

## 基于小波的稳健光流计算方法

王洪雁\* 郑佳 裴炳南

(大连大学辽宁省北斗高精度位置服务技术工程实验室 大连 116622)

(大连大学大连市环境感知与智能控制重点实验室 大连 116622)

**摘要:** 针对系统误差导致光流计算稳健性较差及精度较低的问题, 该文提出一种基于小波多分辨理论的稳健光流计算方法。所提算法基于小波多尺度分辨率特性, 将光照条件变化及传感器噪声引起的系统误差包含进光流计算中以改善光流计算的稳健性及估计精度, 并通过总体最小二乘法求解超定小波光流方程组以获得光流矢量。仿真结果表明, 与传统的Lucas-Kanade算法、Horn-Schunck算法及基于小波的全向图像光流估计方法相比, 所提算法可显著改善光流估计精度及稳健性。

**关键词:** 光流计算; 小波多分辨; 系统误差; 总体最小二乘

中图分类号: TN919.8

文献标识码: A

文章编号: 1009-5896(2018)12-2945-09

DOI: 10.11999/JEIT180077

## A Robust Optical Flow Calculation Method Based on Wavelet

WANG Hongyan ZHENG Jia PEI Bingnan

(Liaoning Engineering Laboratory of BeiDou High-precision Location Service,  
Dalian University, Dalian 116622, China)

(Dalian Key Laboratory of Environmental Perception and Intelligent Control,  
Dalian University, Dalian 116622, China)

**Abstract:** Focusing on the issue that the systematic errors lead to poor robustness and low accuracy of optical flow calculation, a robust optical flow calculation method is proposed in this paper, which is based on the wavelet multi-resolution theory. With the multi-resolution characteristics of wavelet, the system error caused by variation of illumination conditions and sensor noise is incorporated into the calculation of optical flow to improve the robustness and estimation accuracy. In what follows, the total least square method is used to solve the over-determined wavelet optical flow equations to obtain the optical flow vector. As compared to the traditional Lucas-Kanade approach, Horn-Schunck method and optical flow estimation in omnidirectional images using wavelet approach, simulation results show that the proposed algorithm can significantly improve the accuracy of optical flow estimation and the robustness of the optical flow field.

**Key words:** Optical flow calculation; Wavelet multi-resolution; System error; Total least squares

### 1 引言

光流为图像亮度模式的表现运动, 包含被观察物体的运动及3维结构信息<sup>[1]</sup>。由于光流仅利用相邻图像即可获得, 无需图像背景, 因而不受复杂环境影响<sup>[2]</sup>。基于此, 光流在机器视觉中扮演重要角色, 在目标分割、识别以及跟踪等领域都有着非常

重要的应用<sup>[3-5]</sup>。

Horn等人<sup>[6]</sup>率先提出HS全局光流算法, 该方法可得稠密光流, 但所得光流边界易模糊, 稳健性较差。针对此问题, Lucas等人<sup>[7]</sup>提出LK方法以获得稳健性较好的光流, 然而此算法所得光流较为稀疏。为综合利用HS及LK的优势, Drulea等人<sup>[8]</sup>提出全局与局部结合的光流方法, 所提算法可得稠密且稳健性较好的光流。然而, 对于相邻图像位移较大的情况, 所得光流稳健性较差, 精度较低<sup>[9]</sup>。为解决此问题, 具有较高估计精度的多尺度分辨小波方法被提出<sup>[10]</sup>。

基于小波的光流方法中, Magarey等人<sup>[11]</sup>提出基于复值小波变换的方法以获得最大可计算范围,

收稿日期: 2018-01-19; 改回日期: 2018-09-18; 网络出版: 2018-09-21

\*通信作者: 王洪雁 gglongs@163.com

基金项目: 国家自然科学基金(61301258, 61271379), 中国博士后科学基金(2016M590218)

Foundation Items: The National Natural Science Foundation of China (61301258, 61271379), China Postdoctoral Science Foundation (2016M590218)

但平均误差较大。为改善光流估计精度, Wu等人<sup>[12]</sup>提出基于小波运动模型的方法以获得较高估计精度, 然而所用图像较多, 计算复杂度较高。为降低计算复杂度, 项学智等人<sup>[13]</sup>提出一种形态梯度恒常的复值小波光流求解方法, 通过引入复值小波以降低相位震荡的影响。该方法复杂度较低, 但未考虑传感器误差, 因而所得光流稳健性较差。实际应用中, 光照强度变化及传感器噪声会严重影响图像质量, 进而显著降低光流估计精度及稳健性<sup>[14]</sup>。为提高光流计算稳健性, Demonceaux等人<sup>[14]</sup>提出基于小波的全向图像光流估计方法(DC方法)。此方法将传感器误差显式包含进光流计算以获得较高估计精度及稳健性, 但未考虑光照变化所引起的误差。

需要注意的是, HS, LK方法在求解过程中未考虑光照变化及传感器误差, 因而所得光流精度较低且稳健性较差, 而DC方法则没有考虑光照变化所引起的误差。基于此, 为进一步改善光流估计精度及稳健性, 须考虑传感器噪声及光照变化所引起的误差, 即系统误差<sup>[15]</sup>。此外, 众所周知, 相对于只考虑测量误差的最小二乘法(Least Square, LS), 总体最小二乘法(Total Least Square, TLS)则同时考虑测量误差及系统误差<sup>[15]</sup>。基于以上所述, 通过将光照条件变化、传感器噪声等引起的系统误差显式地包含进光流计算中, 本文提出一种基于小波的稳健光流计算方法, 利用小波多分辨率理论, 并通过TLS<sup>[16,17]</sup>求解所得超定方程组以获得具有较高估计精度及稳健性的光流矢量。

## 2 光流基本方程

设图像某点 $(x, y)$ 在时刻 $t$ 亮度为 $I(x, y, t)$ ,  $(t + \Delta t)$ 时刻该点亮度为 $I(x + \Delta x, y + \Delta y, t + \Delta t)$ , 且 $\Delta t$ 无穷小时可认为该点亮度不变, 可得

$$\frac{\partial I}{\partial x} \frac{\Delta x}{\Delta t} + \frac{\partial I}{\partial y} \frac{\Delta y}{\Delta t} + \frac{\partial I}{\partial t} = 0 \quad (1)$$

