号频域有效表示所需最小抽样点数为 $BT + 1$, 能够有效降低参与信号处理的抽样点数。

3 PSWFs频域调制解调方法

结合PSWFs信号频域完备正交性及可由有限频率抽样点数表示的特点, 本节从频域信息加载、检测2个角度出发, 引入复数域映射、FFT/IFFT信号处理框架, 对PSWFs频域调制解调方法展开研究。

3.1 PSWFs频域调制方法

由线性运算性质以及Fourier逆变换定义可知, 对于单支路PSWFs信号 $\varphi_i(t)$, $i \in [0, g-1]$, 令其频域线性加权信号为 $\alpha\psi_i(j\omega) = F(\varphi_i(t))$, $\alpha \neq 0$, 则 $\alpha\psi_i(j\omega)$ 对应时域信号可表示为

$$s_i(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \alpha\psi_i(j\omega) e^{j\omega t} d\omega = \alpha\varphi_i(t) \quad (9)$$

对于多路并行PSWFs信号, 令其频域线性加权、叠加信号为 $S(j\omega) = \sum_{i=0}^{g-1} d_i \psi_i(j\omega)$, $d_i \neq 0$, 则 $S(j\omega)$ 对应时域信号可表示为

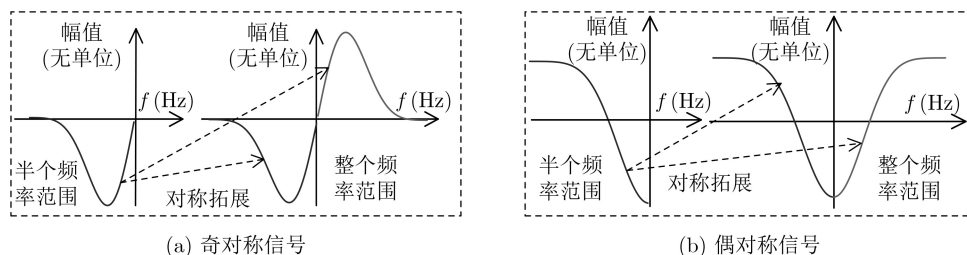


图1 信号频域拓展产生整个频率范围信号

$$s(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(j\omega) e^{j\omega t} d\omega = \sum_{i=0}^{g-1} d_i \varphi_i(t) \quad (10)$$

由式(9)、式(10)可知, 在频域对PSWFs信号进行线性运算与时域线性运算等价, 不改变PSWFs信号时频域能量聚集性、完备正交性等基础特性。

(1) 调制方法基本思路: 依据PSWFs信号频域线性运算与时域线性运算等价的特点, 引入复数域映射、IFFT信号框架, 本文提出了PSWFs频域调制方法, 其原理框图如图2所示。该方法采用复数域映射, 在频域进行信息加载, 并利用IFFT处理, 获取PSWFs调制信号时域波形。其中, PSWFs频域调制信号表达式为

$$\begin{aligned} S(j\omega) &= \sum_{i=0}^{g-k-1} D_i^I \psi_i(j\omega) + j \sum_{i=0}^{g-k-1} D_i^Q \psi_i(j\omega) \\ &= S^I(j\omega) + jS^Q(j\omega) \end{aligned} \quad (11)$$

式中, D_i^I, D_i^Q 分别为复数域映射后I/Q支路调制符号; $k \in [0, g-1]$, 为保证调制信号具有高能量聚集性, 需要对信号路数 $g-k, k \geq k_{\min}$ 进行控制。其中

$$k_{\min} \approx \lceil [\ln(1/\lambda_i - 1) \lg(2\sqrt{\pi g})] / \pi^2 \rceil \quad (12)$$

式中, λ_i 为第*i*阶PSWFs信号 $\varphi_i(t)$ 的能量聚集度。

(2) 调制信号产生物理流程: 假设输入信号为二进制串行符号序列, 复数域映射进制数为*M*, 具体流程如下:

(a) 依据PSWFs信号路数 $g-k$ 以及复数域映射进制数*M*, 对待传输符号进行分组, 每组符号序列*D*含有 $(g-k) \log_2 M$ 个符号; 并将串行符号序列*D*转换为并行符号序列 $D_i, i \in [0, g-k-1]$ 。

