

基于全相位频谱分析的相位差频谱校正法

黄翔东 王兆华

(天津大学电子信息工程学院 天津 300072)

摘要: 为精确估计噪声背景下正弦信号频率、幅值、初始相位的真实值,结合全相位 FFT 与传统 FFT 谱分析形成了一种新的相位差频谱校正法。该法计算复杂度低,方便快捷。由两种主谱线上的谱分析结果经过简单运算即可校正出频率和幅值,而直接取主谱线上的全相位 FFT 相位谱值无需校正即可得到初始相位。由于全相位 FFT 具有抑制频谱泄漏的优良特性,因此该法适合于密集频率分布场合。该法相位估计误差非常低,无噪声时处于 10^{-7} 分辨率级。

关键词: 频谱校正; 相位差; 全相位 FFT 频谱分析; 频谱泄漏

中图分类号: TN911.6

文献标识码: A

文章编号: 1009-5896(2008)02-0293-05

Phase Difference Correcting Spectrum Method Based on All-phase Spectrum Analysis

Huang Xiang-dong Wang Zhao-hua

(School of Electronics and Information Engineering, Tianjin University, Tianjin 300072, China)

Abstract: To estimate sinusoidal signal's real frequency, amplitude and original phase precisely under noisy circumstances, a novel phase difference correcting spectrum method which combines both all-phase FFT and conventional FFT is proposed. This technique is of low computation complexity and convenient. The frequency and amplitude estimation can be acquired by implementing simple operation on these two spectral analysis results at main spectral position, moreover the all-phase FFT phase-spectrum value at main spectral position can be directly viewed as the original phase without any correcting measures. Due to all-phase FFT's excellent property of inhibiting spectral leakage, the proposed method is also feasible in the cases of dense spectrum distribution. And the phase estimation error is very tiny in the 10^{-7} resolution level with no noise added.

Key words: Correcting spectrum; Phase difference; All-phase FFT spectrum analysis; Spectral leakage

1 引言

噪声背景下多频率复合正弦信号的频率、幅值和相位估计一直是国内外研究的热题^[1,2]。直接 FFT 是最粗略的频谱估计方法,但 FFT 存在很严重的频谱泄漏缺陷^[3];另外,其谱分析精度受频率分辨率 $\Delta\omega = 2\pi/N$ (N 为谱分析长度)所限^[3],由于“栅栏效应”^[3],因而无法确定信号的真实频率大小,需要进行频谱校正。

目前,国内外有 4 种离散频谱校正法:能量重心法、比值法、相位差法和 FFT+DFT 谱连续细化法^[4]。其中能量重心法和相位差法应用最广泛,但该方法需用 5 根谱线才可较精确地估计出信号频率^[4];传统相位差法可获得更高精度的频率校正,它分为两种^[5],第 1 种做法是采连续两段样本,对这两段进行 FFT,利用其对应离散谱线的相位差校正出准确频率和相位^[5],第 2 种做法是只采样一段信号,对这段序列分别进行 N 点和 $N/2$ 点的 FFT 分析,利用其相位差进行频谱校正^[5]。可以看出,两种相位差法的共同特点是对存在

时移关系的两个序列分别进行 FFT 分析,再将两次谱峰位置的分析结果进行比较而得。其中第 1 种方法优于第 2 种^[4]。

以上各传统校正法都在经典 FFT 的架构下进行,而经典 FFT 固有的频谱泄漏缺陷注定影响到其最终校正精度。文献[6]提出“全相位 FFT 频谱分析法”,相比于传统 FFT 谱分析,该法具有优良的抑制频谱泄漏性能。本文从理论上定量分析其频谱泄漏得以抑制的原因,并利用其相位谱分析的结果和传统 FFT 相位谱分析的结果形成了信号频率、幅值的“全相位相位差校正法”,它算法简单、校正精度比第 1 类相位差法略好,此外还有一个突出特点:无需校正即可获得信号初始相位的精确估计。因而具有很高的应用价值。

2 全相位 FFT 谱分析方法简述

全相位频谱分析详见文献[6],其大致过程如图 1 所示。

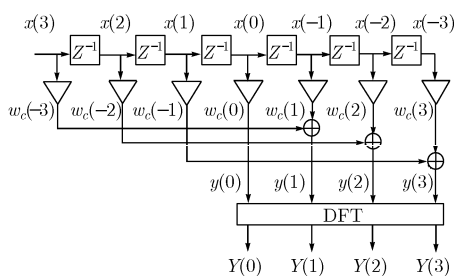
从图 1 可看出,只需用长为 $(2N-1)$ 的卷积窗 w_c 对中心样点 $x(0)$ 前后 $(2N-1)$ 个数据进行加权,然后对两两间隔为 N 的加权数据进行重叠相加形成 N 个数据,再作点数为 N 的 FFT 即得全相位谱分析结果。其中图 1 中的卷积窗由前窗 f 与翻转的后窗 b 卷积而成^[7],即

$$w_c(n) = f(n) * b(-n), \quad -N+1 \leq n \leq N-1 \quad (1)$$

显然当 f, b 为对称窗时, $w_c(n)$ 满足

2006-06-12 收到, 2006-11-24 改回

教育部博士点新教师基金(20070056105), 国家自然科学基金与民航联合基金(60776815)和天津应用基础研究计划项目(07JCZDJ06800)资助课题