将 $\frac{\partial I}{\partial x}, \frac{\partial I}{\partial y}, \frac{\partial I}{\partial t}$ 改写为 $I_x, I_y, I_t$ , 分别表示图像灰度在 $x, y, t$ 方向上偏导数, 其中 $\frac{\partial(\cdot)}{\partial(\cdot)}$ 为偏导算子。令 $\frac{\Delta x}{\Delta t} = u, \frac{\Delta y}{\Delta t} = v$ , 则式(1)可重新改写为

$$I_x u + I_y v + I_t = 0 \quad (2)$$

至此可得光流计算基本方程式,  $u, v$ 为速度场矢量的两个分量, 计算光流就是求解 $u, v$ 的过程。

## 3 基于LS的多分辨光流求解

### 3.1 基于小波的光流模型

令小波基函数 $(\Psi^n)$  ( $n = 1, 2, \dots, N$ )位于希尔伯

特空间 $L^2(R^2)$ 内, 其中 $N$ 为小波基个数,  $n$ 为第 $n$ 个小波基, 则以 $u = (u_1, u_2)$ 为中心的 $N$ 个方程可定义为<sup>[14]</sup>

$$\Psi_u^n(x, y) = \Psi^n(x - u_1, y - u_2) \quad (3)$$

式(2)、式(3)内积可得 $N$ 个方程:

$$\left\langle (\nabla I) \cdot \mathbf{V}_F + \frac{\partial I}{\partial t}, \Psi_u^n \right\rangle = 0 \quad (4)$$

其中,  $\nabla$ 为梯度算子,  $\mathbf{V}_F = (v_1, v_2)$ 为光流矢量。

式(4)可改写为

$$\left\langle \frac{\partial I}{\partial x} v_1, \Psi_u^n \right\rangle + \left\langle \frac{\partial I}{\partial y} v_2, \Psi_u^n \right\rangle + \left\langle \frac{\partial I}{\partial t}, \Psi_u^n \right\rangle = 0 \quad (5)$$

由于局部光流恒定假设往往不成立<sup>[14]</sup>, 因而本文采用仿射模型对 $\mathbf{V}_F = (v_1(x, y), v_2(x, y))$ 进行建模<sup>[4]</sup>, 即

$$v_1(x, y) = ax + by + c, \quad v_2(x, y) = dx + ey + f \quad (6)$$

由式(6)可知, 光流求解可转化为对 $(a, b, c, d, e, f)$ 的求解。

式(5)中 $v_1, v_2$ 用式(6)来代替, 可得

$$\begin{aligned} & a \left\langle x \frac{\partial I}{\partial x}, \Psi_u^n \right\rangle + b \left\langle y \frac{\partial I}{\partial x}, \Psi_u^n \right\rangle + c \left\langle \frac{\partial I}{\partial x}, \Psi_u^n \right\rangle \\ & + d \left\langle x \frac{\partial I}{\partial y}, \Psi_u^n \right\rangle + e \left\langle y \frac{\partial I}{\partial y}, \Psi_u^n \right\rangle + f \left\langle \frac{\partial I}{\partial y}, \Psi_u^n \right\rangle \\ & + \left\langle \frac{\partial I}{\partial t}, \Psi_{jk}^n \right\rangle = 0 \end{aligned} \quad (7)$$

其中,  $k = (k_1, k_2)$ 为 $x, y$ 方向上的平移因子,  $j$ 代表尺度因子, 即小波分解层数。

对式(7)分部积分, 可得

$$\begin{aligned} & a \left( \left\langle xI, \frac{\partial \Psi_u^n}{\partial x} \right\rangle + \langle I, \Psi_u^n \rangle \right) + b \left\langle yI, \frac{\partial \Psi_u^n}{\partial x} \right\rangle \\ & + c \left\langle \frac{\partial I}{\partial x}, \Psi_u^n \right\rangle + d \left\langle x \frac{\partial I}{\partial y}, \Psi_u^n \right\rangle \\ & + e \left\langle y \frac{\partial I}{\partial y}, \Psi_u^n \right\rangle + f \left\langle \frac{\partial I}{\partial y}, \Psi_u^n \right\rangle \\ & + \left\langle \frac{\partial I}{\partial t}, \Psi_{jk}^n \right\rangle = 0 \end{aligned} \quad (8)$$

由式(8)可知, 待求解参数个数为6。若 $N < 6$ , 此问题为欠估计问题, 无法得到唯一解, 而若 $N \geq 6$ , 则可获得唯一解。重新组合此 $N$ 个方程, 可得

$$\mathbf{M}_u \mathbf{V} = \mathbf{X}_u \quad (9)$$

其中,  $\mathbf{M}_u = [A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6]$ ,  $\mathbf{X}_u = - \left\langle \frac{\partial I}{\partial t}, \Psi_{jk}^n \right\rangle$ ,

$$\begin{aligned} \mathbf{V} &= (a, b, c, d, e, f)^T, \quad A_1 = \left( \left\langle xI, \frac{\partial \Psi_u^n}{\partial x} \right\rangle + \langle I, \Psi_u^n \rangle \right), \\ A_2 &= \left\langle yI, \frac{\partial \Psi_u^n}{\partial x} \right\rangle, \quad A_3 = \left\langle \frac{\partial I}{\partial x}, \Psi_u^n \right\rangle, \quad A_4 = \left\langle x \frac{\partial I}{\partial y}, \Psi_u^n \right\rangle, \end{aligned}$$

$$A_5 = \left\langle y \frac{\partial I}{\partial y}, \Psi_u^n \right\rangle, A_6 = \left\langle \frac{\partial I}{\partial y}, \Psi_u^n \right\rangle.$$