(b) 对符号序列 D_i 进行复数域映射, 获取I/Q支路调制符号 $D_i^I, D_i^Q, i \in [0, g-k-1]$ 。

(c) 在1/2频谱范围内, 将调制符号 $D_i^I, D_i^Q, i \in [0, g-k-1]$ 与其相对应的PSWFs信号相乘, 获取1/2频谱范围内的调制信号 $S_i^I(j\omega), S_i^Q(j\omega), \omega \in [-B, 0]$, 并对其进行对称拓展, 获取整个频谱范围内的调制信号 $S_i^I(j\omega), S_i^Q(j\omega), \omega \in [-B, B]$, 如图1所示。

(d) 分别将I/Q支路中的信号 $S_i^I(j\omega), S_i^Q(j\omega)$ 相加, 获取频域I/Q支路信号 $S^I(j\omega), S^Q(j\omega)$; 并将频域信号 $S^I(j\omega), S^Q(j\omega)$ 相加, 获取PSWFs频域调制信号 $S(j\omega) = S^I(j\omega) + jS^Q(j\omega)$ 。

(e) 利用IFFT获取 $S(j\omega)$ 对应时域波形 $s(t)$ 。

3.2 PSWFs频域调制信号检测解调方法

假设接收信号的Fourier变换为

$$R(j\omega) = S(j\omega) + N(j\omega) \quad (13)$$

式中, $N(j\omega) \sim N(0, N_0/2)$ 为加性高斯白噪声 $n(t)$ 对应频域噪声, N_0 为高斯白噪声功率谱密度。由PSWFs信号频域完备正交性可知, $R(j\omega)$ 与第*j*阶PSWFs信号Fourier变换 $\psi_{j-1}(j\omega)$ 互相关函数可表示为

$$\begin{aligned} E_j &= \langle S(j\omega) + N(j\omega), \psi_j(j\omega) \rangle \\ &= 2\pi(D_j^I + jD_j^Q) + \langle N(j\omega), \psi_j(j\omega) \rangle \end{aligned} \quad (14)$$

由式(14)可知, 在频域, 可利用PSWFs信号间正交性, 对不同阶PSWFs信号进行检测。此外, 由信号乘法运算性质可知, 具有相同奇偶对称性的PSWFs信号, 频域相乘后信号波形在信号中心频率两侧形状相同、符号相同。因此, 对于在频域具有相同奇偶对称性的PSWFs信号, 其在 $[-B, B]$ 内互相关值为 $[0, B]$ 内的2倍, 且若 $\psi_{0,m}(j\omega), \psi_{0,k}(j\omega), m \neq k$ 在 $[-B, B]$ 内相互正交, 则其 $[0, B]$ 内同样正交, 即在具有相同奇偶对称性的信号, 其在1/2频谱范围与整个频谱范围内的正交性是相同的。因此, 在接收端先分离奇对称、偶对称PSWFs信号, 再利用1/2频率范围内的信号波形获取不同支路PSWFs信号检测统计量。

检测解调方法基本思路为依据PSWFs信号频域完备正交性、奇偶对称性, 引入FFT信号框架, 本文提出了PSWFs信号频域相干检测方法, 其原理框图如图3所示。具体步骤如下:

(1) 在接收端, 利用FFT模块, 获取接收信号 $r(t)$ 对应频域信号 $R(j\omega)$ 。

(2) 将 $R(j\omega)$ 关于坐标原点对折, 获取 $R'(j\omega)$, 并将 $R(j\omega), R'(j\omega)$ 相减、相加, 分别提取频域奇对称、偶对称调制信号 $R_{OH}(j\omega), R_{EH}(j\omega)$ 。

