

基于FFT滑动平均极大似然法的正弦信号频率估计

黄玉春 黄载禄 黄本雄 徐书华
(华中科技大学电信系 武汉 430074)

摘要: 该文基于正弦信号采样序列的FFT频谱,利用谱图上多条显著谱线与峰值谱线实部之间的关系,推导建立了一用于信号频率估计的滑动平均模型,基于此模型得出的极大似然频率估计器结合传统的Quinn方法后得到一种新的基于FFT谱滑动平均极大似然估计算法。仿真实验表明该算法精确有效,估计性能优于Rife, Quinn法,十分接近CRLB下限,计算量不大且信噪比门限要求可降至-9dB左右。

关键词: 频率估计; FFT; 滑动平均极大似然估计

中图分类号: TN911.23

文献标识码: A

文章编号: 1009-5896(2008)04-0831-05

FFT-Based Moving Average Maximum Likelihood Single-tone Frequency Estimation

Huang Yu-chun Huang Zai-lu Huang Ben-xiong Xu Shu-hua

(Dept. of Electronics & Information, Huazhong Univ. of Science and Technology, Wuhan 430074, China)

Abstract: Based on the FFT of a single-tone sequence, this paper presents a novel Moving Average Maximum Likelihood (MAML) frequency estimator, which develops a Moving Average (MA) model by the real part relationship between different significant FFT coefficients firstly and a MA model-based maximum likelihood estimation technique. Simulation results show that the algorithm is effective and the proposed estimator outperforms the traditional Rife's and Quinn's estimator in both accuracy and the CRLB approximate RMSE of estimation. It is also shown that MAML has the merit of little computation effort and as lower SNR threshold as to -9dB.

Key words: Frequency estimation; FFT; Moving Average Maximum Likelihood (MAML) estimation

1 引言

低信噪比条件下通信信号辐射源个体的在线自动识别问题是目前电子侦察领域中亟待解决的问题,其关键是通信信号的细微特征提取,迫切需要一种高性能的单音(如导频等)信号的频率估计方法;同时噪声中的正弦信号频率的估计近年来在雷达、声纳、通信、生物及振动信号处理等领域也受到了极大的关注。基于参数模型的谱估计、最大熵估计、MLE^[1]、迭代滤波^[2]及SVD, MUSIC, ESPRIT^[3], PHD^[4]等子空间法均借助于一定的非线性运算工具或模型假设来进行频率估计,具有频率分辨力高且不依赖于数据长度等优点,但对于长序列而言,其模型误差敏感、运算量大,不利于实时处理;大量基于时域相位的方法,包括Kay提出的带权线性预测频率估计器(WLP)^[5]及其Fitz等改进^[6,7], Brown等提出的结合低通滤波后的线性预测器^[8]、So等结合线性预测和带权最小二乘思想得到的通用带权线性预测估计器(GWLP)^[9]等,计算量小,但信噪比要求高、频率估计性能不一致、估计范围有限、存在相位解绕模糊等问题;而基于DFT的谱分析方法,因为FFT具有运算速度快、对正弦信号具有显著的信噪比增益、算法参数不敏感等优点,特别适合于实时信号处理。目前硬件可实现的正弦信号频率估计算法

