

基于谱分解的降阶求根 MUSIC 算法

闫锋刚^① 刘秋晨^① 邵多^② 王军^{*①} 王坤^③ 金铭^①

^①(哈尔滨工业大学(威海) 威海 264209)

^②(西安电子科技大学 西安 710071)

^③(中国人民解放军 63891 部队 洛阳 471023)

摘要: 求根多重信号分类(Root-MUSIC)算法以多项式求根代替谱峰搜索,降低了波达方向(DOA)估计的计算量,但当阵元数较大时,其计算量依然很大。为进一步降低计算量,该文提出一种降阶 Root-MUSIC(RD-Root-MUSIC)算法。该算法基于谱分解将 Root-MUSIC 多项式的阶次降低一半,再根据矩阵特征多项式与求根多项式的关系构造友阵,采用 Arnoldi 迭代计算得到友阵的 L 个大特征值(L 为信号数)并估计 DOA。仿真结果表明, RD-Root-MUSIC 估计精度与 Root-MUSIC 相近,但其在大阵元下具有比 Root-MUSIC 更低的计算量。

关键词: 波达方向估计; 求根多重信号分类算法; 谱分解; Arnoldi 迭代; 降阶 Root-MUSIC

中图分类号: TN911.7

文献标识码: A

文章编号: 1009-5896(2017)10-2421-07

DOI: 10.11999/JEIT170024

Reduced-dimension Root-MUSIC Algorithm Based on Spectral Factorization

YAN Fenggang^① LIU Qiuchen^① SHAO Duo^② WANG Jun^① WANG Kun^③ JIN Ming^①

^①(Harbin Institute of Technology at Weihai, Weihai 264209, China)

^②(Xidian University, Xi'an 710071, China)

^③(63891 Unit of Army, PLA, Luoyang 471023, China)

Abstract: The Root Multiple Signal Classification (Root-MUSIC) algorithm uses polynomial rooting instead of spectral search to reduce the computational complexity of Direction-Of-Arrival (DOA) estimation. However, when large numbers of sensors are exploited, this algorithm is still time-consuming. To further reduce the complexity, a novel Reduced-Dimension Root-MUSIC (RD-Root-MUSIC) algorithm based on spectral factorization is proposed, in which the dimension of polynomial involved in the rooting step is efficiently reduced to half. A companion matrix whose eigenvalues correspond to the roots of the reduced-dimension polynomial is further constructed, and the Arnoldi iteration is finally used to calculate only the L largest eigenvalues containing DOA information, where L is the number of signals. Simulation results show that RD-Root-MUSIC has a similar performance with much lower complexity as compared to Root-MUSIC.

Key words: Direction-Of-Arrival (DOA) estimation; Root Multiple Signal Classification (Root-MUSIC) algorithm; Spectral factorization; Arnoldi iteration; Reduced-Dimension Root-MUSIC(RD-Root-MUSIC)

1 引言

信号波达方向(Direction-Of-Arrival, DOA)估

计是阵列信号处理中的一个重要组成部分,在通信^[1]、雷达^[2]、天文^[3]、地震^[4]、声呐^[5]等领域有着广泛应用。多重信号分类(MUSIC)^[6-10]是 DOA 估计最重要的算法之一,该算法对阵列接收数据协方差矩阵进行特征分解(EVD),得到相互正交的信号子空间和噪声子空间,以针状空间谱搜索实现高精度 DOA 估计。随着信噪比(SNR)的提高,信号子空间与噪声子空间接近无限正交,因此 MUSIC 理论上具备对无限靠近目标的超分辨能力。然而,由于 MUSIC 算法包含繁杂的谱峰搜索过程,计算量异常庞大^[11]。

为了减少计算量,学者们提出了一系列改进算法,如求根 MUSIC(Root-MUSIC)、酉变换求根

收稿日期: 2017-01-09; 改回日期: 2017-05-22; 网络出版: 2017-06-27

*通信作者: 王军 hitwangjun@126.com

基金项目: 国家自然科学基金(61501142), 中国博士后科学基金(2015M571414), 威海市科技攻关和哈尔滨工业大学(威海)学科建设引导基金(WH20160107), 中央高校基本科研业务费专项资金(HIT.NSRIF.201725)

Foundation Items: The National Natural Science Foundation of China (61501142), China Postdoctoral Science Foundation (2015M571414), Science and Technology Program of Weihai and Project Supported by Discipline Construction Guiding Foundation in Harbin Institute of Technology (Weihai) (WH20160107), The Fundamental Research Funds for the Central Universities (HIT.NSRIF.201725)

MUSIC(Unitary Root-MUSIC, U-Root-MUSIC)^[12]、快速求根 MUSIC(Fast Root-MUSIC)^[13]、降维 MUSIC(Reduced-Dimension MUSIC, RD-MUSIC)^[14]等。其中,求根 MUSIC 以多项式求根代替谱峰搜索,由根的相位确定 DOA,这种求解角度的方法相比于 MUSIC 更直接、计算量更小^[15],且具有更好的性能;U-Root-MUSIC 算法虽然减少了计算量但其在低信噪比和小快拍数下性能较差;Fast Root-MUSIC 算法和降维 MUSIC 算法虽具有快速特性却牺牲了一定的估计精度。

