

多种群纵横双向学习和信息互换的鲸鱼优化算法

刘小龙*

(华南理工大学工商管理学院 广州 510641)

摘要: 鲸鱼优化算法(WOA)相较于传统的群体智能优化算法, 具有较好的寻优能力和鲁棒性, 但仍存在全局寻优能力有限、局部极值难以跳出等问题。针对上述不平衡问题, 该文提出一种多种群纵横双向学习的种群划分思路, 子群相互独立, 子群内个体受到来自横向和纵向两个方向的最优值影响, 从而规避局部最优, 在探索和开发之间取得均衡。对纵向种群的所有个体, 该文提出一种线性下降概率的个体置换策略, 促进不同子群的信息流动, 加快算法收敛。基于不同个体的历史进化信息, 来进行策略算子选择, 从而区别于现有基于随机数的策略算子选择方法。利用基准函数进行跨文献对比, 数值结果表明该文算法具有很好的优越性和稳定性, 在大多数问题上都获得了全局极值, 具有较好的问题适用性。

关键词: 鲸鱼优化算法; 多种群纵横双向学习; 子群个体互换; 历史信息

中图分类号: TP301.6

文献标识码: A

文章编号: 1009-5896(2021)11-3247-10

DOI: [10.11999/JEIT201080](https://doi.org/10.11999/JEIT201080)

Whale Optimization Algorithm for Multi-group with Information Exchange and Vertical and Horizontal Bidirectional Learning

LIU Xiaolong

(School of Business Administration, South China University of Technology, Guangzhou 510641, China)

Abstract: Compared with traditional swarm intelligence optimization algorithms, the Whale Optimization Algorithm(WOA) has better optimization capabilities and robustness, but there are still problems such as limited global optimization capabilities and difficulty in jumping out of local extremes. Considering the above-mentioned imbalance problem, a multi-group population division idea with vertical and horizontal bidirectional learning is proposed. The subgroups are independent of each other, and the individuals in the subgroups are affected by the optimal values from both the horizontal and vertical directions, thereby avoiding the local optimal and getting the balance between exploration and development. For all individuals in the vertical population, an individual replacement strategy with linearly decreasing probability is proposed to promote the information flow of different subgroups and accelerate the algorithm convergence. The selection of strategy operators is based on the historical evolution information of different individuals, which is different from the existing strategy operator selection methods based on random numbers. The benchmark function is used for cross-document comparison. The numerical results show that the algorithm in this thesis has good superiority and stability. It obtains global extreme on most problems and has good problem applicability.

Key words: Whale Optimization Algorithm(WOA); Multi-Group with vertical and horizontal bidirectional learning; Subgroup individual exchange; Historical information

1 引言

20世纪40年代以来, 源于生物系统灵感的群体智能优化方法得到了极大应用。群体智能方法是一

种基于群体迭代的随机搜索优化方法, 具有潜在的并行性、分布式搜索等特点, 可以有效规避部分局部极值, 全局搜索能力较强, 成为近些年来的研究热点。群体智能优化的仿生对象主要来自自然, 像早期的蚁群、鸟群、蜂群等, 近期不同学者针对鱼群、狼群、蚁狮、鲸鱼、蚱蜢和樽海鞘等生物行为特性, 提出了许多新的优化方法。数值实验表明这些方法具有一定的问题适用性, 但同时也存在着收敛精度不高、局部规避能力不强、大规模问题优化

收稿日期: 2020-12-25; 改回日期: 2021-03-12; 网络出版: 2021-03-24

*通信作者: 刘小龙 xlliu@scut.edu.cn

基金项目: 中央高校基本科研业务费(XYZD201911)

Foundation Item: The Fundamental Research Funds for the Central University (XYZD201911)

能力一般等相关问题^[1]。鲸鱼优化算法(Whale Optimization Algorithm, WOA)是澳大利亚学者Mirjalili等人^[2]于2016年提出的,该算法主要是通过模拟座头鲸的觅食行为方式来实现对优化问题的求解,已经在样本特征选择^[3]、流水车间调度^[4]、太阳光伏模型参数提取^[5]、工程设计优化^[6]、电力最优潮流设计^[7]、云制造资源配置^[8]、配电网综合优化^[9]、无人机航路规划^[10]等问题上得到了广泛的应用。现有研究表明,传统WOA仍然存在早熟收敛、收敛速度慢以及无法找到全局最优解等问题^[11-20]。

现有针对WOA方法的改进主要从初始化策略、非线性参数、惯性权重和局部跳出策略等几个方面展开。如Sun等人^[11]提出基于余弦函数的非线性动态控制参数更新策略,来平衡算法的探索 and 开发能力,采用莱昂飞行策略(Lévy-flight)来跳出局部最优。Chen等人^[6]针对高维函数优化问题,将莱昂飞行策略和混沌局部搜索策略组成两种新的策略,引导群体在全局探索能力与邻域开发能力之间进行协调。龙文等人^[12]提出了一种非线性收敛因子的改进鲸鱼优化算法,在搜索空间中利用对立学习策略进行初始化,高维函数测试展现了该改进方法的有效性。褚鼎立等人^[13]提出了自适应权重和模拟退火的鲸鱼优化算法,通过改进自适应权重来调整算法收敛速度,借助模拟退火增强鲸鱼优化算法的寻优精度。王坚浩等人^[14]提出了基于混沌搜索策略的鲸鱼优化算法,通过采用混沌反向学习策略来产生初始种群,设计收敛因子和惯性权重的非线性混沌扰动策略,来平衡全局探索和局部开发能力。肖子雅等人^[15]利用精英反向学习策略,来提高种群的多样性和质量,有效地提升了算法的收敛速度,同时引入黄金分割数来优化WOA的寻优方式,进一步协调WOA的全局与局部开发能力平衡。吴泽忠等人^[16]针对鲸鱼优化算法后期的种群多样性丢失问题,提出了螺旋更新位置改进模型,并结合对立学习策略、随机参数调整、正态变异操作等方法优化鲸鱼算法的性能。张达敏等人^[17]利用Circle混沌序列随机产生初始种群,提出一种逐维小孔成像的反向学习策略,来增加寻优多样性,并提出一种融合贝塔分布和逆不完全 Γ 函数的自适应权重方法,改进了鲸鱼算法的寻优精度和收敛速度。刘景森等人^[18]提出了一种基于分段式随机惯性权重和最优反馈机制的改进算法,通过在随机游走策略中引入基于当前全局最优解的反馈机制,在收缩包围策略和螺旋泡泡网捕食策略中引入分段式随机惯性权重,以提高算法的寻优精度和跳出局部极值的能力。黄清宝等人^[19]提出了一种基于余弦控制因子和多项式变异

的改进方法,通过对余弦参数的惯性权值和最佳鲸鱼位置引入的多项式变异,来改进优化性能。黄飞等人^[20]结合反向学习策略进行种群初始化,用正态变异算子来选择种群,配合非线性收敛因子和正弦螺旋更新策略,从而形成了一种阈值控制的改进方法。