主要是基于FFT的,采用高速DSP专用芯片实现。但由于加窗截断和栅栏效应的存在,当限长采样序列频率不是DFT频率分辨率的整数倍时,正弦信号频谱发生泄漏,即使无噪声影响,信号真实频率仍落于主瓣内两根离散FFT谱线之间,导致频率估计无法满足精度要求,各种插值策略应运而生。目前基于FFT的正弦信号频率估计分为两个过程来实现:粗估计和精估计。粗估计通过直接观察FFT幅谱最大值点来完成,受观测时长 T 的限制,误差范围为 $\pm 1/(2T)$ 。精估计则是根据正弦信号的线谱特征,借助一定的插值策略准确估计出信号真实频率与粗估值之间的差距 $\delta/T, \delta \in [-0.5, 0.5]$ 。当然,这里的插值是一种广义的,可能伴随着各种频谱细化和校正技术^[10],但其代价是计算量的显著增大。目前常用的FFT插值算法^[11,12]有:双线极值拟合法、对称频率内插法、单线相位法^[13]、双线幅度Rife法^[14-16]、结合幅度与相位的双线Quinn法^[17]等。其中,Rife和Quinn法分别基于主瓣内两根谱线幅度比和实部比进行插值,不仅在没有噪声或信噪比较高时可十分准确地估计出信号真实频率,而且简单有效,故被工程实际广泛采用。但前者确定第2大谱线时易发生错误,从而导致插值方向错;后者依据峰值谱线左右两边各一根谱线的相位情况避免 $|\delta|$ 较小时的性能急剧变差的问题,但由于易受随机相位噪声影响而使得估值均方根差波动较大。特别是低信噪比时,两者均极大地受制于随机噪声。

受Quinn方法的启发,本文首先根据单次FFT后峰值谱线周围多条谱线的实部信息得到一序列类Quinn法估计器,由于随机噪声的影响,该序列估计器各自对频率精插值的贡献随机变化。传统Quinn法选取主瓣内两谱线的实部比来进行频率估计,虽然主瓣内谱线相对受初相和随机噪声的影响较小,但Quinn法忽略了其他谱线对频率估计的贡献,信噪比门限要求高。因此,本文提出了一种鲁棒性更强的基于FFT谱的滑动平均极大似然估计法。该方法假设噪声是加性高斯白噪声,在此前提下建立了一个能结合各谱线实部信息对正弦信号频率估计的贡献的滑动平均(MA)模型,然后根据最大似然法估计出了其频率,并利用Quinn法 $|\delta|$ 小时良好抗噪性有效弥补了模型建立中引入的近似误差。计算机Monte-Carlo模拟实验表明本文方法准确有效、估计均方根差接近CRLB限、计算量不大且信噪比门限要求更低,比较适合于强干扰背景下快速、精确的频率估计。

2 正弦信号频率估计的线谱模型

设正弦信号采样序列为

$$x[n] = A_0 \cos(\Omega_0 n + \varphi_0) + r[n], \quad 0 \leq n \leq N-1 \quad (1)$$

其中 A_0, φ_0 分别为正弦信号的幅度和初相; $\Omega_0 = 2\pi f_0 / f_s$, f_0 为待估计的信号频率, f_s 为信号的采样率; N 为采样点数; $r[n]$ 为随机高斯白噪声, 方差为 σ_r^2 。

当 $N \gg 1$ 时,该正弦采样序列载频附近正半部分的频谱可表示为

$$WX(f) = \frac{A_0}{2} N e^{j[\varphi_0 - \pi(f-f_0)T]} \frac{\sin[\pi(f-f_0)T]}{\pi(f-f_0)T} \cdot \left\{ a + \frac{b[(f-f_0)T]^2}{1 - [(f-f_0)T]^2} \right\} + WR(f) \quad (2)$$

其中 $T = N / f_s$ 为采样时长; a, b 为余弦窗系数,由于加窗会减少有效数据长度,从而造成FFT谱的信噪比增益损失3~5dB,故此处只考虑矩形窗情形,即 $a = 1, b = 0$; $WR(f)$ 是 $r[n]$ 的DTFT谱,故也是随机的。

如图1所示,设 k_0 为式(2)中谱线幅值最大值点,频率分辨率 $\Delta f = 1/T$,频率粗估值为 $k_0 \Delta f$,则以 k_0 为中心,正弦信号的线谱模型如下:

$$WX(k) = \frac{A_0}{2} N e^{j[\varphi_0 - \pi(k-\delta)]} \frac{\sin[\pi(k-\delta)]}{\pi(k-\delta)} + WR(k) \quad (3)$$