通常,对于阵元数为 M 的均匀线性阵列(Uniform Linear Array, ULA),求根 MUSIC 需对阶次高达 $2(M-1)$ 的多项式求根。当 M 较大时,求根 MUSIC 的计算量实际上依然很大。文献[11]提出了一种线性搜索求根 MUSIC(Line-search Root-MUSIC)算法,这种算法在本质上接近 MUSIC 算法,并未大幅度的降低计算量;文献[13]提出了一种快速求根 MUSIC 算法,该算法对噪声子空间进行分割,实现了多项式阶次的降低,然而这种算法虽然减少了计算量,但其估计性能却较求根 MUSIC 算法下降较为严重。

本文基于劳伦特多项式结构,提出了一种基于谱分解的降阶求根 MUSIC(Reduced-Dimension Root-MUSIC, RD-Root-MUSIC)算法。该算法首先运用谱分解将 Root-MUSIC 多项式的阶次降低一半。考虑到当 M 较大时,多项式求根的计算量仍然很大,且所求解的 $(M-1)$ 个根中仅有 $L, L < (M-1)$ 个根包含信号角度信息。为了进一步降低计算量,构造了一个相应友阵,并对友阵进行 Arnoldi 迭代,计算出所期望的 L 个含有 DOA 信息的大特征值并估计信号 DOA。计算机仿真结果证明了算法的有效性。

2 数据模型及相关算法

2.1 数据模型

考虑 L 个波长为 λ 的远场窄带信号入射到阵元数为 M 的半波长均匀线阵,各阵元之间相互独立。设入射信号 DOA 为 $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_L$, 快拍数为 N , 则阵元接收信号可表示为

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{A}(\theta)\mathbf{s}(t) + \mathbf{n}(t) \quad (1)$$

其中, $\mathbf{x}(t)$ 是 $M \times 1$ 维快拍数据矢量, $\mathbf{s}(t)$ 是 $L \times 1$ 维信号矢量, $\mathbf{n}(t)$ 是 $M \times 1$ 维高斯白噪声数据矢量, $\mathbf{A}(\theta)$ 是 $M \times L$ 维导向矢量矩阵, 且

$$\mathbf{A}(\theta) = [\mathbf{a}(\theta_1) \quad \mathbf{a}(\theta_2) \quad \dots \quad \mathbf{a}(\theta_L)] \quad (2)$$

式中导向矢量 $\mathbf{a}(\theta_i)$ 定义为

$$\mathbf{a}(\theta_i) = \left[1 \quad \exp\left(j \frac{2\pi}{\lambda} d \sin \theta_i\right) \quad \dots \quad \exp\left(j \frac{2\pi}{\lambda} (M-1) d \sin \theta_i\right) \right]^T \quad (3)$$

阵列输出数据的协方差矩阵定义为

$$\begin{aligned} \mathbf{R} &= E\{\mathbf{x}(t)\mathbf{x}^H(t)\} = \mathbf{A}E\{\mathbf{s}(t)\mathbf{s}^H(t)\}\mathbf{A}^H + \sigma_n^2 \mathbf{I} \\ &= \mathbf{A}\mathbf{R}_s\mathbf{A}^H + \sigma_n^2 \mathbf{I} \end{aligned} \quad (4)$$

其中, $\mathbf{R}_s$ 为信号协方差矩阵, σ_n^2 为噪声功率。

2.2 经典 MUSIC 算法

对阵列协方差矩阵 $\mathbf{R}$ 进行如下所示 EVD^[16]:

$$\mathbf{R} = \sum_{i=1}^L \lambda_i \mathbf{e}_i \mathbf{e}_i^H + \sum_{j=L+1}^M \lambda_j \mathbf{e}_j \mathbf{e}_j^H \quad (5)$$

其中, $\lambda_i, i=1, 2, \dots, L$ 为 L 个大特征值, $\lambda_j, j=L+1, L+2, \dots, M$ 为 $(M-L)$ 个小特征值, $\mathbf{e}_i$ 和 $\mathbf{e}_j$ 分别为 λ_i 和 λ_j 所对应的特征矢量。定义 $\lambda_i, i=1, 2, \dots, L$ 对应特征矢量张成的子空间为信号子空间 $\mathbf{S}$, $\lambda_j, j=L+1, L+2, \dots, M$ 对应特征矢量张成的子空间为噪声子空间 $\mathbf{G}$, 即

$$\mathbf{S} \triangleq [\mathbf{e}_1 \quad \mathbf{e}_2 \quad \dots \quad \mathbf{e}_L], \quad \mathbf{G} \triangleq [\mathbf{e}_{L+1} \quad \mathbf{e}_{L+2} \quad \dots \quad \mathbf{e}_M] \quad (6)$$

则有 $\text{span}(\mathbf{S}) \perp \text{span}(\mathbf{G})$ 。由于导向矢量矩阵和信号子空间满足 $\text{span}(\mathbf{A}) = \text{span}(\mathbf{S})$, 因此, 有

$$\mathbf{a}^H(\theta)\mathbf{G} = 0 \quad (7)$$

经典 MUSIC 算法正是基于式(7)提出的。在实际应用中, 可用 N 快拍阵列观测数据对式(4)所示的理想协方差矩阵作如式(8)的估计:

$$\hat{\mathbf{R}} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \mathbf{x}_i(t) \mathbf{x}_i^H(t) \quad (8)$$

因此, 阵列协方差矩阵 EVD 实际表示为

$$\hat{\mathbf{R}} = \hat{\mathbf{S}}\hat{\mathbf{\Lambda}}_s\hat{\mathbf{S}}^H + \hat{\mathbf{G}}\hat{\mathbf{\Lambda}}_G\hat{\mathbf{G}}^H \quad (9)$$