在上述改进策略中,混沌映射和反向初始化是为了增加种群的多样性,非线性参数或者参数自适应是希望通过提高早期解的质量来加快收敛速度和提高寻优精度,最优邻域学习和最优解变异是希望提高寻优精度和增强跳出局部极值的能力。同时,针对局部极值问题,莱昂飞行和混沌变异是一种随机步长策略,是通过最优个体的随机维度扰动,来增加跳出局部陷阱的能力。而考虑收敛因子和惯性权重,是为了增强算法对前期解的继承,平衡算法的全局探索与局部开发,并借此加快收敛速度。

可见,上述改进思路已从参数改进、局部扰动、最优点学习、邻域学习等方面进行了探讨,在基本WOA算法的局部规避和全局极值精度方面取得了一定成果,但都是针对单一种群,部分方法如局部扰动、最优点学习、邻域学习等只是增加了计算精度,并不保证求得全局最优解。本文提出一种多种群纵横双向学习和信息互换的研究思路,可以在不增加计算复杂度的情况下,有效求得大部分函数的全局最优解。

基准函数的数值实验结果表明本文算法相对基本WOA方法及其最新哈里斯鹰优化算法(Harris Hawks Optimization, HHO)等具有极大提升,可以获得绝大部分函数的全局极值。跨文献的比较研究表明,本文方法相对现有WOA及其改进方法具有较强的优势,在多数问题上的性能表现优越。

2 鲸鱼优化算法

鲸被认为是世界上最大的哺乳动物,成年鲸鱼可以长到30 m,重180 t。这种巨型哺乳动物有7种不同的主要物种,例如座头鲸,翅背鲸和蓝鲸等鲸鱼通常被视为掠食者。座头鲸是最大的古鲸之一,它们最喜欢的猎物是磷虾和小鱼群,座头鲸的觅食行为被称为泡泡网觅食方法^[21]。这种觅食行为包括两种行为方式:“向上螺旋”和“双循环”。在“向上螺旋”中,座头鲸可以向下俯冲约12 m,然后围绕猎物形成螺旋气泡并上游至水面。“双循环”包括3个不同的阶段:珊瑚环,垂尾和捕获环。针对座头鲸的觅食行为方式, Mirjalili等人^[2]从数学上构建了针对优化问题的鲸鱼优化模型,该模型模拟了座头鲸俯冲包围觅食、螺旋气泡觅食和随机寻找猎物等3种数学模型。

2.1 俯冲包围觅食(包围猎物)

算法模型假设座头鲸能够识别猎物的位置并将它们圈起来, 此时鲸鱼通过群体交流, 使整个种群向猎物位置移动, 从而获得食物。俯冲包围猎物觅食的数学模型为

$$X(t+1) = X^*(t) - \mathbf{A}D, \mathbf{A} = 2ar - a \quad (1)$$

$$D = |CX^*(t) - X(t)|, \mathbf{C} = 2r \quad (2)$$

式(1)和式(2)中, t 为当前迭代步数, $X^*(t)$ 为食物位置, $X(t)$ 为座头鲸位置。 \mathbf{A} 和 \mathbf{C} 为系数向量, 按式(1)和式(2)定义。其中, r 是[0,1]的随机数, a 随迭代从2线性递减到0。

2.2 泡泡网觅食(开发阶段)

螺旋更新位置是模拟座头鲸围绕猎物的螺旋状运动来实现的, 如式(3)所示。座头鲸的泡泡网觅食通过收缩包围机制和螺旋更新位置来实现。其中, 收缩包围机制通过减小式(3)中的 a 值来实现, 当 a 值从2降为1时, A 的波动范围也线性减小1/2。

$$X(t+1) = X^*(t) + De^{bl} \cos(2\pi l) \quad (3)$$

式(3)中, b 为定义螺旋形状的参数, l 为[-1,1]的随机数。

2.3 搜索猎物(探索阶段)

在无法发现猎物的阶段, 座头鲸通过对周边进行随机搜索, 来获取猎物的可能位置。这个阶段通过 \mathbf{A} 的绝对值来界定, 当 $|\mathbf{A}| > 1$ 时, 座头鲸群体会随机选择一个个体来执行俯冲包围觅食, 其搜索猎物的数学模型如式(4)所示

$$\left. \begin{aligned} X(t+1) &= X_{\text{rand}}(t) - \mathbf{A}D' \\ D' &= |CX_{\text{rand}}(t) - X(t)| \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

基于上述座头鲸的觅食模型, Mirjalili等人^[2]提出了鲸鱼优化算法。文献分析发现, 该算法通过参数 \mathbf{A} 来控制搜索猎物和包围觅食的次数。另外, 该算法执行一种双种群结构, 1/2种群执行泡泡网觅食, 1/2种群执行俯冲包围觅食。在俯冲包围中, 迭代前期(1/2时间)先围绕随机个体执行搜索猎物(探索阶段), 迭代后期围绕最优食物源执行包围觅食(开发阶段), 每一次迭代结束, 两个种群交换信息, 更新最佳食物源即猎物的位置。与粒子群算法(Particle Swarm Optimization, PSO)、差分算法(Differential Evolution algorithm, DE)、快速进化编程(Fast Evolutionary Programming, FEP)、引力搜索算法(Gravitational Search Algorithm, GSA)等4种经典群智能优化方法的对比实验表明, 该算法在单峰函数的Sphere和Schwefel 2.22上, 以及多峰函数Rastrigin上, 其寻优能力和鲁棒性最好。在其他的测试函数上, 大部分处于第2和第3的位置。

3 改进鲸鱼优化算法

现有文献改进的基于余弦函数的非线性动态控制参数更新、莱昂飞行跳出局部最优策略、搜索空间中利用对立学习策略进行种群多样化、利用自适应权重来调整算法收敛速度、借助模拟退火来增强寻优精度, 以及其他算法中的修改相关系数和采用高斯缩放、多项式学习等做法, 其本质上都是经典数学方法。本文尝试从多种群的视角, 基于纵横双向学习和横向信息互换的思路提出一种新策略。具体如下。

3.1 多种群纵横双向结构

在Mirjalili等人设计的鲸鱼优化算法逻辑框架中, 现有种群数目假设为 M , 按照随机概率 $P > 0.5$ 可以区分为两个随机性种群, 而且每次迭代, 这个种群的个体都会发生变化。一个种群按照泡泡网的方式觅食, 即个体迭代执行式(3), 式(3)中的所有个体围绕最优个体按照螺旋更新模式进行收缩包围。另一个种群依据系数向量 \mathbf{A} 的绝对值与1的判断, 采取搜索猎物或者包围觅食的方式, 即个体执行式(1)或式(4), 其中式(1)或式(4)的差别在于个体是围绕最优个体迭代还是围绕随机个体迭代, 按照多项式缩放的方式进行。

上述逻辑设置对于基准函数如Sphere, Schwefel2.22, Rastrigin等具有一定效果, 但对于大部分其他基准函数, 并不能获得全局最优。因此, 本文提出一种多种群纵横双向结构, 即种群 M 由 p 个子种群组成, 每个子群有 k 个个体, 具体如图1所示。