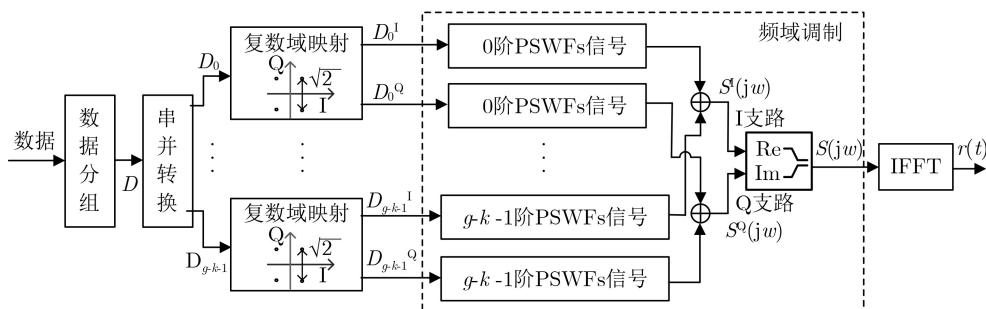


图2 PSWFs频域调制方法原理框图

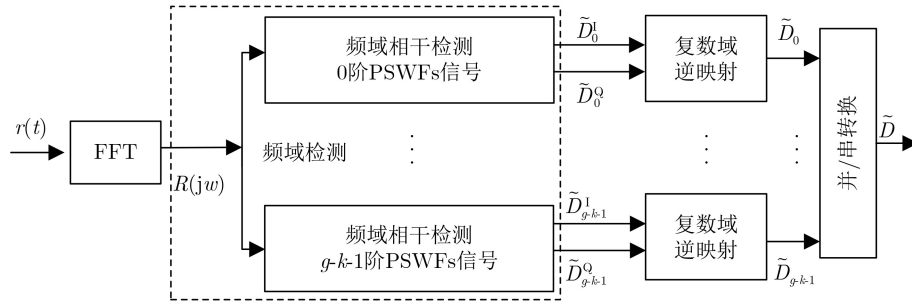


图3 PSWFs频域检测原理框图

(3) 利用步骤(b)获取的信号 $R_{OH}(j\omega)$, $R_{EH}(j\omega)$, 计算不同支路PSWFs信号复数域检测统计量 $\tilde{D}_i^l + j\tilde{D}_i^o$, $i \in [0, g - k - 1]$ 。

(4) 依据复数域逆映射规则, 对检测统计量进行逆映射, 并对符号序列 \tilde{D}_i 进行并串转换, 恢复发射端调制数据。

4 系统性能分析

本节从频域调制方法算法复杂度、系统误码性能、系统频带利用率(Spectral Efficiency, SE)、调制信号功率谱密度(Power Spectral Density, PSD)与峰均功率比(Peak to Average Power Ratio, PAPR)特性4个方面, 对比分析所提PSWFs频域调制与传统时域调制间性能差异。

4.1 频域调制方法算法复杂度

假设PSWFs信号时域抽样点数为 $N_T = Qg$, 其中 $Q \geq 1$ 为过采样倍数, 频域总抽样点数为 $N_F = g + 1$ 。

(1) 空间复杂度: 由PSWFs时域调制基本原理可知, 存储 $g - k$, $k \in [1, g - 1]$ 支路PSWFs信号时域波形, 需要存储空间为 $s_{\text{PSWFs-T}} = Qg(g - k)$, $Q \geq 1$ 。由PSWFs频域调制基本原理可知, 存储 $g - k$ 支路PSWFs频域信号, 需要存储空间为 $s_{\text{PSWFs-F}} = (g/2 + 1)(g - k)$ 。

(2) 时间复杂度(运算量): 考虑到乘法运算复杂度要远高于加法运算, PSWFs非正弦调制复杂度主要由其乘法复杂度决定, 故以乘法复杂度为度量标准, 对不同调制方法复杂度进行分析。由PSWFs时域调制基本原理可知, 其运算量为 $C_{\text{PSWFs-T}} = 2Qg(g - k)$; 由PSWFs频域调制基本原理可知, 其运算量为 $C_{\text{PSWF-F}} = 2(g/2 + 1)(g - k) + C_{\text{IFFT}} + C_{\text{FFT}}$, 其中, $C_{\text{FFT}} = C_{\text{IFFT}} = ((g + 1)\log_2(g + 1))/2$ 。为更加直观展开, 相对于PSWFs时域调制, PSWFs频域调制在降低系统复杂度方面的优势, 令

$$\eta = \frac{C_{\text{PSWFs-T}}}{C_{\text{PSWFs-F}}} = \frac{2Qg(g - k)}{2(g/2 + 1)(g - k) + (g + 1)\log_2(g + 1)} \quad (15)$$

由式(15)可知, 随着 Q, g 的增加、 k 的减小,

η 不断增加, 即PSWFs频域调制降低系统运算复杂度的程度不断提高。如当 $Q=1, g=16, k=1$ 时, $\eta=1.41$, 运算复杂度降低约41%; 当 $Q=1, g=16, k=2$ 时, $\eta=1.39$, 即降低约39%; 当 $Q=1, g=1024, k=2$ 时, $\eta=1.98$, 即降低约98%。