至此, 可得基于多分辨小波的光流方程。

### 3.2 基于LS的小波光流求解

定义式(10)所示的离散小波基:

$$\Psi_{jk}^n(x, y) = 2^j \Psi^n(2^j x - k_1, 2^j y - k_2) \quad (10)$$

其中,  $k = (k_1, k_2)$  为  $x, y$  方向平移因子,  $n$  为第  $n$  个小波基,  $j$  代表尺度因子, 即小波分解层数,  $\Psi$  为小波变换基函数, 对每个确定的  $k, j$  都可得到  $N$  个方程, 则在点  $(2^j k_1, 2^j k_2)$  处可通过式(11)求解光流<sup>[2]</sup>:

$$\begin{aligned} & a \left( \left\langle xI, \frac{\partial \Psi_{jk}^n}{\partial x} \right\rangle + \langle I, \Psi_{jk}^n \rangle \right) + b \left\langle yI, \frac{\partial \Psi_{jk}^n}{\partial x} \right\rangle \\ & + c \left\langle I, \frac{\partial \Psi_{jk}^n}{\partial x} \right\rangle + d \left\langle xI, \frac{\partial \Psi_{jk}^n}{\partial y} \right\rangle \\ & + e \left( \left\langle yI, \frac{\partial \Psi_{jk}^n}{\partial y} \right\rangle + \langle I, \Psi_{jk}^n \rangle \right) \\ & + f \left\langle I, \frac{\partial \Psi_{jk}^n}{\partial y} \right\rangle = \left\langle \frac{\partial I}{\partial t}, \Psi_{jk}^n \right\rangle \end{aligned} \quad (11)$$

类似于式(9), 式(11)可重新表示为

$$\mathbf{M}_k^j \mathbf{V}_k^j = \mathbf{X}_k^j \quad (12)$$

其中,  $\mathbf{M}_k^j$  为系统矩阵,  $\mathbf{X}_k^j$  为观测矩阵,  $\mathbf{V}_k^j = (a, b, c, d, e, f)^T$  为所求仿射参数矩阵。

基于式(12), 可得光流最小二乘解如式(13):

$$\mathbf{V}_k^j = \left( \left( \mathbf{M}_k^j \right)^T \mathbf{M}_k^j \right)^{-1} \left( \mathbf{M}_k^j \right)^T \mathbf{X}_k^j \quad (13)$$

需要注意的是, 由于LS考虑测量误差, 因而所得光流精度有一定提高, 但因未考虑光照变化及传感器噪声所引起的对光流计算精度影响较大的系统误差, 因而所求光流稳定性较差<sup>[15]</sup>。为提高光流计算稳健性及估计精度, 本文提出如下所述基于小波的稳健光流求解方法。

## 4 基于TLS的稳健多分辨光流求解方法

### 4.1 基于小波的稳健光流模型

为改善光流估计精度及稳健性, 通过将光照变化及传感器噪声引起的系统误差包含进光流计算中, 本文提出一种基于小波的稳健光流求解方法。所提算法将式(2)所表述光流方程投影至式(3)所表示小波基以得到小波光流方程组<sup>[13]</sup>, 进而通过TLS求解超定小波光流方程组以改善光流估计精度及稳健性。

由文献<sup>[17]</sup>知, 加性噪声包括散弹噪声和热噪声。肖特基在1918年证明散弹噪声具有白噪声性质。散弹噪声最显著特点是噪声方差正比于接收光

强<sup>[18]</sup>。因此, 光照强度变化对图像的影响可视为散弹噪声。此外, 由文献<sup>[19]</sup>知, 热噪声是由电子热震动引起, 存在于电子器件及传输媒介中, 可视为温度变化的结果。传感器采集图像过程中受外界温度影响, 从而引起传感器内部电子热震动, 故传感器噪声可视为热噪声。综上所述, 光照条件变化引起的噪声和传感器噪声可视为加性噪声, 即噪声的加性条件成立。

令  $I = I_i + I_e$ ,  $I_i$  为无噪声图像灰度值,  $I_e$  为系统误差, 式(11)可改写为

$$\begin{aligned} & a \left( \left\langle x(I_i + I_e), \frac{\partial \Psi_{jk}^n}{\partial x} \right\rangle + \langle (I_i + I_e), \Psi_{jk}^n \rangle \right) \\ & + b \left\langle y(I_i + I_e), \frac{\partial \Psi_{jk}^n}{\partial x} \right\rangle + c \left\langle (I_i + I_e), \frac{\partial \Psi_{jk}^n}{\partial x} \right\rangle \\ & + d \left\langle x(I_i + I_e), \frac{\partial \Psi_{jk}^n}{\partial y} \right\rangle + e \left( \left\langle y(I_i + I_e), \frac{\partial \Psi_{jk}^n}{\partial y} \right\rangle \right. \\ & \left. + \langle (I_i + I_e), \Psi_{jk}^n \rangle \right) + f \left\langle (I_i + I_e), \frac{\partial \Psi_{jk}^n}{\partial y} \right\rangle \\ & = \left\langle \frac{\partial I}{\partial t}, \Psi_{jk}^n \right\rangle \end{aligned} \quad (14)$$

式(14)与式(11)相减可得

$$\begin{aligned} & a \left( \left\langle xI_e, \frac{\partial \Psi_{jk}^n}{\partial x} \right\rangle + \langle I_e, \Psi_{jk}^n \rangle \right) + b \left\langle yI_e, \frac{\partial \Psi_{jk}^n}{\partial x} \right\rangle \\ & + c \left\langle I_e, \frac{\partial \Psi_{jk}^n}{\partial x} \right\rangle + d \left\langle xI_e, \frac{\partial \Psi_{jk}^n}{\partial y} \right\rangle \\ & + e \left( \left\langle yI_e, \frac{\partial \Psi_{jk}^n}{\partial y} \right\rangle + \langle I_e, \Psi_{jk}^n \rangle \right) \\ & + f \left\langle I_e, \frac{\partial \Psi_{jk}^n}{\partial y} \right\rangle = 0 \end{aligned} \quad (15)$$

式(15)可改写为

$$\begin{aligned} & \left( \mathbf{M}_k^j + \mathbf{M}_e \right) \mathbf{V}_k^j \\ & = \mathbf{X}_k^j + \mathbf{X}_e, \mathbf{V}_k^j = (a, b, c, d, e, f)^T \end{aligned} \quad (16)$$