现有文献如随机种群线性差分方法等^[22], 都是将多个种群的个体按照权重进行加和, 也就是1次迭代。本文对于随机个体 M_{33} 来说, 它受到纵横双向的子群最优(假设为 M_{53} 和 M_{3p})的影响, 也就是根据式(3)按照图1进行双向两次迭代。即随机个体 M_{33} 首先纵向选定 M_{53} 按照式(3)迭代, 然后再横向选定 M_{3p} 按照式(3)迭代。第1次迭代并不进行适应度计算, 这一思路是考虑到在种群进化的初期, 随机个体与子群最优的最优值相差较大, 通过2次迭

M_{11}	M_{12}	M_{13}	M_{14}	M_{15}	M_{1p}
M_{21}	M_{22}	M_{23}	M_{24}	M_{25}	M_{2p}
M_{31}	M_{32}	M_{33}	M_{34}	M_{35}	M_{3p}
M_{41}	M_{42}	M_{43}	M_{44}	M_{45}	M_{4p}
M_{51}	M_{52}	M_{53}	M_{54}	M_{55}	M_{5p}
M_{k1}	M_{k2}	M_{k3}	M_{k4}	M_{k5}	M_{kp}

图1 改进鲸鱼优化算法的多种群纵横双向结构

代从两个方向促进个体进化。上述思路不考虑双向迭代后在部分时期的适应度变差的情况。

3.2 横向信息交流互换机制

本文基于多种群双向学习的方法,虽然个体可以从两个方向迭代学习,但是种群之间的信息交互较少。为了获取全局极值,有必要推动不同种群个体的信息互动。现有文献的信息交流都是随机种群划分、多种群加权迭代等方法,提出一种个体互换的信息交互机制,具体如图1所示。假设随机个体 M_{33} 所在子群为 M_3 群,该群的横向为 $M_{31} \sim M_{3p}$ 共 p 个个体,针对 p 个个体设定随机数选择组,假设选中组别为 $M_{1p} \sim M_{kp}$ 所在的 p 组,该组的最差适应度个体是 M_{kp} ,此时将 M_{33} 和 M_{kp} 互换,就完成了一次基于横向信息交流的个体互换机制。对于第 l 次迭代步来说,每次迭代中的个体置换概率 P_p 为 $(L-l)/L$ 。

这一置换概率的设置是保证纵横双向学习的子种群个体,在迭代前期具有较大的置换可能,在后期具有较小的置换可能。由上述机制可以看出,本文方法的信息交流是个体互换,而非对子群个体进行位置迁移,这样就保证了选定子群的多样性会随着其他子群最差个体的导入而增加;而被选中的最差子群也会因为相对较好个体的导入使得子群的整体应变能力可能相对变好。数值实验和收敛曲线表明,上述设置加快了算法的收敛,对于很多基准函数都很快获得了全局最优。

3.3 基于历史信息的策略算子选择

WOA算法任意的迭代中,随机概率 $P > 0.5$,则种群中的选定个体按照泡泡网方式觅食,否则按照 $|A| > 1$ 的比较来选定搜索猎物或者包围觅食方式。在此,相较于随机概率 P 与0.5的判断比较,本文提出一种贪婪机制的策略算子选择方法,即利用个体适应度值的历史变化来考虑算子策略。具体为各个子群的个体,在上次的迭代中,如果适应度值变好,则选择纵横双向的最优值个体,按照泡泡网觅食的方式进化迭代。如果上次的迭代过程,其个体适应度函数的值变差,则按照搜索或包围觅食的策略方式迭代。这一策略有效地利用了个体进化的历史信息。

式(1)中, A 按照均匀分布概率从 ± 2 收缩到0,即迭代 $l=0$,大于1的概率为50%;迭代 $l \geq L/2$,大于1的概率为0。因此,依据 A 的定义,从数值概率角度分析,泡泡网觅食方式是50%(全迭代时期)的可能,包围觅食方式是25%~50%(前 $L/2$ 迭代时期,后 $L/2$ 迭代期其概率为50%)和搜索猎物方式是25%~0%(前 $L/2$ 迭代时期,后 $L/2$ 迭代期其概率为0%)。

基于上述分析,本文将 A 定义为座头鲸的视域系数,以区分现有系数向量的概念。 $|A| > 1$ 表示视域较大,子群个体随机选择所有种群 $M(M_{11} \sim M_{kp})$ 中的个体,按照式(4)更新位置。 $|A| < 1$ 表示视域较近,子群个体纵横双向选择最优个体,按照式(1)进行包围觅食方式更新个体位置。

3.4 改进鲸鱼优化算法的实现流程

改进算法的实现流程描述如下:

步骤1 参数初始化。定义问题维度 D 、子种群数 p 、子群内个体数目 k ,最大迭代步数 L ;定义个体初始适应度 f 值为 inf ,视域参数为 A ,子群内的个体互换概率 P_p 。

步骤2 初始化群体位置,并计算适应度值,定义 p 个子群内的最优为子群猎物位置。

步骤3 从 M_{11} 到 M_{kp} 开始循环,进行个体历史适应度值的判断。

策略1 若个体适应度值改善,则当前子群内选定个体按式(3)进行纵横双向的泡泡网式觅食。

策略2 若个体适应度值变差且 $|A| > 1$,则当前子群内选定个体按式(4), $M_{11} \sim M_{kp}$ 中随机选定个体进行猎物搜索。

策略3 若个体适应度值变差且 $|A| \leq 1$,则当前子群内选定个体按式(1)进行纵横双向的包围觅食。

步骤4 子群信息互换。 $M_{11} \sim M_{kp}$ 开始循环,产生均匀分布随机数 rand ,如果 $\text{rand} > P_p$,则启动子群信息互换机制。如对于当前个体 M_{33} ,随机选中一个横向的个体如 M_{3p} ,对当前横向个体所在的子群 $M_{1p} \sim M_{kp}$ 中,找出其子群的最差适应度如 M_{kp} ,此时将 M_{33} 和 M_{kp} 的位置和适应度值互换,这样就完成了一次子群信息互换。

步骤5 更新各子群个体的适应度值和纵横双向子群的猎物位置,定义最佳猎物位置为全局最优。

步骤6 循环条件判断,满足则结束,输出结果。不满足则跳转步骤3。

3.5 改进算法的计算复杂度分析

基本WOA算法利用随机向量 A 和随机数判断,执行3种围捕策略;本文算法按照适应度值的改善情况和视域 A 的判断,也遵守原算法的3种狩猎行为,与基本WOA算法一样,针对种群 M 的总计算次数一样,也就是计算代价一致。但与原算法不同的是,本文算法需要存储每个个体的上次适应度值,以便于进行价值判断;其次,本文算法需要纵横双向进行算子迭代,相较于原算法的1次迭代,其计算时间稍多,但不增加适应度的计算次数。