依据式(7), 构造式(10)所示的 MUSIC 空间谱函数:

$$f_{\text{MUSIC}}(\theta) = \frac{1}{\|\mathbf{a}^H(\theta)\mathbf{G}\|^2} \quad (10)$$

通过在 $[-\pi/2, \pi/2]$ 内遍历搜索, 使式(10)达到极大值的 θ 即为信号 DOA。

2.3 求根 MUSIC 算法

MUSIC 算法包含空间遍历谱峰搜索, 其计算量异常庞大。在 ULA 结构下, 求根 MUSIC 算法以多项式求根代替谱峰搜索, 有效降低了计算量。定义如式(11)所示的多项式:

$$f(z) = \mathbf{p}^H(z)\mathbf{G}\mathbf{G}^H\mathbf{p}(z) \quad (11)$$

其中, $\mathbf{p}(z) = [1 \quad z \quad \dots \quad z^{M-1}]^T$, $z = \exp(jw)$, $w = 2\pi d \sin \theta / \lambda$ 。对 $f(z)$ 求根即可求得信号 DOA。

考虑到 $f(z)$ 包含 z^* 项, 对式(11)做如式(12)等价

修改：

$$f_1(z) = \mathbf{p}^T (z^{-1}) \mathbf{G} \mathbf{G}^H \mathbf{p}(z) \quad (12)$$

由式(12)可知, $f_1(z)$ 为 $2(M-1)$ 阶多项式, 其存在 $(M-1)$ 对关于单位圆互为共轭的根, 这 $(M-1)$ 对根中有 L 对根分布在单位圆上。在实际应用中, 由于各种误差的影响, 得到 L 对接近单位圆的根后, 可按式(13)计算得到 DOA。

$$\theta_i = \arcsin\left(\frac{1}{2\pi d} \arg\{z_i\}\right), \quad i = 1, 2, \dots, L \quad (13)$$

3 基于谱分解的降阶求根 MUSIC 算法

3.1 谱分解

由式(12)可知: $f_1(z)$ 为 $2(M-1)$ 阶多项式, 其存在 $(M-1)$ 对关于单位圆互为共轭关系的根, 只要求得这 $(M-1)$ 对根中的某 $(M-1)$ 个独立根, 即可由共轭关系获得其余 $(M-1)$ 个独立根。因此, Root-MUSIC 算法存在一定的计算冗余, 这为 Root-MUSIC 多项式的降阶提供了可能。

设 $f_1(z)$ 中 z^i 和 z^{-i} 的系数分别为 b_i 和 b_{-i} , 即

$$f_1(z) = \sum_{-(M-1)}^{M-1} b_i z^i \quad (14)$$

由矩阵 $\mathbf{G} \mathbf{G}^H$ 的埃尔米特性质易知: b_i 和 b_{-i} 满足共轭关系, 即

$$b_i = b_{-i}^* \quad (15)$$

可知, $f_1(z)$ 是一个劳伦特结构多项式。由 $f_1(z) = \|\mathbf{p}^H(z) \mathbf{G}\|^2 \geq 0$ 知 $f_1(z)$ 非负定。根据文献[17]中引理 1, $f_1(z)$ 可分解为

$$f_1(z) = r_p f_p(z) f_p^*(1/z^*) \quad (16)$$

$f_1(z)$ 拥有成对关于单位圆互为共轭关系的复根, 如果 z_0 是 $f_1(z)$ 的一个非零根, 则 z_0^* 也是多项式的一个非零根, 两个根关于单位圆呈共轭对称。即 $f_1(z)$ 拥有 $(M-1)$ 个位于单位圆内或单位圆上的根 $\{z_i\}$, 有 $(M-1)$ 个相对应的根 $\{z_i^*\}$ 位于单位圆外或单位圆上。这也就意味着只需计算单位圆内或单位圆上的根 $\{z_i\}$ 就可以得到感兴趣的全部数据, 即只需计算 $f_p(z)$ 的根。基于此, 本文提出了一种基于谱分解的降阶求根 MUSIC 算法。其中, 谱分解算法步骤如下:

步骤 1 构造一个 $(M \times 2)$ 维矩阵 $\mathbf{B}_0$, $\mathbf{B}_0$ 中元素为式(14)中 $f_1(z)$ 的系数, 形式如下:

$$\mathbf{B}_0 = \begin{bmatrix} b_0 & b_{-1} & \dots & b_{-(M-2)} & b_{-(M-1)} \\ b_{-1} & b_{-2} & \dots & b_{-(M-1)} & 0 \end{bmatrix}^T \quad (17)$$

式中, b_0 为多项式 $f_1(z)$ 的常数项, b_i 为 z^i 系数。

步骤 2 重复下面步骤直至 $\|\dot{\mathbf{b}}_{1,k} - \dot{\mathbf{b}}_{1,k-1}\|$ 收敛,

其中 $\dot{\mathbf{b}}_{1,k}$, $\dot{\mathbf{b}}_{1,k-1}$ 分别为矩阵 $\mathbf{B}_k$, $\mathbf{B}_{k-1}$ 的第 1 列。

(1) $\mathbf{B}_k = \mathbf{B}_{k-1} \mathbf{U}_k$, 式中 $\mathbf{U}_k$ 为 (2×2) 矩阵。

$$\mathbf{U}_k = \frac{1}{\sqrt{1-|\gamma|^2}} \begin{bmatrix} 1 & -\gamma \\ -\gamma^* & 1 \end{bmatrix} \quad (18)$$