通过上述分析可知, PSWFs频域调制能够有效降低调制方法算法复杂度, 相对于PSWFs时域调制, 将空间复杂度由 $Qg(g - k)$ 降低为 $(g/2 + 1)(g - k)$, 将时间复杂度由 $O(2Qg^2)$ 降低为 $O(g^2 + g\log_2 g)$ 。

4.2 频域调制系统误码性能

频域PSWFs信号间正交性是确保频域相干检测性能的关键, 而由Heisenberg不确定性原理可知, 任何信号不可能在时域、频域内同时严格时限、带限; 且由PSWFs信号基础特性可知, 随着信号阶数增加, 信号能量聚集度不断降低^[7]。相应地利用 $g + 1$ 个频域抽样点对信号进行近似表示, 存在一定误差, 会导致PSWFs信号间自相关值减小、互相关值升高, 对信号间正交性造成一定影响。因此, 为保证PSWFs信号频域正交性, 需要对信号路数 $g - k$, $k \geq k_{\min}$ 进行控制。同时, 由式(12)可知, 确保PSWFs信号频域正交性的核心在于, 确保PSWFs信号频域能量聚集性。这与PSWFs时域调制为保证调制信号能量性, 信号路数需满足 $g - k$, $k \geq k_{\min}$ 是一致的, 这意味着PSWFs信号频域、时域调制选择的PSWFs信号路数相同。

由于复数域映射可拆分为2个相互正交的脉冲幅度调制方式(Pulse Amplitude Modulation, PAM), 且为便于对比分析所提方法调制符号间最小欧式距离与正交幅度调制(Quadrature Amplitude Modulation, QAM)间的差异, 假设复数域映射进制数为 $M = (2^m)^2$, 复数域映射拆分为2个进制数相同的PAM, PAM幅值为 $\{\pm\epsilon, \pm 3\epsilon, \dots, \pm(2m - 1)\epsilon\}$, ϵ 为大于0的常数, PAM调制符号平均能量 E_S 。相应地对于采用方形星座图的PSWFs频域调制(如图2所示), 其最小欧式可表示为

$$d_{\min}^2 = 12E_S / (4m^2 - 1) \quad (16)$$

由式(16)可知, 采用方形星座图的PSWFs频域调制最小欧式距离与方形星座图QAM调制相同, 故其系统误码性能与QAM调制相同, 即

$$P_e = 4 \frac{\sqrt{M-1}}{\sqrt{M}} Q \left(\sqrt{\frac{3 \log_2 M E_b}{M-1 N_0}} \right) - 4 \left(\frac{\sqrt{M-1}}{\sqrt{M}} \right)^2 \cdot Q^2 \left(\sqrt{\frac{3 \log_2 M E_b}{M-1 N_0}} \right) \quad (17)$$

式中, E_b, N_0 分别为每比特能量、高斯白噪声功率谱密度。同时, 由QAM与PAM调制基本原理可知, QAM星座图可分解为2个相位正交的PAM星座图。因此, PSWFs频域调制系统误码性能与采用PAM的PSWFs时域调制相同。

4.3 系统频带利用率

由于相同时间带宽积条件下, PSWFs时域、频域调制用于信息传输的PSWFs信号路数相同, 均为 $g-k, k \geq k_{\min}$ 。因此, PSWFs时域、频域调制的系统频带利用率相同。由PSWFs频域调制基本原理可知, 当复数域映射进制数为 M , PSWFs信号路数为 $g-k, k \geq k_{\min}$ 时, 其系统频带利用率为

$$SE_{\text{PSWF-F}} = [(g-k) \log_2 M] / g(\text{bit}/(\text{Hz} \cdot \text{s})) \quad (18)$$

由式(18)可知, PSWFs频域调制的系统频带利用率与时间带宽积 g 、数值 k 有关, 随着时间带宽积 g 增加、数值 k 减小, 系统频带利用率不断提高。

4.4 调制信号功率谱与峰均功率比

(1) 调制信号功率谱: 通过分析发现, 相对于PSWFs时域调制信号, 当整个频谱范围的抽样点数为 $g+1$ 时, PSWFs频域调制信号旁瓣升高、能量聚集性降低, PSWFs频域调制信号功率谱特性将低于时域调制信号。相应地提高频域调制信号功率谱特性的关键在于, 降低PSWFs频域调制信号旁瓣。为实现上述目标, 除控制选用PSWFs信号路数, 提高信号能量聚集性外, 适当增加频域抽样点是降低旁瓣的另外一条有效途径。因此, 在对PSWFs信号路数进行限制的基础上, 增加PSWFs信号频域抽样点数, 由原来抽样点数 $g+1$, 增加为 $g+1+2N_p$, 如图4所示。其中, N_p 具体数值需要根据实际PSWFs信号参数、应用场景需求, 通过数值计算确定。