上述设置和文献[13-16]中改进算法当中的模拟退火、混沌反向、精英反向和柯西变异等策略有根

本不同, 属于方程表达式的增加, 并不增加整体算法的计算复杂度, 因此计算时间增加极少。而文献[13-16]中的模拟退火、混沌反向、精英反向和柯西变异等, 会调用更多的适应度计算函数, 增加同一次迭代中的适应度计算次数, 故而产生了计算代价。如果种群数目为 M , 一次适应度调用的时间为 t , 那么 L 次迭代的调用总时间为 $M \times L \times t$ 。因此, 改进方法的计算复杂度与文献[2]相当, 调用总时间为 $M \times L \times t$ 。

4 数值实验

文献[8-20]对标准WOA算法提出了诸多的改进, 但不同算法的测试标准不一样, 为进行跨文献比较, 参考文献[2,13-16,23]的基准函数和指标选取情况, 本文选取30次测试的平均值、标准差、寻优成功率等指标来衡量算法性能, 利用上述文献的相关标准函数进行对比实验研究, 函数的表达式见文献[2]。

4.1 基准函数的特性分析

现有文献针对文献[2]的测试函数进行了对比研究, 但缺少对问题函数的具体讨论。本文基于文献[2]提供的理论知识(给定最优点坐标), 利用Matlab工具进行验证($D=30$), 发现函数 F_7, F_{10}, F_{12} 和 F_{13} 的最优值与现有文献提供的理论值不同(均为0), 分别是接近0的随机值、 $8.88178e-016$, $1.57054e-032$ 和 $1.34978e-032$, 而现有文献[23]等计算的 F_{12} 和 F_{13} 平均值却为0, 因此现有文献相关算法的计算过程存在些许问题。

文献[2]中, $F_1 \sim F_7$ 为单峰函数, $F_8 \sim F_{13}$ 为多峰函数。单峰函数中的 $F_1 \sim F_4$ 主要测试算法的寻优精度, 函数的局部极小点少, 大多数算法都能够获得较好的寻优精度, $F_5 \sim F_7$ 拥有较多的局部极值点, 许多算法不能跳出局部极值, 这3个函数是现有算法对比的主要参考。多峰函数 $F_8 \sim F_{13}$ 中的 $F_9 \sim F_{11}$ 主要测试算法的寻优精度, 函数的局部极小点少, 大多数算法都能够获得较好的寻优精度。但 F_8, F_{12} 和 F_{13} 拥有较多的局部极值点, 许多算法不能跳出局部极值, 这3个函数是相关算法对比的主要参考。

4.2 改进算法的参数分析

本文改进算法提出了多种群的逻辑框架, 框架中整体种群的数量由子群数 p 和子群内的个体数 k 决定。由于采用了一种多子群方法, 导致单一种群的数量相对较少, 进化较慢, 原WOA算法中的参数 A 和 C 对新框架存在一定的影响, 需要进一步进行分析。另外, 为了避免单一种群的信息孤岛现象, 基于种群间的个体互换概率也影响单个子群的多样性。最后, 本文针对视距 A 和置换概率 P_p 假设是线性下降, 但也可以是非线性下降, 如凸函数或者凹函数下降, 但影响相对较少, 故而本文不作进一步讨论。

考虑到原始WOA算法的种群数为30, 故而本文设置子群数为6, 子群内个体数目为5, 算法的最大评估次数即函数的调用次数与文献[2,13-16,23]相同取15000, 算法针对上述基准函数测试30次, 利用前述文献提及的均值、成功率等指标进行衡量。另外, 参数 A 由正负2线性下降至0, 参数 C 为 $[0,1]$ 随机数, 置换概率 P_p 为 $(L-l)/L$ 即由1线性下降至0。最后, 还需要考察纵横双向学习和子群内单向学习的区别。

在其他参数不变的情况下, 对参数 $C=\text{rand}$ (实验1)和 $C=1$ (实验2)进行参数实验。另外, 在上述初始 $P_p=1$ 的基础上, 对置换概率 P_p 进行参数实验, 设置 P_p 由0.7, 0.4和0.1下降至0, 分别记为实验3, 4, 5, 测试数据精度等级如表1所示。

由表1可知, $C=1$ 的整体精度优于 $C=\text{rand}$, 参照表1全局极值和文献[12]关于成功率的阈值设置, 算法参数 $C=1$ 的数值结果表明改进算法除了 F_8 以外全部获得了全局极值。而算法参数 $C=\text{rand}$ 的设置, 在函数 F_5, F_6, F_{12} 和 F_{13} 上的精度不高, 所以本文取参数 $C=1$ 。

研究发现, 如果 $P_p=0$, 所有测试函数均无法获得全局极值, 故而设置一定的置换概率是合适的, 结合表1实验数据, 本文认为初始的 P_p 值应该较大, 本文取初始 P_p 值为1。

同时, 视距 A 影响着算法的寻优精度, 比如基准函数 $F_1 \sim F_4$ 等, 因此本文在表1算法参数的基础

表 1 本文算法参数 C 和 P_p 的基准函数测试均值精度等级 ($D=30$)

实验	F_1	F_2	F_3	F_4	F_5	F_6	F_7	F_8	F_9	F_{10}	F_{11}	F_{12}	F_{13}
1	0	e-167	0	e-169	e-004	e-009	e-004	-12569	0	e-016	0	e-010	e-009
2	e-323	e-168	0	e-167	0	0	e-004	-12332	0	e-016	0	e-032	e-032
3	0	e-167	0	e-169	0	0	e-004	-12331	0	e-016	0	e-032	e-032
4	0	e-168	0	e-164	0	0	e-004	-12214	0	e-016	0	e-032	e-032
5	e-055	e-019	e-011	e-066	0	0	e-004	-10347	1.98	e-016	0	e-032	e-032

上, 设置视距 A 由1.7, 1.4和1.1线性下降至0, 分别记为实验6, 7, 8, 测试数据的精度等级如表2所示。

由表2可知, 较小的 A 值会显著提高算法在测试函数 $F_1 \sim F_4$ 上的寻优精度, 这是因为本文框架算法所设置的多子群结构相当于一个个的位置子领域, 而适应度值变差且 $|A| > 1$ 时启动的算子探索功能其作用有限, 故而本文设置相对较小的初始 A 值, 考虑取值1.6。

针对测试函数 F_8 , 除了采用 $C=\text{rand}$ 的实验1获得了全局极值, 其他设置均无法获得全局极值。在此, 本文基于上述设置即 $C=1$, 初始 $P_p=1$, 初始 $A=1$, 子群数 $p=6$, 子群内个体 $k=5$, 通过更改子群规模进行参数实验。设置实验9($p=4, k=3$)、实验10($p=7, k=6$)、实验11($p=8, k=7$)、实验12($p=9, k=8$), 测试数据的精度等级如表3所示。

由表3可知, 较小规模的子群数, 可以有效提高算法针对 $F_1 \sim F_4$ 的寻优精度, 如实验9所示全部获得了这4个函数的全局极值, 但对于基准函数 F_5 , F_8 和 F_9 则难以获得全局极值。提高子群规模, 虽然会降低部分函数($F_1 \sim F_4$)的求解精度, 但根据文献[12]有关成功率的界定, 本文实验11和实验12的结果是全部获得了最优解, 其成功率为100%。因此, 在不更改算子表达式和增加过多其他算法的融合算子的条件下, 本文多子群的框架设置具有较强的优势。