其中,  $\mathbf{M}_e$  为系统噪声,  $\mathbf{X}_e$  为观测噪声。

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_e & = a \left( \left\langle xI_e, \frac{\partial \Psi_{jk}^n}{\partial x} \right\rangle + \langle I_e, \Psi_{jk}^n \rangle \right) \\ & + b \left\langle yI_e, \frac{\partial \Psi_{jk}^n}{\partial x} \right\rangle + c \left\langle I_e, \frac{\partial \Psi_{jk}^n}{\partial x} \right\rangle \\ & + d \left\langle xI_e, \frac{\partial \Psi_{jk}^n}{\partial y} \right\rangle + e \left( \left\langle yI_e, \frac{\partial \Psi_{jk}^n}{\partial y} \right\rangle \right. \\ & \left. + \langle I_e, \Psi_{jk}^n \rangle \right) + f \left\langle I_e, \frac{\partial \Psi_{jk}^n}{\partial y} \right\rangle \end{aligned} \quad (17)$$

式(17)即为光流估计的总体最小二乘形式。

### 4.2 基于TLS的稳健小波光流求解

基于式(16)所刻画的小波多分辨光流计算总体

最小二乘模型, 本文利用Euler-Larrange逼近法<sup>[20]</sup>对其进行求解。首先构建式(18)所示的最小化误差目标函数:

$$\min = (\mathbf{M}_e)^T \mathbf{M}_e + (\mathbf{X}_e)^T \mathbf{X}_e \quad (18)$$

为求解式(18)的最小化问题, 构造Lagrange函数:

$$\begin{aligned} \Phi(\mathbf{X}_e, \mathbf{M}_e, \lambda, \mathbf{V}_k^j) \\ = (\mathbf{M}_e)^T \mathbf{M}_e + (\mathbf{X}_e)^T \mathbf{X}_e + 2\lambda^T \\ \left[ \mathbf{X}_k^j + \mathbf{X}_e - (\mathbf{M}_k^j + \mathbf{M}_e) \mathbf{V}_k^j \right] \end{aligned} \quad (19)$$

其中,  $\lambda$ 为维数 $n \times 1$ 的Lagrange因子。

对式(19)求偏导, 可得

$$\left( \widehat{\mathbf{V}}_k^j \right)^{(i+1)} = N^{-1} \left( c + \left( \widehat{\mathbf{V}}_k^j \right)^{(i)} \hat{h}^{(i)} \right) \quad (20)$$

其中,  $\hat{h}^{(i)} = \left( \mathbf{X}_k^j - \mathbf{M}_k^j \left( \widehat{\mathbf{V}}_k^j \right)^{(i)} \right)^T \left( \mathbf{X}_k^j - \mathbf{M}_k^j \left( \widehat{\mathbf{V}}_k^j \right)^{(i)} \right) / \left( 1 + \left( \left( \widehat{\mathbf{V}}_k^j \right)^{(i)} \right)^T \left( \widehat{\mathbf{V}}_k^j \right)^{(i)} \right)$ ,  $N = \left( \mathbf{M}_k^j \right)^T \mathbf{M}_k^j$ ,  $\widehat{\mathbf{V}}_k^j$ 为 $\mathbf{V}_k^j$ 估计值。

小波分解图层取决于尺度因子<sup>[21]</sup>, 因而对于式(10)中每组 $(j, k)$ , 皆可得到 $N$ 个小波函数 $\psi_{jk}^n(x, y)$ , 从而可得一组超定线性方程组, 进而基于式(16)–式(20)可得基于TLS的稳健多分辨光流。

至此, 基于小波的稳健光流求解算法可表述如下:

(1)读取视频中连续两帧图像, 系统噪声中 $I_e$ 及 $\mathbf{X}_e$ 可建模为高斯白噪声。

(2)采用TLS进行求解 $a, b, c, d, e, f$ 的值, 具体步骤如下:

(3)设定初始值: 迭代次数 $i = 100$ ,  $c = \left( \mathbf{M}_k^j \right)^T \cdot \mathbf{X}_k^j N = \left( \mathbf{M}_k^j \right)^T \mathbf{M}_k^j$ ,  $\left( \widehat{\mathbf{V}}_k^j \right)^{(1)} = N^{-1} c$ ,  $\hat{h} = 0$ ;

(4)计算 $\hat{h}^{(i)}$ , 进而基于式(20)求解 $\left( \widehat{\mathbf{V}}_k^j \right)^{(i+1)}$ ;

(5)重复步骤(4)以获得 $a, b, c, d, e, f$ , 进而基于式(6)求解光流, 则 $\mathbf{v} = \left( (v_1)^{i+1}, (v_2)^{i+1} \right)$ 即为该层光流值;

(6)将步骤(5)所得 $a, b, c, d, e, f$ 作为第 $(j-1)$ 层初始值, 重复步骤(3)–步骤(5)求解第 $(j-1)$ 层光流矢量。直到求出第1层光流, 即得所求光流。



图1 慢速运动场景下采集的连续4帧图像

## 5 实验仿真及分析

在快、慢运动场景下, 通过与HS<sup>[6]</sup>, LK<sup>[7]</sup>及DC方法<sup>[14]</sup>比较, 本节将在以下两个方面验证所提算法的有效性: 光流估计精度及稳健性。实验环境如下: 内存8 GB, 处理器i5, 仿真环境: Matlab R2014b。仿真参数如下: 迭代次数 $i = 100$ ,  $j = 5$ , 图片分辨率为 $640 \times 640$ 。慢、快运动速度分别为0.5 m/s, 12 m/s。

**实验1** 图1为慢速运动场景下所采集的连续4帧图片。图2(a), 2(b), 2(c), 2(d)分别为HS, LK, DC方法及本文算法对6帧、7帧; 7帧、8帧; 8帧、9帧求解所得光流。由图2可知, HS方法所得光流较稠密, 但稳定性较差; 而LK方法所得光流稀疏, 然而稳定性稍好; DC方法将传感器误差显式地包含进光流计算, 因而稳定性有所提高。本文所提算法将系统误差包含进光流计算, 并通过TLS方法求解光流, 因而相较于DC方法, 所得光流稳健性及估计精度皆有明显改善。