(2) 调制信号峰均功率比: 由于PSWFs频域调制仍属于多载波调制, 故其同样存在调制信号PAPR较高现象。同时, 由于调制信号PAPR与并行信号路数有关, 而频域调制、增加频域抽样点数均未改变并行PSWFs信号路数。因此, 当并行PSWFs信号路数相同时, PSWFs频域调制信号PAPR与时域调制信号相同。

通过上述分析可知, 得益于PSWFs最佳带限函数集、频域完备正交性等优良特性, PSWFs频域调制同样具有高能量聚集性、高系统频带利用率等优良性能。相对于PSWFs时域调制, 通过适当增加频域抽样点数, 频域调制能够在不改变频带利用率、调制信号能量聚集性、峰均功率比以及系统误码特性的前提下, 有效降低系统算法复杂度。

5 仿真分析

本节借助计算机仿真, 从系统误码性能、调制信号功率谱、调制信号峰均功率比3个方面, 对比分析所提方法与PSWFs时域调制间性能差异。

5.1 仿真参数设置

通过数值计算发现, 当 $g = 36 \text{ Hz} \cdot \text{s}$, $k = 1$ 时, $N_p = 2$ 即可保证PSWFs频域调制信号与时域调制信号能量聚集度差距在 10^{-3} 量级, 相应地相关参数设置如表1所示。

5.2 仿真结果与分析

PSWFs频域调制系统误码性能如图5(a)所示。从仿真结果可知, PSWFs频域调制系统误码性能与PSWFs时域调制、理论值相同。这表明通过适当控制PSWFs信号路数, 能够有效保证PSWFs频域信号正交性, 保证PSWFs频域调制系统误码性能与时域调制相同, 与理论分析一致。

PSWFs频域调制信号功率谱特性如图5(b)所示。从仿真结果可知, 当频域总抽样点数为 $g+1$ 时($N_p=0$), 相对于PSWFs时域调制信号, PSWFs频域信号能量聚集性降低; 通过增加抽样点数($N_p=2$), PSWFs频域调制信号能量聚集性提升, 且带外第1旁瓣高度与PSWFs时域调制信号相同, 调制信号

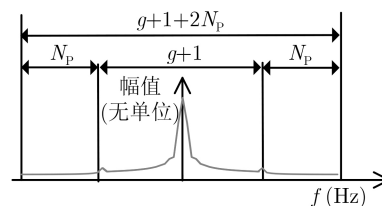


图4 信号频域抽样点选择

表1 仿真参数设置

参数	符号	数值
信号时间带宽积	g	36 Hz·s
信号时宽	T	66.7 μs
信号频带范围		[0 0.27] MHz
信号路数 $c-k$	k	1
时域抽样点个数	N_T	1024
频域总抽样点个数	N_F	$g+1$
增加抽样点数	N_p	2