为了说明纵横双向学习的效果优于基于单个子群的单向学习, 在实验11的基础上采用单向学习的

方式进行基准函数的测试研究, 相关结果除了 $F_1 \sim F_4$ 的寻优精度较低外(分别为e-170, e-087, e-167和e-087), 其他的测试函数都获得了全局极值, 这就说明采用纵横双向学习的多种群框架结构, 在不改变算法性能的条件下能够更快地收敛, 进而获得全局极值。

4.3 改进算法与最新原始算法的对比分析

HHO算法是由Heidari等人^[24]新近提出的优化方法, 与遗传算法(Genetic Algorithm, GA)、生物地理学优化方法(Biogeography-Based Optimization, BBO)、差分进化DE、粒子群算法PSO、布谷鸟搜索算法(Cuckoo Search, CS)、基于教学的学习优化方法(Teaching-Learning-Based Optimization, TLBO)、蝙蝠算法(Bat Algorithm, BA)、花卉授粉算法(Flower Pollination Algorithm, FPA)、萤火虫算法(Firefly Algorithm, FA)、灰狼优化(Grey Wolf Optimizer, GWO)和飞蛾扑火算法(Moth-Flame Optimization, MFO)等的比较研究表明, 该算法具有极强的全局寻优能力和局部规避能力。因此, 本文算法与HHO算法和WOA算法进行指标对比。

HHO和WOA算法中, 种群数 M 为30, 迭代500次, 测试次数30, 其他参数参照HHO和WOA的实验设置不作更改, 统计相应的实验均值精度指标, 以考察算法是否具备全局寻优能力。测试指标数据如表4所示。

由表4可知, 以文献[12]的成功率阈值度量, 本

表2 本文算法参数 A 的基准函数测试均值精度等级($D=30$)

实验	F_1	F_2	F_3	F_4	F_5	F_6	F_7	F_8	F_9	F_{10}	F_{11}	F_{12}	F_{13}
6	0	e-194	0	e-192	0	0	e-004	-11740	0	e-016	0	e-032	e-032
7	0	e-218	0	e-218	0.9569	0	e-004	-11977	0	e-016	0	e-032	e-032
8	0	e-229	0	e-226	0	0	e-004	-11793	2.984	e-016	0	e-032	e-032

表3 本文算法种群参数 p 和 k 的基准函数测试均值精度等级($D=30$)

实验	F_1	F_2	F_3	F_4	F_5	F_6	F_7	F_8	F_9	F_{10}	F_{11}	F_{12}	F_{13}
9	0	0	0	0	2.87	0	e-004	-11026	8.954	e-016	0	e-032	e-032
10	0	e-164	0	e-168	0	0	e-004	-11977	1.989	e-016	0	e-032	e-032
11	e-264	e-133	e-260	e-134	0	0	e-004	-12569	0	e-016	0	e-032	e-032
12	e-214	e-108	e-212	e-101	0	0	e-004	-12569	0	e-016	0	e-032	e-032

表4 针对基本测试函数的算法性能均值指标对比($D=30$)

	F_1	F_2	F_3	F_4	F_5	F_6	F_7	F_8	F_9	F_{10}	F_{11}	F_{12}	F_{13}
本文算法	e-157	e-81	e-153	e-81	0	0	e-04	-12569	0	e-16	0	e-32	e-32
HHO	e-97	e-51	e-63	e-47	e-02	e-04	e-04	e+04	0	e-16	0	e-06	e-04
WOA	e-30	e-21	e-07	e-02	27.86	3.11	e-03	-5080	0	7.40	e-04	0.339	1.889

文算法在全部测试函数中获得了全局最优, 仅 $F_1 \sim F_4$ 的寻优精度稍低, 但仍然远高于HHO算法和WOA算法。另外, 本文统计了上述算法的标准差指标, 发现本文算法在所有测试函数中的标准差是最小的, HHO算法针对 F_5 的寻优精度偏低且不稳定, 针对 F_8 完全不收敛。WOA算法仅针对 $F_1 \sim F_3$ 、 F_9 和 F_{11} 具有一定的求解优势, 针对其他测试函数求解精度低或者稳定性相对较差。

4.4 改进算法与现有改进WOA文献的对比研究

文献[2,13-16]对上述7个单峰函数($F_1 \sim F_7$)和6个多峰函数($F_8 \sim F_{13}$)的可变测试函数问题进行了30次统计实验研究, 其中 F_8 的最优值为-418.9829D (D 是维度), 其他函数理论最优值为0或接近0, 且 F_5, F_6, F_8 和 F_{12}, F_{13} 的最优位置不在原点。现继续采用上述文献的参数设置, 种群数 $M=30$, 迭代次数 $L=500$, 维度 $D=30$, 进行30次独立实验, 对比实验结果如表5所示。

从计算精度来看, 文献[13]与粒子群算法PSO、差分算法DE以及WOA算法的对比研究表明, 基于自适应权重和模拟退火的鲸鱼优化算法(Whale Optimization Algorithm based on adaptive Weight and Simulated Annealing, W-SA-WOA)在计算精度和收敛速度方面都有明显提升, 本文算法对比文献[13], 除了 F_1, F_3 和 F_4 的计算精度相对稍低外, 在其他测试函数的均值指标都比文献[13]强或一致(F_7 和 F_9)。文献[14]与文献[12]进行了对比研究, 发现混沌搜索策略的鲸鱼优化算法(Whale Optimization Algorithm based on Chaotic Search, CWOA)在收敛速度、收敛精度、鲁棒

性方面均较文献[12]有较大提升, 本文算法除了 F_1, F_2 和 F_4 的计算精度比CWOA稍差, 其他指标都相对比文献[14]强或一致(F_6, F_7, F_9 和 F_{11})。文献[15]对比了粒子群算法PSO、黄金正弦优化算法(Golden-Sine optimization Algorithm, Golden-SA)、WOA等算法, 发现精英反向黄金正弦鲸鱼算法(Elite opposition-based Golden-Sine Whale Optimization Algorithm, EGolden-SWOA)具有更好的寻优精度和稳定性, 本文算法除了 F_1, F_2, F_3 和 F_4 的计算精度稍低, 其他的均值指标都相对比文献[15]强或一致(F_7, F_9, F_{10} 和 F_{11})。文献[16]与粒子群算法PSO、引力搜索算法GSA、基于自适应权重和柯西变异的鲸鱼优化算法(the Whale Optimization algorithm based on Adaptive Weight and Cauchy Mutation, WOAWC)^[24]以及基本WOA算法进行了比较, 低维度实验数据表明, 改进螺旋更新位置模型的鲸鱼优化算法(Whale Optimization Algorithm based on Improved spiral update position Model, IMWOA)是5种方法中最优的; 本文算法除了 F_1, F_2, F_3 和 F_4 的计算精度稍低, 其他测试函数的寻优精度都相对比文献[16]好或一致(F_6, F_9 和 F_{11})。需要说明的是, F_7 测试函数的求解精度不应该为0, 在30维度变量值全为0的情况下, 最优值是随机值, 只有当变量接近0时的最优解, 其最优值才接近0。所以, 文献[16]针对 F_7 的测试结果有所偏差。