其中 k 代表偏离 k_0 谱线的序号值,可正可负,如DFT谱中第 k_0 谱线在新线谱模型中的序号值变为0,其他依此类推; δ 为

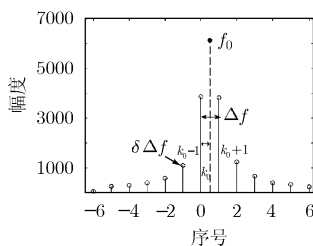


图1 正弦采样序列的线谱模型(横轴上面标的是DFT索引值,下面是LSM索引值)

正弦信号真实频率与粗估频率间的差值关于 Δf 的倍数, $\delta \in [-0.5, 0.5]$; $WR(k)$ 为 $r[n]$ 的DFT谱,也是一高斯白噪声过程,方差为 $N\sigma_r^2$ 。显然正弦信号频率可由以下公式估出:

$$f_0 = (k_0 + \delta)\Delta f \quad (4)$$

3 基于FFT的滑动平均极大似然频率估计法及其改进

由线谱模型式(3),仿照Quinn^[11,17]方法,在不考虑噪声的理想情况下,可得

$$\frac{\text{Re}\{WX(0)\}}{\text{Re}\{WX(k)\}} = 1 - \frac{k}{\delta} \quad (5)$$

其中 $\text{Re}\{\bullet\}$ 为取实部操作。可知式(5)构成一序列频率精估计器,是Quinn法的一般化扩展。该序列估计器的相位之间满足如下关系:

$$\begin{cases} \theta_- = \theta_0 \\ \theta_+ - \theta_0 = \pi \end{cases} \text{ s.t. } \delta > 0; \begin{cases} \theta_+ = \theta_0 \\ \theta_- - \theta_0 = \pi \end{cases} \text{ s.t. } \delta < 0 \quad (6)$$

其中 $\theta_-, \theta_0, \theta_+$ 分别代表式(3)中负、零、正序号(即 $k < 0, k = 0, k > 0$)谱线的相位。

若考虑噪声项 $WR(k)$ 的影响,不失一般性,设 $\delta > 0, k > 0$,则

$$y_k = \frac{\text{Re}\{WX(0)\}}{\text{Re}\{WX(k)\}} = \frac{\text{Re}\{-A_0 e^{j\phi} + Z_0\}}{\text{Re}\{A_k e^{j\phi} + Z_k\}} = -\frac{-X_0 X_k - Y_0 Y_k + A_0 A_k + A_0 U_k - A_k U_0}{|Z_k|^2 + A_k^2 + 2A_k U_k} \quad (7)$$

其中 A_i 为式(3)中 $k = i$ 线谱的理想幅值; ϕ 为相位,幅值前的“-”表示相位差为 π 。 $Z_i = WR(i) = X_i + jY_i$; $U_i = X_i \cos \phi + Y_i \sin \phi$ 是一高斯白噪声,方差 $\sigma_U^2 = N\sigma_r^2/2$ 。当 $|Z_k| \ll |A_k|$ 时,根据Taylor级数展开,忽略高次项, y_k 可简化为

$$y_k = -\frac{A_0}{A_k} \cdot \frac{1 + U_k/A_k - U_0/A_0}{1 + 2U_k/A_k} \approx -\frac{A_0}{A_k} \left(1 - \frac{U_k}{A_k} - \frac{U_0}{A_0} \right) \quad (8)$$

由式(6)可知式(8)中第1项 $-A_0/A_k$ 是理想无噪声实部比,故结合式(5),式(8),可得如下滑动平均模型:

$$\Delta y_k = y_k - y_{k-1} = -\frac{1}{\delta} + \frac{A_0}{A_k^2} U_k - \frac{A_0}{A_{k-1}^2} U_{k-1} + \left(\frac{1}{A_k} - \frac{1}{A_{k-1}} \right) U_0 \quad (9)$$

根据最大似然准则, δ 的估计 $\hat{\delta}$ 应为下式的最小值点

$$(\Delta \mathbf{y}^T - \boldsymbol{\beta}) \mathbf{K}^{-1} (\Delta \mathbf{y} - \boldsymbol{\beta}^T) \quad (10)$$