**实验2** 图3为快速运动场景下所采集的连续4帧图片, 图4(a), 4(b), 4(c), 4(d)分别为HS, LK, DC方法及本文算法对3帧、4帧; 4帧、5帧; 5帧、6帧求解所得光流。由图4可得与实验1类似结论。

为定量评估算法所得光流稳健性, 根据文献<sup>[22]</sup>, 可采用如下性能指标: 平均角误差 $\bar{\psi}$ , 平均角度标准差 $\sigma_\psi$ 和绝对平均误差 $\bar{\xi}$ 。角误差由Barron等人<sup>[22]</sup>提出, 其计算公式为

$$\psi = \arccos(\mathbf{v}_c \cdot \mathbf{v}_e) \quad (21)$$

式中,  $\mathbf{v}_c, \mathbf{v}_e$ 分别为实际及估计光流场的时域扩展。设 $\mathbf{v}_{c1}, \mathbf{v}_{e1}$ 分别为时域间隔 $\delta t$ 的两帧图像间的实际及估计光流场, 则

$$\mathbf{v}_c = (\mathbf{v}_{c1}^T, \delta t)^T, \mathbf{v}_e = (\mathbf{v}_{e1}^T, \delta t)^T \quad (22)$$

令 $\mathbf{v}_{c1} = (u_c, v_c)^T$ ,  $\mathbf{v}_{e1} = (u_e, v_e)^T$ , 代入式(21)得

$$\psi = \arccos \left( \frac{u_c u_e + v_c v_e + \delta t^2}{\sqrt{(v_c)^2 + \delta t^2 + (u_c)^2} + v \sqrt{(u_e)^2 + \delta t^2 + (v_e)^2}} \right) \quad (23)$$

光流平均角度误差 $\bar{\psi}$ , 平均角度标准差 $\sigma_\psi$ , 绝对平均误差 $\bar{\xi}$ 可分别表示如式(24):