从计算稳定性指标来看, 所有算法针对 F_7 的寻优标准差等级较低, 这是因为该函数的结果存在随机变量, 导致最优值接近0且不唯一, 导致所有算

表 5 本文算法与现有文献的性能指标对比($D=30$)

	W-SA-WOA ^[13]		CWOA ^[14]		EGolden-SWOA ^[15]		IMWOA ^[16]		本文算法	
	平均值	标准差	平均值	标准差	平均值	标准差	平均值	标准差	平均值	标准差
F_1	0	0	0	0	0	0	0	0	2.7e-157	1.4e-156
F_2	2.57e-21	6.68e-121	4.56e-223	0	6.69e-202	0	8.82e-181	0	3.8e-081	9.1e-81
F_3	0	0	-	-	0	0	0	0	1.2e-153	6.8e-153
F_4	3.56e-94	4.90e-94	3.6e-265	0	3.58e-191	0	4.27e-184	0	1.6e-081	3.0e-081
F_5	27.3357	0.2956	0.274	5.17e-00	3.75e-09	7.45e-09	4.29e-05	1.33e-04	0	0
F_6	0.0271	0.0201	0	0	6.86e-10	1.29e-09	0	0	0	0
F_7	1.17e-04	1.0E-04	3.61e-05	3.73e-05	3.25e-05	2.55e-05	0	0	1.4e-04	1.25e-04
F_8	-12447	873.3422	-	-	-5.58e-101	1.67e + 102	-12455.6	172.0869	-12569	1.8e-12
F_9	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
F_{10}	3.02e-15	1.77e-15	8.88e-016	4.01e-31	8.88e-16	0	8.88e-016	1.00e-031	8.88e-016	0
F_{11}	0.0015	0.0073	0	0	0	0	0	0	0	0
F_{12}	0.0785	2.40e-08	3.09e-02	1.37e-02	8.53e-14	2.61e-10	1.68e-08	1.70e-08	1.5e-032	5.5e-48
F_{13}	0.0421	0.0289	-	-	2.63e-11	6.65e-10	5.69e-06	1.96e-05	1.3e-032	5.5e-48

法的标准差值处于 $e-04$ 左右。如果将 $e-10$ 作为阈值,则文献[13–16]分别有7, 2, 4, 4个函数的稳定性相对较差,而本文算法仅针对 F_7 的寻优标准差等级较低,在其他基准函数上的标准差都极小,基本都高于现有文献[13–16]。可见,本文对种群结构的改进方法相较于前述文献的算子改进策略具有较强的优势。

另外,文献[11,12,14,16,25]针对大规模问题($D=1000$)的优化,选取了不同的测试函数,其中Rosenbrock(F_5)和Penalized1(F_{12})函数的测试表现相对较差,其他函数相对能获得较好的全局极值。以下本文利用这两个函数进行大规模问题的跨文献对比研究。参考前述文献设置,设定阈值为 $1e-05$,如果算法收敛到此范围,则认定算法获得了全局最优解,成功率(Success Rate, SR)为成功收敛到阈值范围内的测试比率。为了公平起见,所有算法的最大适应度计算次数一样(MaxFEs=15000),因此

更改最大迭代次数为500,种群数为30,记录30次独立测试的各性能指标,见表6。

由表6可知,本文算法在上述单峰和多峰的高维度($D=1000$)测试函数中,收敛精度均优于其他算法,成功率SR都为100%,表现良好的寻优精度和鲁棒性,总体性能优于文献[11,12,14,16,25]相应的改进鲸鱼优化算法。另外,现有文献[16]采用的最大迭代次数为 5×10^6 ,高于本文的迭代次数,说明本文算法在较小的迭代代价下取得了较好的优化效果。

为了进一步对比大规模问题上的算法性能,本文与文献[12,23]进行对比研究,测试函数选择上述文献中的15个基准函数,函数表达式见上述文献。本文利用15000次的总计算代价进行实验测试,其他参数设置同上,测试结果如表7所示。

由表7可知,按照上述文献有关测试函数的阈值设置,本文算法的成功率SR全部为100%,且本

表6 大规模($D=1000$)测试函数的算法性能指标对比

	Rosenbrock			Penalized1		
	均值	标准差	成功率	均值	标准差	成功率
本文算法	0	0	100	4.7116e-034	68.6991e-050	100
文献[11]	1.38e-17	4.2e-17	100	4.13e-28	0	100
文献[12]	9.92e+02	8.29e-01	0	1.59e-01	6.19e-02	0
文献[14]	9.90e+02	4.51e-01	0	3.46e-02	1.76e-02	3.33
文献[16]	2.66e-08	4.96e-08	100	3.14e-09	4.24e-09	100
文献[24]	0.3318	0.3973	10	2.20e-06	3.56e-06	100

表7 本文算法与文献[12,23]的性能对比($D=1000$)

函数	IWOA ^[12]			GWOA ^[23]			本文算法		
	均值	标准差	成功率	均值	标准差	成功率	均值	标准差	成功率
f_1	1.86e-111	9.0e-112	100	1.60e-114	5.01e-114	100	8.7516e-157	2.707e-156	100
f_2	3.00e-065	3.37e-065	100	1.56e-073	2.09e-073	100	7.2131e-080	1.7043e-079	100
f_3	3.15e-112	6.20e-112	100	9.59e-114	2.03e-113	100	4.0063e-153	2.1768e-152	100
f_4	3.00e-182	0	100	4.29e-168	0	100	1.4807e-161	8.1032e-161	100
f_5	9.92e+02	8.29e-01	0	9.88e+ 02	6.18e-004	0	0	0	100
f_6	3.06e-003	2.52e-003	20	2.07e-002	3.53e-002	30	2.2722e-04	1.7054e-04	100
f_7	1.10e-001	2.25e-002	40	1.05e-007	3.14e-007	100	4.7116e-034	8.6991e-050	100
f_8	0	0	100	0	0	100	0	0	100
f_9	5.15e-015	2.89e-015	100	8.88e-016	0	100	8.8818e-016	0	100
f_{10}	0	0	100	0	0	100	0	0	100
f_{11}	1.02e-066	1.63e-066	100	0	0	100	1.0549e-076	5.7776e-076	100
f_{12}	6.58e-112	1.30e-111	100	6.32e-122	1.58e-122	100	1.3948e-122	6.6809e-122	100
f_{13}	0	0	100	0	0	100	0	0	100
f_{14}	1.66e-115	3.30e-115	100	3.64e-130	4.58e-130	100	1.3498e-130	5.5674e-130	100
f_{15}	5.52e-103	1.20e-102	100	3.33e-105	1.05e-104	100	2.2266e-153	9.0116e-153	100

文算法在 $f_1 \sim f_3$, $f_5 \sim f_7$ 和 f_{15} 上均优于其他算法, 但本文算法在 f_4 和 f_{11} 的求解精度相对稍低, 通过将最大计算次数从15000更改为25000, 本文算法针对上述4个函数的求解精度分别为 $1.3518e-265$, $3.6627e-130$, 均有效地提高了算法的求解精度。