其中, $\gamma = [\mathbf{B}_{k-1}]_{1,2} / [\mathbf{B}_{k-1}]_{1,1}$, 即 γ 为矩阵 $\mathbf{B}_{k-1}$ 第 1 行两个元素之比。

(2) 令步骤(1)中计算所得矩阵 $\mathbf{B}_k$ 的第 1 列保持不动, 第 2 列上移一个元素。

(3) 设置门限, 检测 $\|\dot{\mathbf{b}}_{1,k} - \dot{\mathbf{b}}_{1,k-1}\|$ 是否收敛。若 $\|\dot{\mathbf{b}}_{1,k} - \dot{\mathbf{b}}_{1,k-1}\| < \text{th}$, 则进行后续步骤, 否则返回步骤(1)直至 $\|\dot{\mathbf{b}}_{1,k} - \dot{\mathbf{b}}_{1,k-1}\|$ 收敛。

至此迭代求得 $(M-1)$ 阶多项式 $f_p(z) = p_0 + p_{-1}z^{-1} + \dots + p_{-(M-2)}z^{-(M-2)} + p_{-(M-1)}z^{-(M-1)}$, 它的系数对应于矩阵 $\mathbf{B}_k$ 第 1 列元素 $\dot{\mathbf{b}}_{1,k}$ 。

步骤 3 对多项式 $f_p(z)$ 进行求根运算, 即可求得 $(M-1)$ 个位于单位圆内或单位圆上的根。

在谱分解算法中, 门限越高精度越低, 计算量越小; 反之, 门限越低精度越高, 计算量则越大。

对接近单位圆的 L 个根, 运用式(13)即可求得信号的 DOA。由于含有 DOA 信息的只有 L 个接近单位圆的根, 因而没必要要求解出多项式所有的根。下面介绍如何进一步减少计算量。

3.2 友阵构造

文献[18]中给出友阵定义, 形式如式(19):

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & -c_0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & -c_1 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & -c_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & -c_{n-1} \end{bmatrix} \quad (19)$$

友阵 $\mathbf{C}$ 的特征多项式为

$$\det(z\mathbf{I} - \mathbf{C}) = c_0 + c_1 z + \dots + c_{n-1} z^{n-1} + z^n \quad (20)$$

由矩阵 $\mathbf{C}$ 的特征多项式可以看出其形式接近于谱分解后的多项式 $f_p(z) = p_0 + p_{-1}z^{-1} + \dots + p_{-(M-1)}z^{-(M-1)}$ 。因此, 我们对 $f_p(z)$ 做式(21)所述的变换:

$$\begin{aligned} z^{M-1} f_p(z) &= z^{M-1} (p_0 + p_{-1}z^{-1} + \dots + p_{-(M-2)}z^{-(M-2)} \\ &\quad + p_{-(M-1)}z^{-(M-1)}) \\ &= p_0 z^{M-1} + p_{-1} z^{M-2} + \dots + p_{-(M-2)} z + p_{-(M-1)} \\ &= p_0 \left(\frac{p_{-(M-1)}}{p_0} + \frac{p_{-(M-2)}}{p_0} z + \dots \right. \\ &\quad \left. + \frac{p_{-1}}{p_0} z^{M-2} + z^{M-1} \right) \end{aligned} \quad (21)$$

并根据式(21)构造相应友阵:

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & -\frac{p_{-(M-1)}}{p_0} \\ 1 & 0 & \dots & 0 & -\frac{p_{-(M-2)}}{p_0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & -\frac{p_{-1}}{p_0} \end{bmatrix}_{(M-1) \times (M-1)} \quad (22)$$

有

$$\det(z\mathbf{I} - \mathbf{C}) = \frac{p_{-(M-1)}}{p_0} + \frac{p_{-(M-2)}}{p_0}z + \dots + \frac{p_{-1}}{p_0}z^{M-2} + z^{M-1} \quad (23)$$

通过友阵构造,即可把多项式 $f_p(z)$ 的求根问题转化为求友阵 $\mathbf{C}$ 的特征值问题。由于 $f_p(z)$ 所有根中携带 DOA 信息的为 L 个接近单位圆的根,对应于友阵 $\mathbf{C}$ 的 L 个大特征值,而后可应用 Arnoldi 迭代来求解得到。

3.3 友阵部分特征值求解

当矩阵规模较大时,计算其所有的特征值需要较大的计算量。实际应用中,通常只对其中某些特征值感兴趣。因此通过迭代算法计算部分特征值,可以减少不必要的计算量。

引理(Rayleigh-Ritz 算法^[19]): 设 $\mathbf{K}_m$ 是 $\mathbf{R}^{n \times n}$ 的一个 m 维子空间, $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_m$ 为它的一组标准正交基,令 $\mathbf{V}_m = [\mathbf{v}_1 \ \mathbf{v}_2 \ \dots \ \mathbf{v}_m]$,记 $\mathbf{T}_m = \mathbf{V}_m^T \mathbf{A} \mathbf{V}_m$ 。若 $(\tilde{\lambda}, \mathbf{y})$ 是 $\mathbf{T}_m$ 的一个特征对,即 $\mathbf{T}_m \mathbf{y} = \tilde{\lambda} \mathbf{y}$ 且 $\|\mathbf{y}\|_2 = 1$,那么称 $\tilde{\lambda}$ 是矩阵 $\mathbf{A}$ 的一个 Ritz 值, $\tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{V}_m \mathbf{y}$ 是矩阵 $\mathbf{A}$ 的一个 Ritz 向量。