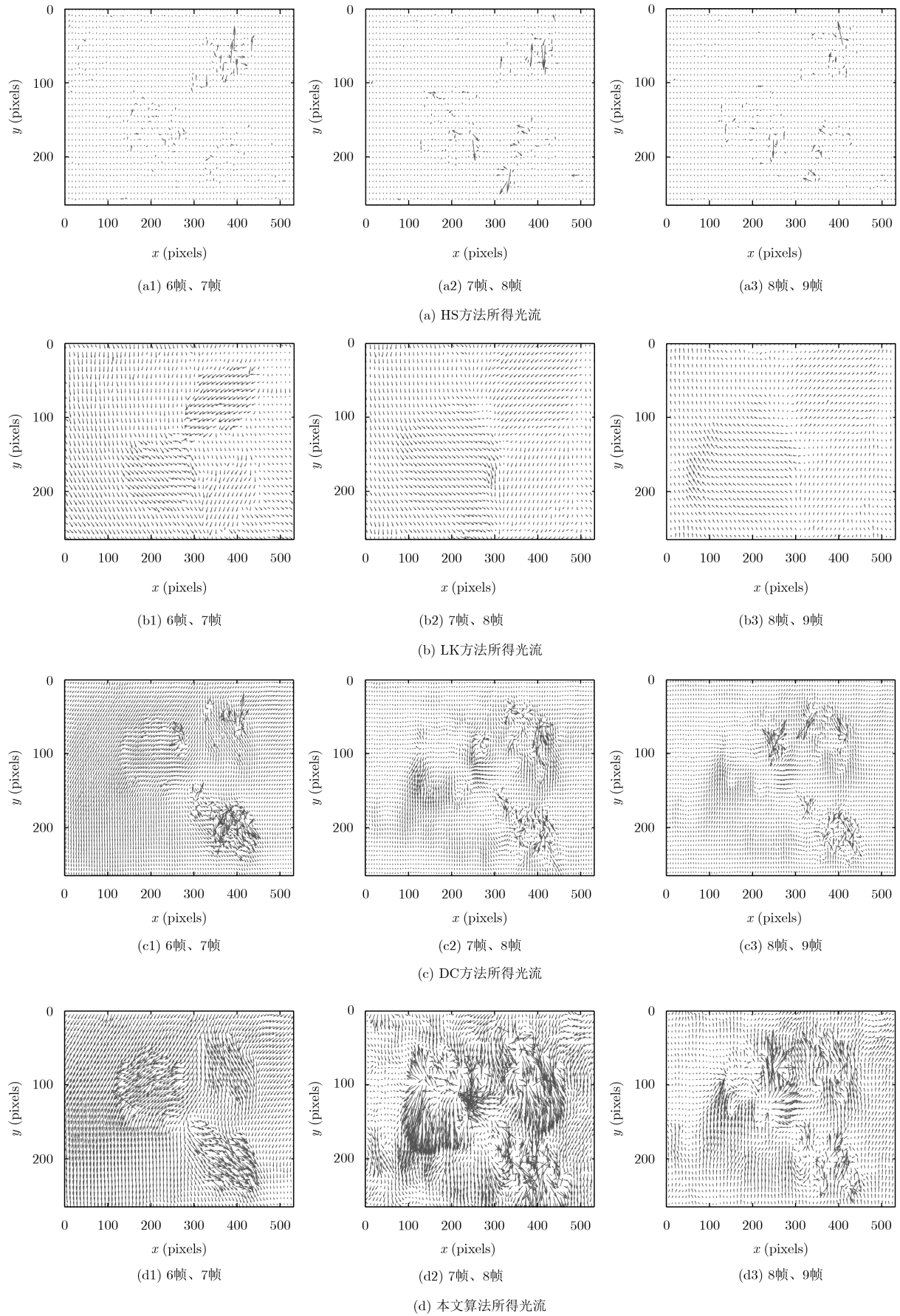


图 2 慢速运动场景下所得光流



图3 快速运动场景下所采集的连续4帧图片

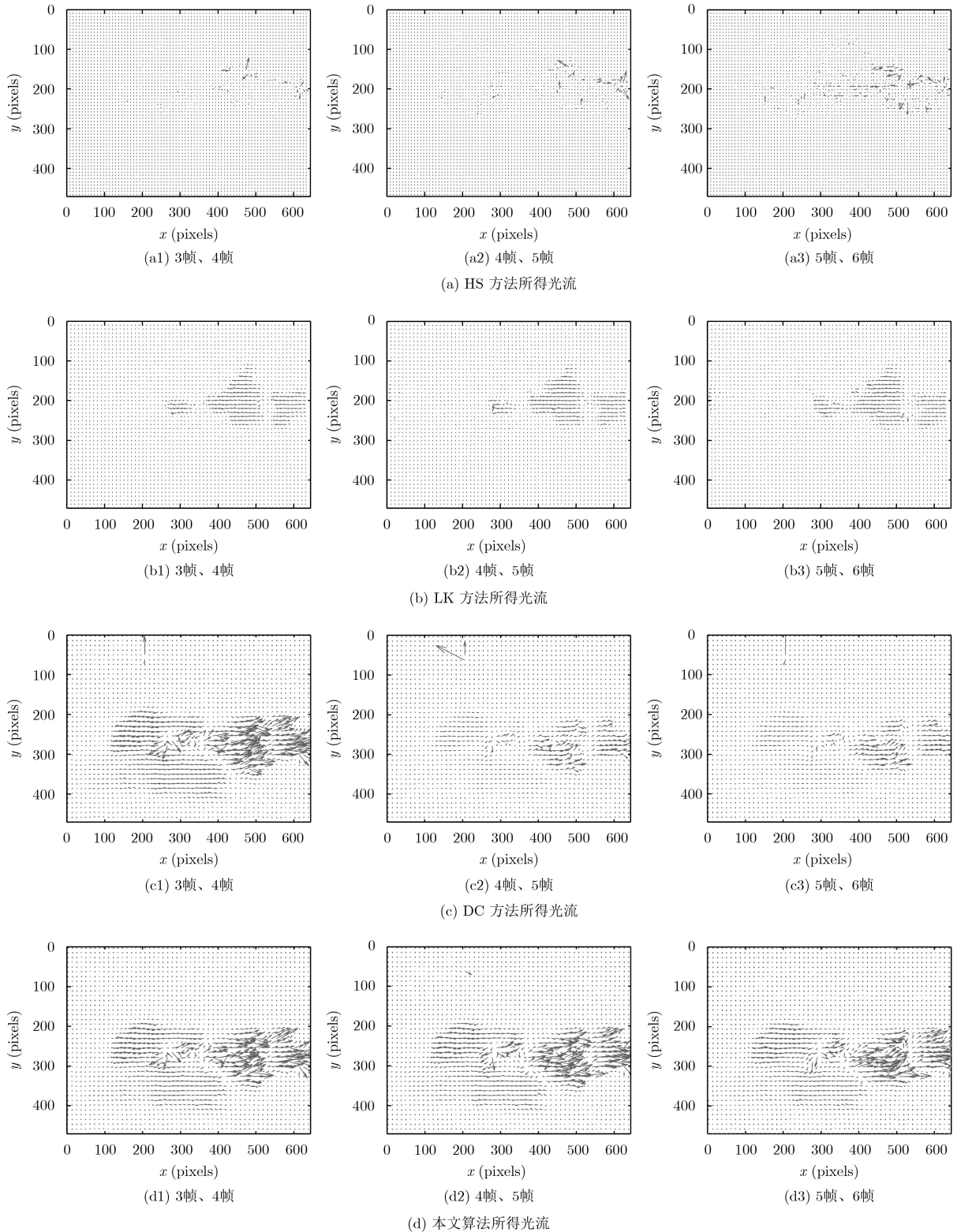


图4 快速运动场景下所得光流

$$\left. \begin{aligned} \bar{\psi} &= \left( \sum_{i=1}^N \psi_i \right) / N \\ \sigma_{\psi} &= \sqrt{\left( \sum_{i=1}^N (\psi_i - \bar{\psi})^2 \right) / (N - 1)} \\ \bar{\xi} &= \left( \sum_{i=1}^N \|v_c - v_e\| \right) / N \end{aligned} \right\} (24)$$

**实验 3** 慢速和快速运动中相邻两帧图像所得

光流平均角度误差、平均角度标准差及绝对平均误差随迭代次数的变化曲线趋势基本一致。其中， $E$ 、 $F$ 、 $H$ 分别为平均角度误差，平均角度标准差，绝对平均误差。图5(a)、图5(b)为慢、快速运动场景下6帧，7帧和3帧，4帧相邻两帧图像所得光流 $E$ 、 $F$ 、 $H$ 随迭代次数的变化曲线。由图5(a)可知，6帧，7帧所得上述3种光流性能参数在100次迭代时收敛。由图5(b)也可得与图5(a)相同结论。此外，由图5(a)、图5(b)可得，随着迭代次数增加，3项光流性能参数皆趋于平稳，因而将算法迭代次数设置为100。

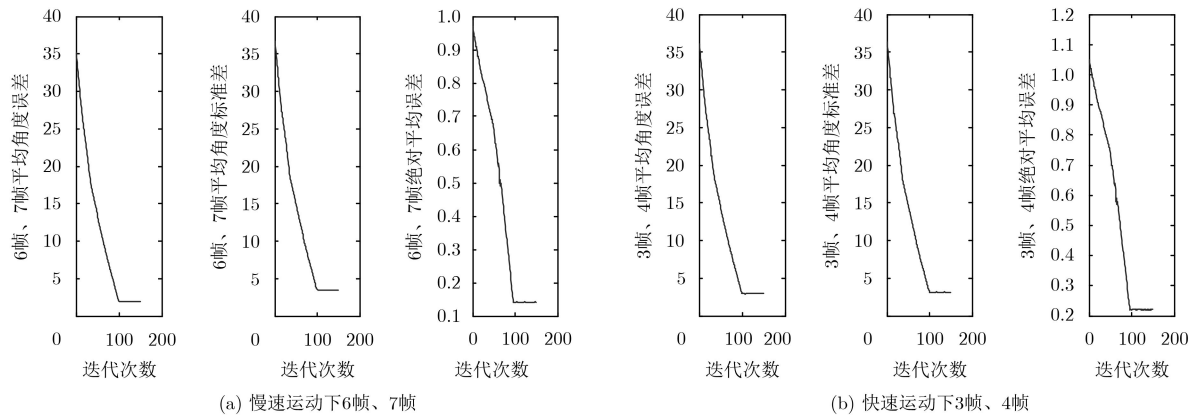


图 5 不同运动场景下相邻2帧图像所得光流平均角度误差、平均角度标准差及绝对平均误差随迭代次数变化

**实验 4** 表1、表2分别为慢、快速运动场景下对连续4帧图像进行光流估计所得光流性能参数，其中， $E$ 、 $F$ 、 $H$ 分别为平均角度误差，平均角度标准差，绝对平均误差。由表1、表2可知，基于光流场整体平滑假设的HS方法所得 $E$ 、 $F$ 、 $H$ 较大；而基于局部平滑假设的LK方法，相较于HS方法， $E$ 、 $F$ 、 $H$ 有所降低；对比HS及LK方法，考虑传感器误差