针对不同算法在大规模问题上的收敛性情况, 限于篇幅本文对比了WOA和HHO算法在求解 F_4 和 F_{12} 的收敛情况。其中, 测试函数 F_4 的最优值为0, 在有限的迭代步下, 本文算法的收敛效果优于WOA和HHO算法, 下降速度最快, 而WOA和HHO算法却较早停滞。测试函数 F_{12} 的最优解是 $1.57e-032$, 本文算法在80步迭代后基本获得了全局极值, 而WOA算法和HHO算法在100步迭代后限于局部极值, 无法进一步提高收敛精度。

5 结论

鲸鱼优化算法(WOA)是新近提出的生物群体启发式算法, 对部分问题具有较好的适用性, 但也存在难以跳出局部极值、寻优精度待提高等问题。针对鲸鱼优化算法的开发和探索能力不平衡的问题, 本文提出了一种多种群纵横双向学习的种群框架思路。针对这种子群分离的信息孤岛现象, 提出了一种横向种群之间的信息沟通互换机制, 即纵向子群选定的个体与横向随机个体所在的子群最差值进行置换, 以解决子群间的信息沟通难题。最后, 为了有效地利用历史信息, 提出了一种利用历史进化信息的算子选择机制, 替换现有WOA算法中基于随机概率 $P > 0.5$ 来选择策略的行为, 进而更好地利用算子进化的问题信息。数值结果表明, 本文改进方法对于绝大多数函数都能够较为稳定地获得全局最优解, 对于部分测试问题可以通过调整子群规模, 或者改变参数 C , 也能够稳定地获得全局极值, 因此具有一定的参考价值。

参考文献

- [1] 刘小龙. 改进多元宇宙算法求解大规模实值优化问题[J]. 电子与信息学报, 2019, 41(7): 1666-1673. doi: [10.11999/JEIT180751](https://doi.org/10.11999/JEIT180751).
LIU Xiaolong. Application of improved multiverse algorithm to large scale optimization problems[J]. *Journal of Electronics & Information Technology*, 2019, 41(7): 1666-1673. doi: [10.11999/JEIT180751](https://doi.org/10.11999/JEIT180751).
- [2] MIRJALILI S and LEWIS A. The whale optimization algorithm[J]. *Advances in Engineering Software*, 2016, 95: 51-67. doi: [10.1016/j.advengsoft.2016.01.008](https://doi.org/10.1016/j.advengsoft.2016.01.008).
- [3] MAFARJA M M and MIRJALILI S. Hybrid whale optimization algorithm with simulated annealing for feature selection[J]. *Neurocomputing*, 2017, 260: 302-312. doi: [10.1016/j.neucom.2017.04.053](https://doi.org/10.1016/j.neucom.2017.04.053).
- [4] ABDEL-BASSET M, MANOGARAN G, EL-SHAHAT D, et al. A hybrid whale optimization algorithm based on local search strategy for the permutation flow shop scheduling problem[J]. *Future Generation Computer Systems*, 2018, 85: 129-145. doi: [10.1016/j.future.2018.03.020](https://doi.org/10.1016/j.future.2018.03.020).
- [5] XIONG Guojiang, ZHANG Jing, SHI Dongyuan, et al. Parameter extraction of solar photovoltaic models using an improved whale optimization algorithm[J]. *Energy Conversion and Management*, 2018, 174: 388-405. doi: [10.1016/j.enconman.2018.08.053](https://doi.org/10.1016/j.enconman.2018.08.053).
- [6] CHEN Huiling, XU Yueting, WANG Mingjing, et al. A balanced whale optimization algorithm for constrained engineering design problems[J]. *Applied Mathematical Modelling*, 2019, 71: 45-59. doi: [10.1016/j.apm.2019.02.004](https://doi.org/10.1016/j.apm.2019.02.004).
- [7] MAHDAD B. Improvement optimal power flow solution under loading margin stability using new partitioning whale algorithm[J]. *International Journal of Management Science and Engineering Management*, 2019, 14(1): 64-77. doi: [10.1080/17509653.2018.1488225](https://doi.org/10.1080/17509653.2018.1488225).
- [8] 吴书强, 栾飞. 基于改进型鲸鱼算法的云制造资源配置研究[J]. 制造业自动化, 2019, 41(12): 95-98, 124.
WU Shuqiang and LUAN Fei. Optimal allocation method for cloud manufacturing resource based on improved whale optimization algorithm[J]. *Manufacturing Automation*, 2019, 41(12): 95-98, 124.
- [9] 孙琪, 于永进, 王玉彬, 等. 采用改进鲸鱼算法的配电网综合优化[J/OL]. 电力系统及其自动化学报. 2021, 30(5): 22-29. doi: [10.19635/j.cnki.csu-epsa.000553](https://doi.org/10.19635/j.cnki.csu-epsa.000553).
SUN Qi, YU Yongjin, WANG Yubin, et al. Comprehensive optimization of distribution network with improved whale algorithm[J/OL]. *The CSU-EPSSA*. 2021, 30(5): 22-29. doi: [10.19635/j.cnki.csu-epsa.000553](https://doi.org/10.19635/j.cnki.csu-epsa.000553).
- [10] 吴坤, 谭劲昌. 基于改进鲸鱼优化算法的无人机航路规划[J]. 航空学报, 2020, 41(S2): 724286. doi: [10.7527/S1000-6893.2020.24286](https://doi.org/10.7527/S1000-6893.2020.24286).
WU Kun and TAN Shaochang. Path planning of UAVs based on improved whale optimization algorithm[J]. *Acta Aeronautica et Astronautica Sinica*, 2020, 41(S2): 724286. doi: [10.7527/S1000-6893.2020.24286](https://doi.org/10.7527/S1000-6893.2020.24286).
- [11] SUN Yongjun, WANG Xilu, CHEN Yahuan, et al. A modified whale optimization algorithm for large-scale global optimization problems[J]. *Expert Systems With Applications*, 2018, 114: 563-577. doi: [10.1016/j.eswa.2018.08.027](https://doi.org/10.1016/j.eswa.2018.08.027).
- [12] 龙文, 蔡绍洪, 焦建军, 等. 求解大规模优化问题的改进鲸鱼优化算法[J]. 系统工程理论与实践, 2017, 37(11): 2983-2994. doi: [10.12011/1000-6788\(2017\)11-2983-12](https://doi.org/10.12011/1000-6788(2017)11-2983-12).
LONG Wen, CAI Shaohong, JIAO Jianjun, et al. Improved whale optimization algorithm for large scale optimization problems[J]. *Systems Engineering-Theory & Practice*, 2017,