其中 $\Delta \mathbf{y} = [\Delta y_0, \Delta y_1, \dots, \Delta y_{k_N-1}]^T$, $\boldsymbol{\beta} = [-1/\delta, -1/\delta, \dots, -1/\delta]$, \mathbf{K} 为 $k_N \times k_N$ 的协方差阵, k_N 为所选择的谱线数。易知, \mathbf{K} 中元素满足以下性质:

$$\begin{aligned} K_0 &= E[\Delta y_k \Delta y_k] = \sigma_U^2 \left[\frac{A_0^2}{A_k^4} + \frac{A_0^2}{A_{k-1}^4} + \left(\frac{1}{A_k} - \frac{1}{A_{k-1}} \right)^2 \right] \\ K_1 &= E[\Delta y_k \Delta y_{k+1}] = \sigma_U^2 \left[-\frac{A_0^2}{A_k^4} + \left(\frac{1}{A_{k+1}} - \frac{1}{A_k} \right) \left(\frac{1}{A_k} - \frac{1}{A_{k-1}} \right) \right] \\ K_x &= E[\Delta y_k \Delta y_{k+x}] = \sigma_U^2 \left[\left(\frac{1}{A_{k+x}} - \frac{1}{A_{k+x-1}} \right) \left(\frac{1}{A_k} - \frac{1}{A_{k-1}} \right) \right]; x \geq 2 \end{aligned} \quad (11)$$

实际计算时, 式(11)中 A_i 可用 $|WX(i)|$ 近似代替。

求式(10)的最小值问题, 实际上是一简单的约束二次规划问题。由相关理论可得出如下 δ 的估计量:

$$\hat{\delta} = -\frac{2 \cdot \mathbf{E} \cdot \mathbf{K}^{-1} \cdot \mathbf{E}^T}{\mathbf{E} \cdot \mathbf{K}^{-1} \cdot \Delta \mathbf{y} + \Delta \mathbf{y}^T \cdot \mathbf{K}^{-1} \cdot \mathbf{E}^T} \quad (12)$$

其中 $\mathbf{E} = [1, 1, \dots, 1]$ 。至此, 基于FFT谱的滑动平均极大似然频率估计器已经得出。但由于式(8), 式(11)计算过程中使用了近似处理, 对于 $|\delta|$ 较小时情形, 由于 $A_k (k \geq 1)$ 均较小, 近似误差较大。考虑到Quinn方法在 $|\delta|$ 较小时的良好性能, 结合滑动平均极大似然法和Quinn法, 得到如下改进的滑动平均极大似然频率估计法:

改进的基于FFT谱的滑动平均极大似然法正弦信号频率估计算法:

(1) 令 $W = \text{FFT}(x)$, $Y[n] = |W[n]|^2, n = 0, \dots, N-1$, $c = 1.3$;

(2) 快速查找 $Y[n]$ 的最大值点 k_0 , 即

$$k_0 = \arg \max_n \{Y[n]\}$$

(3) 若 $\frac{|W[k_0-1]|}{|W[k_0+1]|} > c$ 或 $\frac{|W[k_0-1]|}{|W[k_0+1]|} < \frac{1}{c}$, 则转(6); 否则

继续;

(4) 计算Quinn估计器变量:

$$\alpha_1 = \frac{\text{Re}\{W[k_0+1]\}}{\text{Re}\{W[k_0]\}}, \delta_1 = \frac{\alpha_1}{\alpha_1 - 1}, \alpha_2 = \frac{\text{Re}\{W[k_0-1]\}}{\text{Re}\{W[k_0]\}},$$

$$\delta_2 = \frac{-\alpha_2}{\alpha_2 - 1};$$

(5) Quinn法估计:

若 $\delta_1 > 0, \delta_2 > 0$, 则 $\hat{\delta} = \delta_1$; 否则 $\hat{\delta} = \delta_2$ 。转(8)继续频率估计

(6) 计算滑动平均极大似然法估计器变量: (a) 计算指定频段内的 y_k , 从而得出 Δy ; (b) 据式(11)计算所选谱线的协方差阵 \mathbf{K} ;

(7) 据式(12)得出滑动平均极大似然法估计;