的DC方法所得相应指标明显降低。本文算法则由于综合考虑了测量误差及系统误差，并利用TLS求解光流场，因而与上述算法相比，所得 $E$ 、 $F$ 、 $H$ 下降最为显著。综上所述，相较于HS、LK以及DC方法，本文算法所得光流估计精度及稳健性较好。

**实验 5** 在如前所述软硬件配置环境下，评估算法运行时间以验证算法复杂度。由表3可知，

表 1 慢速运动下光流性能参数

算法类型	$E$			$F$			$H$		
	6帧、7帧	7帧、8帧	8帧、9帧	6帧、7帧	7帧、8帧	8帧、9帧	6帧、7帧	7帧、8帧	8帧、9帧
HS	11.56	11.48	11.51	12.07	11.98	12.05	0.79	0.76	0.80
LK	7.64	7.57	7.60	8.39	8.36	8.38	0.68	0.64	0.67
DC	3.21	3.19	3.34	3.45	3.42	3.47	0.34	0.36	0.32
本文算法	1.95	1.89	1.94	2.26	2.23	2.25	0.18	0.16	0.17

表 2 快速运动下光流性能参数

算法类型	$E$			$F$			$H$		
	3帧、4帧	4帧、5帧	5帧、6帧	3帧、4帧	4帧、5帧	5帧、6帧	3帧、4帧	4帧、5帧	5帧、6帧
HS	12.23	12.20	12.27	12.59	12.54	12.57	0.91	0.93	0.90
LK	8.76	8.75	8.78	9.12	9.08	9.10	0.78	0.76	0.77
DC	4.89	4.78	4.82	4.35	4.33	4.36	0.34	0.36	0.35
本文算法	2.08	2.11	2.13	2.47	2.46	2.41	0.26	0.23	0.25

表3 求解光流所需时间(s)

算法类型	慢速运动耗时			快速运动耗时		
	6帧、7帧	7帧、8帧	8帧、9帧	3帧、4帧	4帧、5帧	5帧、6帧
HS光流法	4.42	4.38	4.45	5.58	5.39	5.45
LK光流法	4.14	4.03	4.18	4.67	4.31	4.46
DC光流法	3.23	3.19	3.42	3.53	3.42	3.47
本文算法	2.26	2.24	2.31	2.50	2.46	2.41

慢、快速运动场景下，本文算法相较于HS、LK及DC方法，求解光流所需时间较少，因而复杂度较低。

## 6 结束语

针对由光照条件变化及传感器所引起的系统误差导致光流估计精度较低及稳健性较差的问题，本文提出一种基于小波多分辨理论的稳健光流估计方法。所提算法基于小波多尺度分辨率特性，将系统误差显式地包含进光流估计以改善光流计算的稳健性及估计精度，并利用TLS方法求解超定小波光流方程组以获得具有较高估计精度及稳健性的光流矢量。仿真结果表明，与Lucas-Kanade(LK)，Horn-Schunck(HS)及DC方法相比，本文算法可显著改善光流估计精度及稳健性。