上述引理表明:矩阵 $\mathbf{A}$ 的特征值可通过矩阵 $\mathbf{T}_m$ 的特征值(又称 $\mathbf{A}$ 的 Ritz 值)近似求解。当 $\mathbf{A}$ 为对称矩阵时,可用 Lanczos 迭代计算得到 $\mathbf{K}_m$ 的基和 $\mathbf{T}_m = \mathbf{V}_m^T \mathbf{A} \mathbf{V}_m$;当 $\mathbf{A}$ 为非对称矩阵时,可用 Arnoldi 迭代或非对称 Lanczos 迭代计算得到 $\mathbf{K}_m$ 的基和 $\mathbf{T}_m = \mathbf{V}_m^T \mathbf{A} \mathbf{V}_m$ ^[18]。因根据谱分解后的求根多项式所构造的友阵 $\mathbf{C}$ 是非对称复矩阵,本文对友阵 $\mathbf{C}$ 进行 Arnoldi 迭代来计算其特征值,其基本思想是逐列地产生酉矩阵 $\mathbf{Q}$,推导过程如下:

设酉矩阵 $\mathbf{Q} = [\mathbf{q}_1 \ \mathbf{q}_2 \ \dots \ \mathbf{q}_{M-1}]$,通过计算 $\mathbf{Q}^H \mathbf{C} \mathbf{Q} = \mathbf{H}$,矩阵 $\mathbf{C}$ 约化为上 Hessenberg 矩阵 $\mathbf{H}$ 。由 $\mathbf{Q}^H \mathbf{C} \mathbf{Q} = \mathbf{H}$, $\mathbf{Q}^H \mathbf{Q} = \mathbf{I}$,且 $\mathbf{Q}$ 为方阵存在逆矩阵,有 $\mathbf{C} \mathbf{Q} = \mathbf{Q} \mathbf{H}$,对比等式两边的列有

$$\mathbf{C} \mathbf{q}_k = \sum_{i=1}^{k+1} h_{ik} \mathbf{q}_i, \quad 1 \leq k < M-1 \quad (24)$$

对式(24)进行变换可得

$$h_{k+1,k} \mathbf{q}_{k+1} = \mathbf{C} \mathbf{q}_k - \sum_{i=1}^k h_{ik} \mathbf{q}_i \equiv \mathbf{r}_k \quad (25)$$

其中, $h_{ik} = \mathbf{q}_i^H \mathbf{C} \mathbf{q}_k$, $i = 1, 2, \dots, k$ 。若 $\mathbf{r}_k \neq 0$,那么,

$$\mathbf{q}_{k+1} = \mathbf{r}_k / h_{k+1,k} \quad (26)$$

其中, $h_{k+1,k} = \|\mathbf{r}_k\|_2$ 。

由上述公式,可得 Arnoldi 的迭代步骤:

$$\left. \begin{array}{l} \mathbf{r}_0 = \mathbf{q}_1 \\ h_{10} = 1 \\ k = 0 \\ \text{while}(h_{k+1,k} \neq 0) \\ \quad \mathbf{q}_{k+1} = \mathbf{r}_k / h_{k+1,k} \\ \quad k = k + 1 \\ \quad \mathbf{r}_k = \mathbf{C} \mathbf{q}_k \\ \quad \text{for } i = 1 : k \\ \quad \quad h_{ik} = \mathbf{q}_i^H \mathbf{C} \mathbf{q}_k \\ \quad \quad \mathbf{r}_k = \mathbf{r}_k - h_{ik} \mathbf{q}_i \\ \quad \text{end} \\ \quad h_{k+1,k} = \|\mathbf{r}_k\|_2 \\ \text{end} \end{array} \right\} \quad (27)$$

假设给定的初始向量 $\mathbf{q}_1$ 为 2 范数单位向量, $\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \dots, \mathbf{q}_k$ 称为 Arnoldi 向量。迭代 $k, k < M-1$ 步以后,算法的运行情况可用第 k 步 Arnoldi 分解来概括:

$$\mathbf{C} \mathbf{Q}_k = \mathbf{Q}_k \mathbf{H}_k + \mathbf{r}_k \mathbf{e}_k^T \quad (28)$$

其中, $\mathbf{Q}_k = [\mathbf{q}_1 \ \mathbf{q}_2 \ \dots \ \mathbf{q}_k]$, $\mathbf{e}_k = \mathbf{I}_k(:, k)$ 。文献[18]表明,在 $\|\mathbf{C} \mathbf{Q}_k - \mathbf{Q}_k \mathbf{H}_k\|_2$ 近似为零的情况下, $\mathbf{H}_k$ 的大特征值可近似代替 $\mathbf{C}$ 的大特征值。Arnoldi 迭代长度 k 的选取依赖于友阵维度、正交性丢失等因素的影响,原则上 k 要大于等于信源个数小于友阵维度,即 $L \leq k < M-1$,此时,仅需对 $k \times k$ 维矩阵 $\mathbf{H}_k$ 进行特征分解。当 k 远小于友阵维度时,算法具有大量减少计算量的实际意义。通过迭代,可求出一组标准列正交向量 $\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \dots, \mathbf{q}_k$ 和矩阵 $\mathbf{H}_k$ 。通过计算矩阵 $\mathbf{H}_k$ 的大特征值,即可得到友阵 $\mathbf{C}$ 的大特征值。对求得特征值运用式(13)便能计算得到信号 DOA。