图1 全相位DFT频谱分析图 ($N=4$)

$$w_c(n) = w(-n), \quad -N+1 \leq n \leq N-1 \quad (2)$$

若 $\mathbf{f} = \mathbf{b} \mathbf{R}_N$ (\mathbf{R}_N 为矩形窗), 则称为无窗全相位频谱分析^[6]; 若 \mathbf{f}, \mathbf{b} 中其一为 \mathbf{R}_N , 则称单窗全相位频谱分析; 若 $\mathbf{f} = \mathbf{b} \neq \mathbf{R}_N$ 则称为双窗全相位频谱分析。这里只讨论无窗和双窗情况, 令因果窗序列 \mathbf{f} 的频谱 $F(j\omega)$ (即其傅里叶变换) 为

$$F(j\omega) = F_g(\omega) e^{-j\tau\omega}, \quad \tau = (N-1)/2 \quad (3)$$

其中 ' τ ' 表示群延时。对式(1)两边取傅里叶变换, 有

$$W_c(j\omega) = F(j\omega) \cdot F^*(j\omega) = |F_g(\omega)|^2 \quad (4)$$

式(4)表明, 卷积窗频谱为前窗 \mathbf{f} 的幅度谱的平方。

3 单频复指数信号的加窗 FFT 和双窗全相位 FFT 谱的理论分析

单位幅度的单频复指数序列 $\{x(n) = e^{j\omega^* n}, n \in z\}$ 为最基本的序列, 正弦序列可看作是由两个共轭的复指数序列线性组合而成。因此研究此基本序列的加窗 FFT 和双窗全相位 FFT 的谱性能具有重要意义。

3.1 加窗 FFT 谱的相位特性

假设所加的窗即为全相位 FFT 的前窗 \mathbf{f} , 由窗截断得到的观察区间为 $n \in [0, N-1]$, 则加窗后的序列元素表示为

$$x_N(n) = x(n)f(n) \quad (5)$$

对式(5)两边进行傅里叶变换, 根据卷积定理, 有

$$X_N(j\omega) = \frac{1}{2\pi} X(j\omega) * F(j\omega) \quad (6)$$

令 “ \leftrightarrow ” 表示互为傅氏变换对, 则有

$$x(n) \leftrightarrow 2\pi \delta(\omega - \omega^*) \quad (7)$$

将式(7)代入式(6)有

$$X_N(j\omega) = \delta(\omega - \omega^*) * F(j\omega) = F[j(\omega - \omega^*)] \quad (8)$$

对傅里叶变换的结果在 $\omega_k = k\Delta\omega = 2k\pi/N$ 上进行离散采样, 即得传统加窗 DFT 分析结果。

$$X_N(k) = F[j(\omega_k - \omega^*)], \quad k \in [0, N-1] \quad (9)$$

将式(3)代入式(9)有

$$X_N(k) = F_g(k\Delta\omega - \omega^*) \cdot e^{-j\tau(k\Delta\omega - \omega^*)}, \quad k \in [0, N-1] \quad (10)$$

假设主谱线的谱序号为 k^* , 则其对应的相角表示为

$$\varphi(k^*) = -\tau(k^* \Delta\omega - \omega^*) \quad (11)$$

若复指数信号的初始相位不为 0, 则其信号可表示为

$$x(n) = e^{j(\omega^* n + \theta_0)}, \quad n \in [0, N-1] \quad (12)$$

根据 FFT 的线性性质, 则其主谱线上的相位值为

$$\varphi_1(k^*) = \theta_0 - \tau(k^* \Delta\omega - \omega^*) \quad (13)$$

但实际采样得到的样本段不一定满足定义域 $n \in [0, N-1]$, 而是与式(12)所示序列存在大小为 n_x 的延时, 则根据傅氏变换的时移性质, 这段延时会引起附加的大小为 $\omega^* n_x$ 的相移。则其主谱线上的相角为

$$\varphi_2(k^*) = \theta_0 - n_x \omega^* - \tau(k^* \Delta\omega - \omega^*) \quad (14)$$

将式(13)减去式(14)的结果, 即可得到时移差 n_x 的两序列的主谱线的相位差值, 从而可确定信号频率 ω^* , 这就是传统第一类相位差法的校正原理^[5]。