## 参考文献

- [1] BLESER G and HENDEBY G. Using optical flow as lightweight SLAM alternative[C]. International Symposium on Mixed and Augmented Reality, Orlando, USA, 2009, 175–176. doi: [10.1109/ISMAR.2009.5336475](https://doi.org/10.1109/ISMAR.2009.5336475).
- [2] ZHANG Congxuan, Ge Liyue, CHEN Zhen, *et al.* Guided filtering: Toward edge-preserving for optical flow[J]. *IEEE Access*, 2018, 6: 26958–26970. doi: [10.1109/ACCESS.2018.2831920](https://doi.org/10.1109/ACCESS.2018.2831920).
- [3] GOPPERT J, YANTEK S, and HWANG I. Invariant Kalman filter application to optical flow based visual odometry for UAVs[C]. IEEE Ninth International Conference on Ubiquitous and Future Networks, Milan, Italy, 2017: 99–104. doi: [10.1109/ICUFN.2017.7993755](https://doi.org/10.1109/ICUFN.2017.7993755).
- [4] PASTOR-MORENO D, SHIN H S, and WALDOCK A. Optical flow localisation and appearance mapping (OFLAAM) for long-term navigation[C]. IEEE International Conference on Unmanned Aircraft Systems, Colorado, USA, 2015: 980–988. doi: [10.1109/ICUAS.2015.7152387](https://doi.org/10.1109/ICUAS.2015.7152387).
- [5] CHAMORRO-MARTINEZ J and FERNANDEZ-VALDIVIA J. A new approach to motion pattern recognition and its application to optical flow estimation[J]. *IEEE Transactions on Systems Man & Cybernetics Part C*, 2006, 37(1): 39–51. doi: [10.1109/TSMCC.2006.876044](https://doi.org/10.1109/TSMCC.2006.876044).
- [6] HORN B K P and SCHUNCK B G. Determining optical flow[J]. *Artificial Intelligence*, 1981, 17(1/3): 185–203. doi: [10.1016/0004-3702\(81\)90024-2](https://doi.org/10.1016/0004-3702(81)90024-2).
- [7] LUCAS B D and KANADE T. An iterative image registration technique with an application to stereo vision[C]. International Joint Conference on Artificial Intelligence, Vancouver, Canada, 1981: 674–679.
- [8] DRULEA M and NEDEVSCI S. Total variation regularization of local-global optical flow[C]. IEEE International Conference on Intelligent Transportation Systems, Washington, DC, USA, 2011: 318–323. doi: [10.1109/ITSC.2011.6082986](https://doi.org/10.1109/ITSC.2011.6082986).
- [9] NIU Yan, XU Zhiwen, CHE Xiangjiu, *et al.* Dynamically removing false features in pyramidal lucas-kanade registration[J]. *IEEE Transactions on Image Processing*, 2014, 23(8): 3535–3544. doi: [10.1109/TIP.2014.2331140](https://doi.org/10.1109/TIP.2014.2331140).
- [10] 田天, 周兵, 李波, 等. 基于解析小波的光流计算方法[J]. 北京航空航天大学学报, 2003, 29(6): 548–551. doi: [10.13700/j.bh.1001-5965.2003.06.019](https://doi.org/10.13700/j.bh.1001-5965.2003.06.019).
- [11] TIAN Tian, ZHOU Bing, LI Bo, *et al.* Optical flow computation based on analytic wavelet[J]. *Journal of Beijing University of Aeronautics and Astronautics*, 2003, 29(6): 548–551. doi: [10.13700/j.bh.1001-5965.2003.06.019](https://doi.org/10.13700/j.bh.1001-5965.2003.06.019).
- [12] MAGAREY J and KINGSBURY N. Motion estimation using a complex-valued wavelet transform[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2002, 46(4): 1069–1084. doi: [10.1109/78.668557](https://doi.org/10.1109/78.668557).
- [13] WU Yute, KANADE T, COHN J, *et al.* Optical flow estimation using wavelet motion model[C]. IEEE International Conference on Computer Vision, Bombay, India, 1998: 992–998. doi: [10.1109/ICCV.1998.710837](https://doi.org/10.1109/ICCV.1998.710837).
- [14] 项学智, 赵春晖. 形态梯度恒常的复值小波光流求解[J]. 哈尔滨工程大学学报, 2008, 29(8): 872–876. doi: [10.3969/j.issn.1006-7043.2008.08.020](https://doi.org/10.3969/j.issn.1006-7043.2008.08.020).
- [15] XIANG Xuezi and ZHAO Chunhui. An estimation of complex wavelet optical flow with invariant morphological gradient[J]. *Journal of Harbin Engineering University*, 2008, 29(8): 872–876. doi: [10.3969/j.issn.1006-7043.2008.08.020](https://doi.org/10.3969/j.issn.1006-7043.2008.08.020).
- [16] DEMONCEAUX C and KACHI-AKKOUCHE D. Optical flow estimation in omnidirectional images using wavelet approach[C]. IEEE International Conference on Computer Vision and Pattern Recognition, Madison, USA, 2003: 71–76. doi: [10.1109/CVPRW.2003.10080](https://doi.org/10.1109/CVPRW.2003.10080).

- [15] SCHAFFRIN B and FELUS Y A. On the multivariate total least-squares approach to empirical coordinate transformations. Three algorithms[J]. *Journal of Geodesy*, 2008, 82(6): 373–383. doi: [10.1007/s00190-007-0186-5](https://doi.org/10.1007/s00190-007-0186-5).
- [16] NIAZ M T, IMDAD F, KIM S, *et al.* Total least-square-based receiver for asymmetrically clipped optical-orthogonal frequency divisional multiplexing visible light communication system[J]. *IET Optoelectronics*, 2017, 11(4): 129–133. doi: [10.1049/iet-opt.2015.0133](https://doi.org/10.1049/iet-opt.2015.0133).
- [17] ARTYUSHENKO V M and VOLOVACH V I. The effect of multiplicative noise on probability density function of signal and additive noise[C]. *IEEE Workshop on Electronic and Networking Technologies*, Moscow, Russia, 2018: 1–5. doi: [10.1109/MWENT.2018.8337270](https://doi.org/10.1109/MWENT.2018.8337270).
- [18] DATESMAN A. Shot noise in radiobiological systems[J]. *Journal of Environmental Radioactivity*, 2016, 164: 365–368. doi: [10.1016/j.jenvrad.2016.06.017](https://doi.org/10.1016/j.jenvrad.2016.06.017).
- [19] CELLA G. Thermal noise correlations and subtraction[J]. *Physics Letters A*, 2017, 382: 2269–2274. doi: [10.1016/j.physleta.2017.06.026](https://doi.org/10.1016/j.physleta.2017.06.026).
- [20] SHOU Guofa, XIA Ling, JIANG Mingfeng, *et al.* Truncated total least squares: A new regularization method for the solution of ECG inverse problems[J]. *IEEE Transactions on Bio-medical Engineering*, 2008, 55(4): 1327–1335. doi: [10.1109/TBME.2007.912404](https://doi.org/10.1109/TBME.2007.912404).
- [21] 曲付勇, 孟祥伟. 基于约束总体最小二乘方法的到达时差到达频差无源定位算法[J]. *电子与信息学报*, 2014, 36(5): 1075–1081. doi: [10.3724/SP.J.1146.2013.01019](https://doi.org/10.3724/SP.J.1146.2013.01019).
- QU Fuyong and MENG Xiangwei. Source localization using TDOA and FDOA measurements based on constrained total least squares algorithm[J]. *Journal of Electronics & Information Technology*, 2014, 36(5): 1075–1081. doi: [10.3724/SP.J.1146.2013.01019](https://doi.org/10.3724/SP.J.1146.2013.01019).
- [22] BARRON J L, FLEET D J, and CHEMIN S. Performance of optical flow techniques[C]. *IEEE International Conference on Computer Vision and Pattern Recognition*, Champaign, USA, 2002: 236–242. doi: [10.1109/CVPR.1992.223269](https://doi.org/10.1109/CVPR.1992.223269).
- 王洪雁：男，1979年生，副教授，博士，主要研究方向为MIMO雷达信号处理、毫米波通信、无人机控制。
- 郑佳：男，1990年生，硕士生，研究方向为机器视觉、无人机容错控制。
- 裴炳南：男，1956年生，教授，博士，博士生导师，主要研究方向为雷达信号处理、毫米波通信。