Arnoldi 算法中,初始向量 $\mathbf{q}_1$ 的选取对于特征值的迭代收敛速度影响较大。为得到较为精确的结果,在使用 Arnoldi 进行迭代时,需要仔细选取初始向量并反复执行上述 Arnoldi 迭代步骤。一个简单的选取每次重新开始迭代的初始向量的方法是,从上一次 Arnoldi 迭代出的 $\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \dots, \mathbf{q}_k$ 中选取一个向量 $\mathbf{q}'$,以 $\mathbf{q}'$ 为初始向量进行下一次的 Arnoldi 迭代。关于其他初始向量的选取方法,可参考文献[18]中 9.4.2 节。

由上述分析可见：运用 Arnoldi 迭代计算 L 个大特征值可依据下述步骤实施：

步骤 1 依据式(27)反复迭代计算得到标准列正交矩阵 $\mathbf{Q}_k = [\mathbf{q}_1 \ \mathbf{q}_2 \ \cdots \ \mathbf{q}_k]$ ；

步骤 2 计算矩阵 $\mathbf{H}_k = \mathbf{Q}_k^H \mathbf{C} \mathbf{Q}_k$ 的特征值，即友阵 $\mathbf{C}$ 的 Ritz 值；

步骤 3 从计算出的特征值 $\tilde{\lambda}_1, \tilde{\lambda}_2, \dots, \tilde{\lambda}_k$ 中挑选出 L 个大特征值，这里 $L \leq k$ ；

至此，通过 Arnoldi 迭代计算得到友阵 $\mathbf{C}$ 的 L 个含有 DOA 信息的大特征值，根据式(13)可进而求得对应信号 DOA。

3.4 算法步骤总结

综上所述，本文所提出的 RD-Root-MUSIC 算法步骤可总结如下：

步骤 1 依据式(8)估计阵列协方差矩阵 $\mathbf{R}$ 并依据式(9)对其进行特征分解获得噪声和信号子空间；

步骤 2 依据式(14)构造求根多项式 $f_1(z)$ 并由谱分解算法求解降阶求根多项式 $f_p(z)$ ；

步骤 3 根据 $f_p(z)$ 构造相应的友阵 $\mathbf{C}$ 并运用 Arnoldi 迭代求解友阵 $\mathbf{C}$ 的 L 个大特征值；

步骤 4 根据友阵 $\mathbf{C}$ 的 L 个大特征值求解出信号 DOA。

4 仿真实验

为了验证本文所提出算法的有效性，用 MATLAB 进行计算及仿真实验。实验采用 8 阵元 ULA 阵列结构(即 $M = 8$)，阵元间距为半波长。信号个数为 3(即 $L = 3$)，信号 DOA 为 $-30^\circ, 20^\circ, 45^\circ$ 。蒙特卡洛试验次数为 300 次， $N=300$ ， $\text{SNR}=15$ dB，各算法对于信号 DOA 估计的均方误差(RMSE)定义为

$$\text{RMSE} = \sqrt{\frac{1}{300} \sum_{i=1}^{300} (\hat{\theta}_i - \theta)^2} \quad (29)$$

其中， $\hat{\theta}_i$ 为 θ 的第 i 次估计值。

图 1 和图 2 分别给出了 Root-MUSIC 及 RD-

Root-MUSIC 所构造多项式根的分布情况。由图 1 和图 2 可见：Root-MUSIC 算法中的多项式 $f_1(z)$ 包含了 $M-1=7$ 对根，且每对根关于单位圆镜像对称分布，本文所提出的 RD-Root-MUSIC 算法所构造的多项式 $f_p(z)$ 仅包含 $M-1=7$ 个位于单位圆内或单位圆上的根。因此，RD-Root-MUSIC 算法根的个数相比于 Root-MUSIC 算法降低了一半。

图 3、图 4 给出了谱分解门限、Arnoldi 迭代长度和 Arnoldi 迭代次数 3 个参数对 RD-Root-MUSIC 算法性能的影响。由图可见谱分解门限越低算法精度越高；当 Arnoldi 迭代长度较短时需要较多的重复迭代次数使得算法具有较好的性能，当 Arnoldi 迭代长度较长时，少量迭代即使得算法拥有较优的性能。但谱分解门限越低、Arnoldi 迭代长度越长、Arnoldi 迭代次数越多计算量越大。由图 3 可见，谱分解门限取 0.01 时算法均方误差较小。若门限取值过大，会因谱分解过程误差较大对之后的 Arnoldi 迭代造成影响。由图 4 可见，当 Arnoldi 迭代长度 $k=3$ ，Arnoldi 迭代次数为 20 时，算法性能迅速变好，再次增加迭代长度和迭代次数性能变化不大。因此在后续的仿真实验中取谱分解门限为 0.01，Arnoldi 迭代长度为 3，Arnoldi 迭代次数为 20 次。

图 5 给出了 Root-MUSIC 与仅经过谱分解的 RD-Root-MUSIC 的估计精度对比图。其中，谱分解步骤中门限为 0.01。由图可见，两者具有相似的性能。但经过谱分解的 RD-Root-MUSIC 仅需对 $(M-1)$ 阶多项式 $f_p(z)$ 进行求解，相比于 Root-MUSIC 求根多项式阶次降低一半。

由图 6 可见，Root-MUSIC 算法与本文所提出的 RD-Root-MUSIC 算法估计性能相近。其中，谱分解算法门限为 0.01；Arnoldi 迭代长度为 3，Arnoldi 迭代次数为 20 次。由于 Root-MUSIC 算法需对阶次高达 $2(M-1)$ 的多项式求根，而 RD-Root-MUSIC 所求多项式阶次仅为 k ，因此，本文算法在保持估计精度不下降的同时，有效降低了算法的计算量。