(8) 最后据式(4)计算正弦信号的频率估计。

可以看出, Quinn法和滑动平均极大似然法估计器的结合是根据峰值谱线左右紧邻谱线的幅值比是否超过预先设定的阈值 c 来控制的, 一般当 $-0.2 < \delta < 0$ 时, 由式(3)知理想对称幅值比 $\frac{|W[k_0-1]|}{|W[k_0+1]|} \in (1, 1.5)$; 当 $0 < \delta < 0.2$ 时,

$\frac{|W[k_0-1]|}{|W[k_0+1]|} \in \left(\frac{1}{1.5}, 1\right)$ 。故可设定 $1 < c < 1.5$, 可根据信噪比

情况自行适当调整, 仿真表明 $c = 1.3$ 即可。

4 仿真结果

本节给出本文所提方法的计算机仿真结果并与Rife、Quinn方法进行了比较。

设式(1)中噪声为零均值高斯白噪声, 信号幅度在15~25范围内随机均匀取定, 初相服从 $0 \sim 2\pi$ 上的均匀分布, 信号频率在150Hz左右, 表示为 $f_0 = 150 + \delta \Delta f$, 其中 Δf 为频率分辨率, 由采样率 f_s 和采样长度 N 共同决定, 这里取: $f_s = 600\text{Hz}, N = 256$; 为观察 δ 全部可能取值时各正弦信号频率估计器的性能, 这里将 δ 在 $-0.5 \sim 0.5$ 区间上的取值均匀分成10等份, 对每一点上的 δ 值运行500次Monte-Carlo仿真, 仿真结果如表1所示。

由于在表1实验条件下, 频率粗估计的误差约为1.2Hz, 幅度和相位均未知时正弦信号频率估计的下限 $\sigma_{\text{CRB}} = 0.0405$ [1,14], 因此可看出4种估计器不论是从估计精度还

表1 几种频率估计器的估计性能比较*

f_0 (Hz)	δ	Rife估计器		Quinn估计器		滑动平均极大似然法估计器		改进滑动平均极大似然法估计器	
		\bar{f}_0 (Hz)	σ_f (Hz)	\bar{f}_0 (Hz)	σ_f (Hz)	\bar{f}_0 (Hz)	σ_f (Hz)	\bar{f}_0 (Hz)	σ_f (Hz)
148.8281	-0.5	148.8256	0.0417	148.8122	0.0594	148.8284	0.0408	148.8353	0.0403
149.0625	-0.4	149.065	0.0444	149.0411	0.0927	149.0638	0.0443	149.0635	0.0406
149.2969	-0.3	149.2991	0.0456	149.2085	0.3688	149.2790	0.0599	149.2853	0.0488
149.5313	-0.2	149.5793	0.2108	149.6265	0.3291	149.4970	0.0639	149.5215	0.0693
149.7656	-0.1	149.9226	0.2496	149.7732	0.1273	149.7002	0.4929	149.7609	0.0725
150.0000	0	150.0033	0.1225	150.0009	0.0716	150.0401	0.5838	150.0035	0.0515
150.2344	0.1	150.1056	0.2442	150.2353	0.0676	150.2002	0.3548	149.2248	0.0697
150.4688	0.2	150.4345	0.184	150.4694	0.0518	150.4798	0.0556	150.4630	0.0677
150.7031	0.3	150.7025	0.0464	150.7009	0.0432	150.7199	0.0693	150.7125	0.0548
150.9375	0.4	150.928	0.0421	150.9287	0.1499	150.9403	0.0420	150.9374	0.0419
151.1719	0.5	151.1679	0.0427	151.151	0.0591	151.1726	0.0410	151.1757	0.0439
\bar{t} (ms)		0.72		0.73		1.08		1.21	

*: $N = 256$, $\text{SNR} = 6\text{dB}$, 运行500次Monte-Carlo仿真, 频率搜索范围: 140~160Hz;

表中各符号含义如下: f_0 为真实待估计频率, \bar{f}_0 为频率估计均值, σ_f 为频率估计均方根差, \bar{t} 为平均单次估计耗时, (CPU: C1.7G, 512M RAM, 可能由于运行系统环境不同而不同)