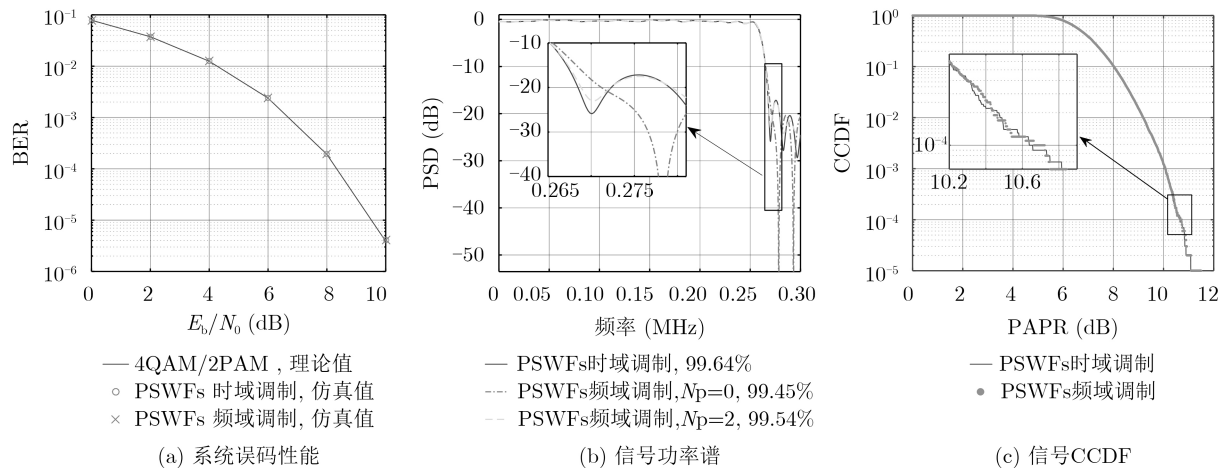


图5 系统误码性能、信号功率谱与CCDF

能量聚集度差距在 10^{-3} 量级。这表明通过增加频域抽样点数，能够有效降低PSWFs频域调制信号旁瓣，提高频域调制信号能量聚集性，与理论分析一致。

PSWFs频域调制信号互补累计分布函数(Complementary Cumulative Distribution Function, CCDF)如图5(c)所示。从仿真结果可知，PSWFs频域调制PAPR较高，且与时域调制信号一致。这表明PSWFs频域调制不改变PSWFs调制信号峰均功率比，但作为一种多载波调制，同样存在调制信号PAPR较高的不足，与理论分析一致。

6 结束语

围绕如何降低PSWFs时域调制方法算法复杂度，结合PSWFs信号Fourier变换对称性，分析了PSWFs信号频域完备正交性、奇偶对称性以及信号频域有效表示所需最小抽样点数。在此基础上，本文提出了PSWFs频域调制解调方法。并通过理论和数值分析论证了，所提方法在降低调制方法算法复杂度方面的可行性与有效性。

本文将FFT/IFFT信号处理框架引入PSWFs非正弦调制，开辟了PSWFs信号在频域进行信号处理的新思路，为下一步探索研究PSWFs信号在5G、超5G等采用频域信号处理通信系统中的应用提供了可能。

参考文献

- [1] NISSEL R, SCHWARZ S, and RUPP M. Filter bank multicarrier modulation schemes for future mobile communications[J]. *IEEE Journal on Selected Areas in Communications*, 2017, 35(8): 1768–1782. doi: [10.1109/JSAC.2017.2710022](https://doi.org/10.1109/JSAC.2017.2710022).
- [2] SOLDANI D, GUO Y J, BARANI B, et al. 5G for ultra-reliable low-latency communications[J]. *IEEE Network*, 2018, 32(2): 6–7. doi: [10.1109/MNET.2018.8329617](https://doi.org/10.1109/MNET.2018.8329617).
- [3] 黄容兰, 刘云, 李啟尚, 等. 基于非正交多址接入中继通信系统的功率优化[J]. *电子与信息学报*, 2019, 41(8): 1909–1915. doi: [10.11999/JEIT180842](https://doi.org/10.11999/JEIT180842).
- [4] HUANG Ronglan, LIU Yun, LI Qishang, et al. Power allocation optimization of cooperative relaying systems using non-orthogonal multiple access[J]. *Journal of Electronics & Information Technology*, 2019, 41(8): 1909–1915. doi: [10.11999/JEIT180842](https://doi.org/10.11999/JEIT180842).
- [5] 申滨, 吴和彪, 崔太平, 等. 基于最优索引广义正交匹配追踪的非正交多址系统多用户检测[J]. *电子与信息学报*, 2020, 42(3): 621–628. doi: [10.11999/JEIT190270](https://doi.org/10.11999/JEIT190270).
- [6] SHEN Bin, WU Hebiao, CUI Taiping, et al. An optimal number of indices aided gOMP algorithm for multi-user detection in NOMA system[J]. *Journal of Electronics & Information Technology*, 2020, 42(3): 621–628. doi: [10.11999/JEIT190270](https://doi.org/10.11999/JEIT190270).
- [7] 王汝言, 梁颖杰, 崔亚平. 车辆网络多平台卸载智能资源分配算法[J]. *电子与信息学报*, 2020, 42(1): 263–270. doi: [10.11999/JEIT190074](https://doi.org/10.11999/JEIT190074).
- [8] WANG Ruyan, LIANG Yingjie, and CUI Yaping. Intelligent resource allocation algorithm for multi-platform offloading in vehicular networks[J]. *Journal of Electronics & Information Technology*, 2020, 42(1): 263–270. doi: [10.11999/JEIT190074](https://doi.org/10.11999/JEIT190074).
- [9] IBRAHIM M, DEMIR A F, and ARSLAN H. Time-frequency warped waveforms[J]. *IEEE Communications Letters*, 2019, 23(1): 36–39. doi: [10.1109/LCOMM.2018.2882498](https://doi.org/10.1109/LCOMM.2018.2882498).
- [10] SLEPIAN D and POLLAK H O. Prolate spheroidal wave functions, Fourier analysis and uncertainty-I[J]. *The Bell System Technical Journal*, 1961, 20(1): 43–63. doi: [10.1002/j.1538-7305.1961.tb03976.x](https://doi.org/10.1002/j.1538-7305.1961.tb03976.x).
- [11] 王红星, 陆发平, 刘传辉, 等. 椭圆球面波信号间交叉项时频分布特性研究[J]. *电子与信息学报*, 2017, 39(6): 1319–1325. doi: [10.11999/JEIT170608](https://doi.org/10.11999/JEIT170608).