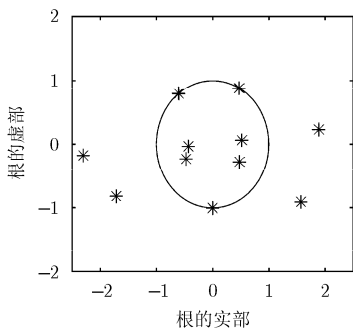


图 1 Root-MUSIC 算法根的分布

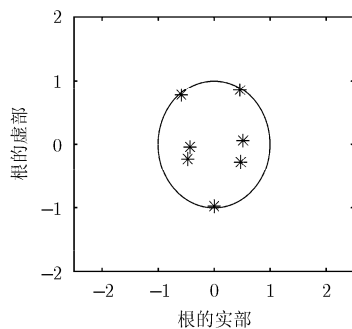


图 2 RD-Root-MUSIC 算法根的分布

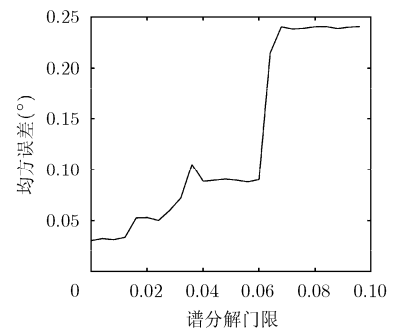


图 3 谱分解门限对算法性能的影响

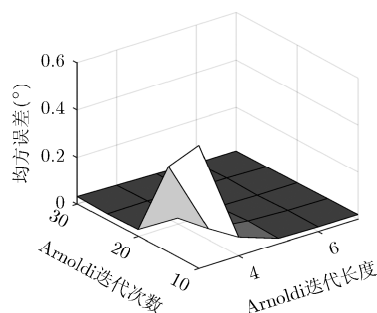


图 4 Arnoldi 迭代长度和迭代次数对算法性能的影响

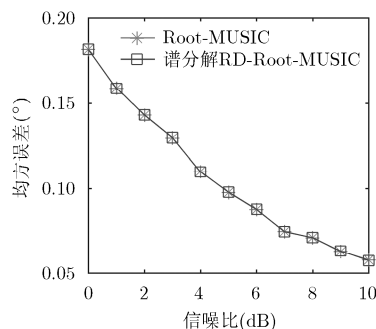


图 5 不同信噪比下的算法性能分析 1

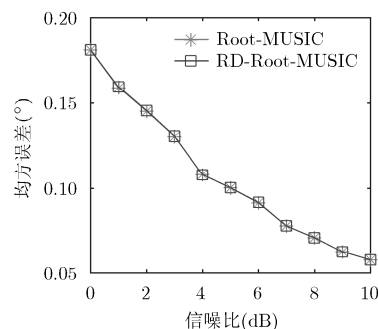


图 6 不同信噪比下的算法性能分析 2

表 1 给出 Root-MUSIC, 仅经过谱分解的 RD-Root-MUSIC, RD-Root-MUSIC 不同阵元数目下 300 次蒙特卡洛试验总时间的对比。其中, 谱分解算法门限为 0.01; Arnoldi 迭代长度为 3, Arnoldi 迭代次数为 20 次。由表 1 可知, 阵元数较大时, 仅经过谱分解把 $2(M-1)$ 阶多项式降低为 $(M-1)$ 阶便能很好地降低计算量, 当阵元数很大时, RD-Root-MUSIC 充分展现出其优势。

表 1 时间对比表(s)

阵元数	Root-MUSIC	谱分解的 RD-Root-MUSIC	RD-Root-MUSIC
8	0.0613	0.5492	0.7568
16	0.2191	0.7005	0.9066
24	0.7377	0.8790	1.1770
32	1.2570	0.9740	1.2345
40	3.2270	1.2489	1.3299
48	4.3221	1.4700	1.5171
56	5.7380	1.7293	1.6961
64	7.5172	2.1505	1.9503
128	56.8214	9.1914	5.2872

5 结论

本文基于谱分解的思想, 提出一种降阶求根 MUSIC 算法, 即 RD-Root-MUSIC 算法。该算法把 $2(M-1)$ 阶求根多项式减少到 $(M-1)$ 阶, 有效降低了多项式求根的复杂度。为进一步降低高阶多项式求解的计算量, 构造友阵并应用 Arnoldi 迭代计算 $L, L < (M-1)$ 个感兴趣的根。仿真实验表明, RD-Root-MUSIC 算法具有与 Root-MUSIC 算法相似的估计性能, 且该算法在大阵元下相比于 Root-MUSIC 大幅降低了计算量, 更能适应实时计算要求。