是估计的均方根差来看均是有效的, 都较粗估计误差有很大的提高。其中, Rife估计器当 $|\delta|$ 接近0.5时, 估计均方根差接近CRB下限, 而当 $|\delta|$ 在0附近时, 由于可能存在的插值方向错误导致估计性能变差; Quinn估计器有针对性地解决了 $|\delta|$ 较小时的频率估计性能, 但可以看出存在一定的性能波动, 这主要是反映相位信息随噪声的波动较大, 且不同的随机初相取值也会影响Quinn判决器的抗噪性能。Quinn估计器虽然存在一定波动, 但从表1可以看出, $|\delta|$ 在0附近时估计性能仍强于Rife估计器很多, 且没有增加计算时间开销。从表2的后两列也可以看出, 滑动平均极大似然估计法及其改进方法在 $|\delta| > 0.1$ 时性能均十分接近于CRLB下限, 特别是改进的滑动平均极大似然估计法, 由于不存在上述两种方法在次高峰选择上存在的模棱两可性, 全部 $|\delta|$ 范围上表现均较为突出, 而由于算法处理上的近似带来的误差结合Quinn方法后很好地得到了解决。从计算时间上看, 改进的滑动平均极大似然法估计法虽略有增加但仍是实时系统所能接受的。而且, 改进的滑动平均极大似然法估计算法中, 若进一步缩小频率搜索范围, 计算耗时也会因此减少。

接下来, 进一步观察不同估计器的大致信噪比门限要求情况。这里为简单起见, 只研究Rife, Quinn及改进的滑动平均极大似然估计器的估计性能随信噪比不同的变化情况。其中 $f_0 = 151.1719$, $N = 256$, 运行500次Monte-Carlo仿真, 其他条件同上(此时Rife, Quinn估计器表现均较好, 其他情况类似)。图2是正弦信号估计的平均频率随信噪比变化情况图, 其中两条实线表示仅采用粗估计时的误差上下界, 可以看出除Quinn法有出现精度差于粗估计的波动情形外, Rife和滑动平均极大似然估计器(MAML)在信噪比大于-10dB左右时估计值与真值基本接近。图3所示是频率估计均方根差随信噪比变化情况图, 图中实线是频率粗估计可能的最大误差, 若以此作为衡量估计器的基本门限标准, MAML门限要求最低, 约为-9dB, 这主要来源于粗估计阶段; Rife估计器次之; 要求最高是Quinn估计器, 必须高于-1dB, 再次说明相位信息受噪声等影响较大。图3还表明当信噪比大于0时, 3种估计器的估计均方根差都很小。结合图2, 图3可以得出, 滑动平均极大似然估计器比Rife, Quinn估计器信噪比门限要求更低。

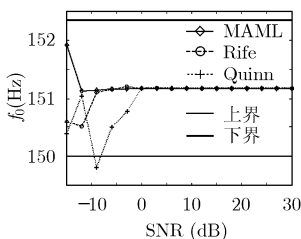


图2 估计信号频率随信噪比变化情况

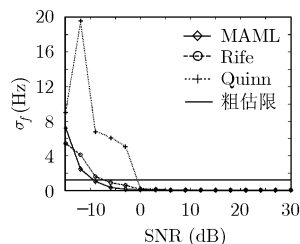


图3 频率估计均方根差随信噪比变化情况

5 结束语

本文由正弦信号采样序列的FFT谱图上峰值谱线附近多条谱线实部与峰值谱线的实部比值推导建立起来的滑动平均模型及基于此模型得到的极大似然频率估计器, 有效融合了每条谱线对频率估计的贡献, 避免了Rife, Quinn法次峰谱线选择问题, 具有精度高、估计性能好、鲁棒性强等优点, 在不增加计算量的情况下, 与Quinn方法的结合弥补了模型建立过程中的近似误差, 非常适合于估计精度要求高的各种实时低信噪比应用场合。