- 37(11): 2983–2994. doi: [10.12011/1000-6788\(2017\)11-2983-12](https://doi.org/10.12011/1000-6788(2017)11-2983-12).
- [13] 褚鼎立, 陈红, 王旭光. 基于自适应权重和模拟退火的鲸鱼优化算法[J]. 电子学报, 2019, 47(5): 992–999. doi: [10.3969/j.issn.0372-2112.2019.05.003](https://doi.org/10.3969/j.issn.0372-2112.2019.05.003).
- CHU Dingli, CHEN Hong, and WANG Xuguang. Whale optimization algorithm based on adaptive weight and simulated annealing[J]. *Acta Electronica Sinica*, 2019, 47(5): 992–999. doi: [10.3969/j.issn.0372-2112.2019.05.003](https://doi.org/10.3969/j.issn.0372-2112.2019.05.003).
- [14] 王坚浩, 张亮, 史超, 等. 基于混沌搜索策略的鲸鱼优化算法[J]. 控制与决策, 2019, 34(9): 1893–1900. doi: [10.13195/j.kzyjc.2018.0098](https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2018.0098).
- WANG Jianhao, ZHANG Liang, SHI Chao, *et al.* Whale optimization algorithm based on chaotic search strategy[J]. *Control and Decision*, 2019, 34(9): 1893–1900. doi: [10.13195/j.kzyjc.2018.0098](https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2018.0098).
- [15] 肖子雅, 刘升. 精英反向黄金正弦鲸鱼算法及其工程优化研究[J]. 电子学报, 2019, 47(10): 2177–2186. doi: [10.3969/j.issn.0372-2112.2019.10.020](https://doi.org/10.3969/j.issn.0372-2112.2019.10.020).
- XIAO Ziya and LIU Sheng. Study on elite opposition-based golden-sine whale optimization algorithm and its application of project optimization[J]. *Acta Electronica Sinica*, 2019, 47(10): 2177–2186. doi: [10.3969/j.issn.0372-2112.2019.10.020](https://doi.org/10.3969/j.issn.0372-2112.2019.10.020).
- [16] 吴泽忠, 宋菲. 基于改进螺旋更新位置模型的鲸鱼优化算法[J]. 系统工程理论与实践, 2019, 39(11): 2928–2944. doi: [10.12011/1000-6788-2018-2156-17](https://doi.org/10.12011/1000-6788-2018-2156-17).
- WU Zezhong and SONG Fei. Whale optimization algorithm based on improved spiral update position model[J]. *Systems Engineering-Theory & Practice*, 2019, 39(11): 2928–2944. doi: [10.12011/1000-6788-2018-2156-17](https://doi.org/10.12011/1000-6788-2018-2156-17).
- [17] 张达敏, 徐航, 王依柔, 等. 嵌入Circle映射和逐维小孔成像反向学习的鲸鱼优化算法[J]. 控制与决策, 2021, 36(5): 1173–1180. doi: [10.3195/j.kzyjc.2019.1362](https://doi.org/10.3195/j.kzyjc.2019.1362).
- ZHANG Damin, XU Hang, WANG Yirou, *et al.* Whale optimization algorithm for embedded circle mapping and one dimensional oppositional learning based small hole imaging[J]. *Control and Decision*, 2021, 36(5): 1173–1180. doi: [10.3195/j.kzyjc.2019.1362](https://doi.org/10.3195/j.kzyjc.2019.1362).
- [18] 刘景森, 马义想, 李煜. 改进鲸鱼算法求解工程设计优化问题[J]. 计算机集成制造系统, 2021, 27(7): 1884–1897. doi: [10.13196/j.cims.2021.07.004](https://doi.org/10.13196/j.cims.2021.07.004).
- LIU Jingsen, MA Yixiang, and LI Yu. Improved whale algorithm for solving engineering design optimization problems[J]. *Computer Integrated Manufacturing Systems*, 2021, 27(7): 1884–1897. doi: [10.13196/j.cims.2021.07.004](https://doi.org/10.13196/j.cims.2021.07.004).
- [19] 黄清宝, 李俊兴, 宋春宁, 等. 基于余弦控制因子和多项式变异的鲸鱼优化算法[J]. 控制与决策, 2020, 35(3): 559–568. doi: [10.13195/j.kzyjc.2018.0463](https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2018.0463).
- HUANG Qingbao, LI Junxing, SONG Chuning, *et al.* Whale optimization algorithm based on cosine control factor and polynomial mutation[J]. *Control and Decision*, 2020, 35(3): 559–568. doi: [10.13195/j.kzyjc.2018.0463](https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2018.0463).
- [20] 黄飞, 吴泽忠. 基于阈值控制的一种改进鲸鱼算法[J]. 系统工程, 2020, 38(2): 133–148.
- HUNAG Fei and WU Zezhong. An improved whale optimization algorithm based on threshold control[J]. *Systems Engineering*, 2020, 38(2): 133–148.
- [21] WATKINS W A and SCHEVILL W E. Aerial observation of feeding behavior in four baleen whales: *Eubalaena glacialis*, *Balaenoptera borealis*, *Megaptera novaeangliae*, and *Balaenoptera physalus*[J]. *Journal of Mammalogy*, 1979, 60(1): 155–63. doi: [10.2307/1379766](https://doi.org/10.2307/1379766).
- [22] 杜永兆, 范宇凌, 柳培忠, 等. 多种群协方差学习差分进化算法[J]. 电子与信息学报, 2019, 41(6): 1488–1495. doi: [10.11999/JEIT180670](https://doi.org/10.11999/JEIT180670).
- DU Yongzhao, FAN Yuling, LIU Peizhong, *et al.* Multi-populations covariance learning differential evolution algorithm[J]. *Journal of Electronics & Information Technology*, 2019, 41(6): 1488–1495. doi: [10.11999/JEIT180670](https://doi.org/10.11999/JEIT180670).
- [23] 徐建中, 晏福. 改进鲸鱼优化算法在电力负荷调度中的应用[J]. 运筹与管理, 2020, 29(9): 149–159. doi: [10.12005/orms.2020.0238](https://doi.org/10.12005/orms.2020.0238).
- XU Jianzhong and YAN Fu. The application of improved whale optimization algorithm in power load dispatching[J]. *Operations Research and Management Science*, 2020, 29(9): 149–159. doi: [10.12005/orms.2020.0238](https://doi.org/10.12005/orms.2020.0238).
- [24] 郭振洲, 王平, 马云峰, 等. 基于自适应权重和柯西变异的鲸鱼优化算法[J]. 微电子学与计算机, 2017, 34(9): 20–25. doi: [10.19304/j.cnki.issn1000-7180.2017.09.005](https://doi.org/10.19304/j.cnki.issn1000-7180.2017.09.005).
- GUO Zhenzhou, WANG Ping, MA Yunfeng, *et al.* Whale optimization algorithm based on adaptive weight and Cauchy mutation[J]. *Microelectronics & Computer*, 2017, 34(9): 20–25. doi: [10.19304/j.cnki.issn1000-7180.2017.09.005](https://doi.org/10.19304/j.cnki.issn1000-7180.2017.09.005).
- [25] HEIDARI A A, MIRJALILI S, FARIS H, *et al.* Harris hawks optimization: Algorithm and applications[J]. *Future Generation Computer Systems*, 2019, 97: 849–872. doi: [10.1016/j.future.2019.02.028](https://doi.org/10.1016/j.future.2019.02.028).
- 刘小龙: 男, 1977年生, 讲师, 研究方向为仿生优化与计算智能。