参考文献

- [1] LIU Lutao and LIU Huan. Joint estimation of DOA and TDOA of multiple reflections in mobile communications[J]. *IEEE Access*, 2016, 4: 3815–3823. doi: 10.1109/ACCESS.2016.2584088.
- [2] WANG Xianpeng, WANG Luyun, LI Xiumei, *et al.* An efficient sparse representation algorithm for DOA estimation in MIMO radar system[C]. 2016 IEEE 17th International Workshop on Signal Processing Advances in Wireless Communications (SPAWC), Edinburgh, UK, 2016: 1–4.
- [3] LEVANDA R and LESHEM A. Adaptive selective sidelobe canceller beamformer with applications to interference mitigation in radio astronomy[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2013, 61(20): 5063–5074. doi: 10.1109/TSP.2013.2274960.
- [4] GUO Yan, GUO Li, and LI Ning. Method on fast DOA estimation of moving nodes in ad-hoc network[C]. IEEE International Symposium on Communications and Information Technology, Beijing, China, 2005: 1169–1172.
- [5] SAUCAN A A, CHONAVEL T, SINTES C, *et al.* CPHD-DOA tracking of multiple extended sonar targets in impulsive environments[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2016, 64(5): 1147–1160. doi: 10.1109/TSP.2015.2504349.
- [6] SCHMIDT R O. Multiple emitter location and signal parameter estimation[J]. *IEEE Transactions on Antennas & Propagation*, 1986, 34(3): 276–280. doi: 10.1109/TAP.1986.1143830.
- [7] YAN Fenggang, JIN Ming, LIU Shuai, *et al.* Real-valued MUSIC for efficient direction estimation with arbitrary array geometries[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2014, 62(6): 1548–1560. doi: 10.1109/TSP.2014.2298384.
- [8] BASIKOLO T and ARAI H. APRD-MUSIC algorithm DOA estimation for reactance based uniform circular array[J]. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, 2016, 64(10): 4415–4422. doi: 10.1109/TAP.2016.2593738.
- [9] 闫锋刚, 张薇, 金铭. 求根 MUSIC 初值设置和更新算法[J]. 哈

- 尔滨工业大学学报, 2015, 47(3): 88–92. doi: 10.11918/j.issn.0367-6234.2015.03.015.
- YAN Fenggang, ZHANG Wei, and JIN Ming. A new method for setting and updating the initiation of root-MUSIC[J]. *Journal of Harbin Institute of Technology*, 2015, 47(3): 88–92. doi: 10.11918/j.issn.0367-6234.2015.03.015.
- [10] YAN Fenggang, SHEN Yi, and JIN Ming. Fast DOA estimation based on a split subspace decomposition on the array covariance matrix[J]. *Signal Processing*, 2015, 115(C): 1–8. doi: 10.1016/j.sigpro.2015.03.008.
- [11] RUBSAMEN M and GERSHMAN A B. Direction-of-arrival estimation for nonuniform sensor arrays: From manifold separation to Fourier domain MUSIC methods[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2009, 57(2): 588–599. doi: 10.1109/TSP.2008.2008560.
- [12] QIAN Cheng, HUANG Lei, and SO H C. Improved unitary root-MUSIC for DOA estimation based on pseudo-noise resampling[J]. *IEEE Signal Processing Letters*, 2014, 21(2): 140–144. doi: 10.1109/LSP.2013.2294676.
- [13] REN Q S and WILLIS A J. Fast root MUSIC algorithm[J]. *Electronics Letters*, 1997, 33(6): 450–451. doi: 10.1049/el:19970272.
- [14] ZHANG Xiaofei, XU Lingyun, XU Lei, *et al.* Direction Of Departure (DOD) and Direction of Arrival (DOA) estimation in MIMO radar with reduced dimension MUSIC[J]. *IEEE Communications Letters*, 2010, 14(12): 1161–1163. doi: 10.1109/lcomm.2010.1026.101581.
- [15] 王永良, 陈辉, 彭应宁, 等. 空间谱估计理论与算法[M]. 北京: 清华大学出版社, 2004: 132–136.
- WANG Yongliang, CHEN Hui, PENG Yingning, *et al.* Theory and Algorithm of Spatial Spectrum Estimation[M]. Peking, Tsinghua University Press, 2004: 132–136.
- [16] 闫锋刚, 齐晓辉, 刘帅, 等. 基于子空间旋转变换的低复杂度波达角估计算法[J]. 电子与信息学报, 2016, 38(3): 629–634. doi: 10.11999/JEIT150539.
- YAN Fenggang, QI Xiaohui, LIU Shuai, *et al.* Low-complexity DOA estimation via subspace rotation technique [J]. *Journal of Electronics & Information Technology*, 2016, 38(3): 629–634. doi: 10.11999/JEIT150539.
- [17] SAYED A H and KAILATH T. A survey of spectral factorization methods[J]. *Numerical Linear Algebra with Applications*, 2001, 8(8): 467–496. doi: 10.1002/nla.250.
- [18] GOLUB G H and LOAN V C F. Matrix computations[J]. *Mathematical Gazette*, 1996, 47(5 Series II): 392–396.
- [19] 张贤达, 等. 矩阵分析与应用[M]. 北京: 清华大学出版社, 2004: 518–519.
- ZHANG Xianda, *et al.* Matrix Analysis and Applications[M]. Peking: Tsinghua University Press, 2004: 518–519.
- 闫锋刚: 男, 1982 年生, 博士, 副教授, 主要从事阵列信号处理以及统计性能分析等研究.
- 刘秋晨: 女, 1992 年生, 硕士生, 从事阵列信号处理等研究.
- 邵 多: 男, 1985 年生, 博士生, 从事阵列信号处理等研究.
- 王 军: 男, 1976 年生, 博士, 副教授, 主要从事压缩感知雷达信号处理、极化信号处理等研究.
- 王 坤: 男, 1983 年生, 硕士, 工程师, 主要从事雷达以及雷达对抗等研究.
- 金 铭: 男, 1968 年生, 博士, 教授, 博士生导师, 主要从事雷达对抗、空间谱估计、极化阵列信号处理等研究.