参考文献

- [1] Rife D C and Boorstyn R R. Single tone parameter estimation from discrete time observation. *IEEE Trans. Info. Theory*, 1974, 20(5): 591-598.
- [2] Li T H and Kedem B. Iterative filtering for multiple frequency estimation. *IEEE Trans. on Signal Processing*, 1994, 42(5): 1120-1131.
- [3] Porat B. *Digital Processing of Random Signals: Theory and Methods*. Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall, 1994, Chapter 6.
- [4] So H C and Chan K W. Reformulation of Pisarenko harmonic decomposition method for single-tone frequency estimation. *IEEE Trans. on Signal Processing*, 2004, 52(4): 1128-1135.
- [5] Kay S. A fast and accurate single frequency estimator. *IEEE Trans. on Acoust., Speech, Signal Process.*, 1989, 37(12): 1987-1990.
- [6] Fitz M P. Further results in the fast estimation of a single frequency. *IEEE Trans. on Commun.*, 1994, 42(2): 862-864.
- [7] Xiao Y C, Wei P, Xiao X C, and Tai H M. Fast and accurate single frequency estimator. *IEEE Electronics Letters*, 2004, 40(14): 1-2.
- [8] Brown T and Wang M M. An iterative algorithm for single-frequency estimation. *IEEE Trans. on Signal Processing*, 2002, 50(11): 2671-2682.
- [9] So H C and Chan K W. A generalized weighted linear predictor frequency estimation approach for a complex sinusoid. *IEEE Trans. on Signal Processing*, 2006, 54(4): 1304-1315.
- [10] 朱利民, 熊有伦. 一个通用的频谱误差校正快速算法[J]. 振动工程学报, 2001, 13(2): 15-22.
Zhu Li-min and Xiong You-lun. A efficient algorithm for spectrum error correction. *Journal of Vibration Engineering*, 2001, 13(2): 15-22.
- [11] Quinn B G and Hamman E J. *The Estimation and Tracking of Frequency*. Cambridge. Cambridge University Press, 2001, chapter 3.
- [12] 张昌菊, 唐斌. 单频信号快速频率估计算法比较及改进. 电讯技术, 2005, 45(1): 72-76.

- Zhang Chang-ju and Tang Bin. Comparison and modification of frequency estimation algorithms for single sinusoid signal. *Telecommunication Engineering*, 2005, 45(1): 72-76.
- [13] 丁康, 朱小勇. 适用于加各种窗的一种离散频谱相位差校正法[J]. 电子学报, 2001, 29(7): 32-36.
- Ding Kang and Zhu Xiao-yong. A phase difference correcting method on discrete spectrum adapting to any window function. *Acta Electronica Sinica*, 2001, 29(7): 32-36.
- [14] 齐国清, 贾欣乐. 插值 FFT 估计正弦信号频率的精度分析[J]. 电子学报, 2004, 32(4): 625-629.
- Qi Guo-qing, Jia Xin-le. Accuracy analysis of frequency estimation of sinusoid based on interpolated FFT. *Acta Electronica Sinica*, 2004, 32(4): 625-629.
- [15] Rife D C and Vincent G A. Use of the discrete Fourier transform in the measurement of frequencies and levels of tones. *Bell. Sys. Tech. J.*, 1970, 49(2): 197-228.
- [16] Jane V K, Collins W L Jr, and Davis D C. High-accuracy analog measurements via interpolated FFT. *IEEE Trans. on IM*, 1979, 28(2): 113-122.
- [17] Quinn B G. Estimation of frequency, amplitude and phase from the DFT of a time series. *IEEE Trans. on SP*, 1997, 45(3): 814-817.
- 黄玉春: 男, 1977 年生, 博士生, 研究方向为信号处理、模式识别.
- 黄载禄: 男, 1937 年生, 教授, 博士生导师, 研究方向为信号处理、移动通信系统.
- 黄本雄: 男, 1966 年生, 教授, 博士生导师, 研究方向为通信理论、通信信号处理、通信对抗.
- 徐书华: 男, 1975 年生, 博士生, 讲师, 研究方向为通信信号处理、信息论、通信网络.