- [10.11999/JEIT160877](https://doi.org/10.11999/JEIT160877).
WANG Hongxing, LU Faping, LIU Chuanhui, *et al.* Study on time-frequency characteristics of cross-terms between prolate spheroidal wave function signal[J]. *Journal of Electronics & Information Technology*, 2017, 39(6): 1319–1325. doi: [10.11999/JEIT160877](https://doi.org/10.11999/JEIT160877).
- [9] OSIPOV A, ROKHLIN V, and XIAO Hong. Prolate Spheroidal Wave Functions of Order Zero: Mathematical Tools for Bandlimited Approximation[M]. Boston: Springer, 2013: 33–66. doi: [10.1007/978-1-4614-8259-8](https://doi.org/10.1007/978-1-4614-8259-8).
- [10] CHEN Zhaonan, WANG Hongxing, LIU Xiguo, *et al.* Maximal capacity nonorthogonal pulse shape modulation[J]. *Chinese Journal of Aeronautics*, 2015, 28(6): 1699–1708. doi: [10.1016/j.cja.2015.09.008](https://doi.org/10.1016/j.cja.2015.09.008).
- [11] SLEPIAN D. Prolate spheroidal wave functions, Fourier analysis, and uncertainty-V: The discrete case[J]. *The Bell System Technical Journal*, 1978, 57(5): 1371–1430. doi: [10.1002/j.1538-7305.1978.tb02104.x](https://doi.org/10.1002/j.1538-7305.1978.tb02104.x).
- [12] SELINIS I, KATSAROS K, ALLAYIOTI M, *et al.* The race to 5G era; LTE and Wi-Fi[J]. *IEEE Access*, 2018, 6: 56598–56636. doi: [10.1109/ACCESS.2018.2867729](https://doi.org/10.1109/ACCESS.2018.2867729).
- [13] HAMMOODI A, AUDAH L, and TAHER M A. Green coexistence for 5G waveform candidates: A review[J]. *IEEE Access*, 2019, 7: 10103–10126. doi: [10.1109/ACCESS.2019.2891312](https://doi.org/10.1109/ACCESS.2019.2891312).
- [14] HARMUTH H F. Frequency-sharing and spread-spectrum transmission with large relative bandwidth[J]. *IEEE Transactions on Electromagnetic Compatibility*, 1978, EMC-20(1): 232–239. doi: [10.1109/TEMC.1978.303653](https://doi.org/10.1109/TEMC.1978.303653).
- 陆发平: 男, 1991年生, 博士生, 研究方向为现代通信系统、非正弦波通信。
王红星: 男, 1962年生, 教授, 研究方向为现代通信系统、非正弦波通信、无线光通信。
刘传辉: 男, 1984年生, 讲师, 研究方向为现代通信新技术、非正弦波通信。
康家方: 男, 1987年生, 讲师, 研究方向为现代通信新技术、扩频通信、非正弦波通信。
杨大伟: 男, 1988年生, 博士生, 研究方向为现代通信新技术、非正弦波通信。

责任编辑: 余蓉