3.2 双窗全相位 FFT 谱分析的相位特性

假设图 1 馈入的信号为初相为 0 的单位复指数信号, 由卷积窗截断得到的观察区间为 $n \in [-N+1, N-1]$, 根据卷积窗的对称性, 加权重叠相加后的数据 $y(n)$ 可表示为

$$y(n) = [w_c(n)x(n) + w_c(n-N)x(n-N)] R_N(n) \quad (15)$$

利用式(7), 根据频域卷积定理有

$$w_c(n)x(n) \leftrightarrow W_c(j\omega) * \delta(\omega - \omega^*) = W_c[j(\omega - \omega^*)] \quad (16)$$

再根据傅里叶变换的时移性质, 有

$$w_c(n-N)x(n-N) \leftrightarrow e^{-j\omega N} W_c[j(\omega - \omega^*)] \quad (17)$$

结合式(16)和式(17), 有

$$Y(e^{j\omega}) = \left\{ W_c[j(\omega - \omega^*)] + e^{-j\omega N} \cdot W_c[j(\omega - \omega^*)] \right\} * R_N(j\omega) \quad (18)$$

对式(18)在 $\omega_k = k\Delta\omega = 2k\pi/N$ 上进行离散采样, 利用 $N\omega_k = 2k\pi$, 从而有

$$Y(k) = 2 W_c[j(k\Delta\omega - \omega^*)] * R_N(j\omega_k), \quad k \in [0, N-1] \quad (19)$$

而矩形窗谱 $R_N(j\omega)$ 在 ω_k 上满足频率采样性质

$$R_N[j\omega_k] = N \delta(k) \quad (20)$$

将式(4), 式(20)代入式(19), 有

$$Y(k) = 2 \left| F_g[k\Delta\omega - \omega^*] \right|^2 \quad (21)$$

对式(21)除以 2 进行归一化, 并结合式(11), 有

$$Y(k) = \left| X_N(k) \right|^2 \quad (22)$$

即双窗全相位 FFT 谱为传统加窗 FFT 谱幅值的平方, 这是一个很重要的结论。注意式(22)没有虚部, 为实数而获得零相位。而输入样点 $x(0)$ 处的相位也为 0。两者相等。

易证明: 全相位谱分析具有类似于传统谱分析的线性性质。故若考虑信号存在初始相位 θ_0 及其时移 n_x 的情况, 则主谱线上的全相位 FFT 相位谱分析值为

$$\varphi_a(k^*) = \theta_0 - n_x \omega^* \quad (23)$$

这时信号表达式为 $x(n) = e^{j[\omega^*(n-n_x) + \theta]}$, $n \in [-N+1,$

$N-1]$ 。可见, 式(23)即为中心输入点 $x(0)$ 处的相位值。

综上分析, 有如下结论成立: 单频复指数信号经全相位 FFT 谱分析后, 主谱线上的相位谱值与中心输入样点的相位值相等。这意味着, 无需进行相位校正, 直接取主谱线上的相位值即可精确获取信号的初始相位。

3.3 全相位相位差法的频率、幅值、相位的校正原理

将式(14)的传统相位谱(重记为“ $\varphi(k^*)$ ”)减去式(23)的全相位相位谱, 可得

$$\Delta\varphi = \varphi(k^*) - \varphi_a(k^*) = \tau(\omega^* - k^*\Delta\omega) = \tau d\omega \quad (24)$$

即主谱线上的加窗 FFT 的相位谱和全相位 FFT 相位谱的差值与频偏值 $d\omega$ 成正比, 其比例系数即为群延时 τ 。

这就意味着, 只要测出两种谱分析在主谱线上的相角大小, 取其差值, 按式(25)即可形成对信号真实频率的估计

$$\hat{\omega}^* = \Delta\varphi / \tau + k^*\Delta\omega \quad (25)$$

前面推导的是单位幅度的信号的理论结果, 根据谱分析的线性性质, 由式(10)和式(20)可推知: 幅值为 A 的加窗 FFT 谱和全相位 FFT 谱的幅值分别为

$$|X_N(k^*)| = A |F_g(k^*\Delta\omega - \omega^*)| \quad (26)$$

$$|Y(k^*)| = A |F_g(k^*\Delta\omega - \omega^*)|^2 \quad (27)$$

将式(26)平方后(即得功率谱)再除以式(27), 有

$$\hat{A} = \frac{|X_N(k^*)|^2}{|Y(k^*)|} \quad (28)$$

式(28)即为幅值校正公式, 显然该公式与所加的窗函数无关。这样, 由式(23), 式(25), 式(28)就可完成对信号相位、频率、幅值的估计。其校正过程可用图 2 来表示。

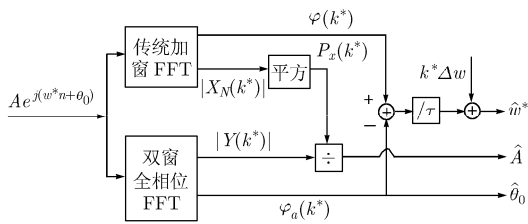


图 2 全相位相位差法的频谱校正流程

4 多频信号的谱线分布及其校正

研究多频信号频谱的校正问题, 首先要研究其传统 FFT 谱线和全相位 FFT 谱线的分布特点。这里以一简单例子说明。令 $N=8$, 则 $\Delta\omega = \pi/4$, $\omega_1=2.4\Delta\omega$, $\omega_2=5.3\Delta\omega$, 研究如下定义域为 $n \in [-N+1, N-1]$ 的复指数信号

$$x_1(n) = e^{j\omega_1 n}; \quad x_2(n) = e^{j\omega_2 n}; \quad x(n) = x_1(n) + x_2(n) \quad (29)$$

令其传统 FFT 谱分别为 $X_1(k)$, $X_2(k)$, $X(k)$, 全相位 FFT 谱分别为 $Y_1(k)$, $Y_2(k)$, $Y(k)$, 不加窗时其离散谱线如图 3 所示。

加窗 FFT 谱线和双窗全相位 FFT 谱线如图 4 所示。

从图 3, 图 4 的各谱线高度可大致看出, $Y_1(k)$, $Y_2(k)$

幅值为 $X_1(k)$, $X_2(k)$ 幅值的平方, 这使得全相位旁谱线高度相对于主谱线高度的比例也按平方关系衰减下去, 从而获得很好的抑制旁谱泄漏性能。根据谱分析的线性性质, 满足

$$X(k) = X_1(k) + X_2(k); \quad Y(k) = Y_1(k) + Y_2(k) \quad (30)$$

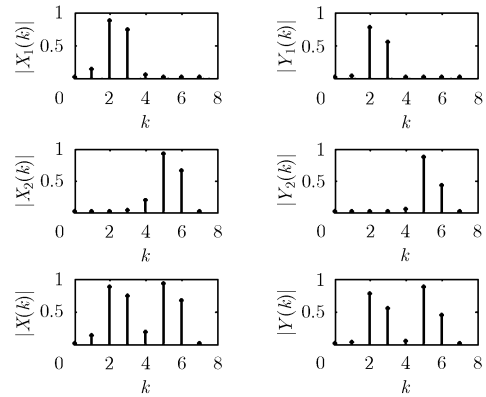


图 3 FFT 谱线和无窗全相位 FFT 谱线 ($N=8$)

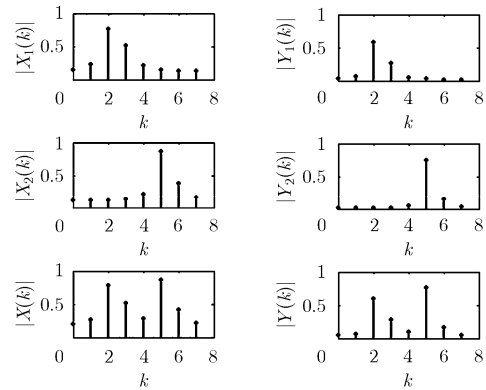


图 4 加窗 FFT 谱线和双窗全相位 FFT 谱线 ($N=8$, hanning 窗)

这时叠加后的全相位谱 $Y(k)$ 与传统谱 $X(k)$ 不再存在数值上的数学平方关系, 而是近似平方关系, 从图 3, 图 4 可看出, $Y(k)$ 相比于 $X(k)$ 仍具有更好的抑制频谱泄漏作用。

另外从图 3 可看出, 不加窗时, 传统 FFT 谱分析的泄漏太大, 由 $k=2$ 处主谱线产生的旁谱泄漏会对 $k=5$ 处的主谱线叠加干扰, 而全相位 FFT 的这种谱间干扰很小。图 4 加窗后, 传统谱间干扰程度降低, 而全相位谱间干扰程度更低, 这可从 $k=4$ 处的边界谱线的高度可明显看出来。

由于双窗全相位 FFT 的谱间干扰程度低, 这就不会对用式(23), 式(25), 式(28)的频谱校正精度产生大的影响, 由于图 2 的校正流程仍需传统加窗 FFT, 因而其校正精度影响也主要由传统加窗 FFT 造成。

当然, 实际工程遇到的是多频成分的正弦实数序列, 由于正弦序列由两个共轭复指数序列线性组合而来, 只要谱间干扰小, 同样可获得对正弦波频谱的准确估计。另外, 噪声总是不可避免, 需通过实验来研究噪声对频谱估计的影响。

表1 全相位相位差法和传统方法的频谱校正结果对照 (N=1024)

		频 率 位 置					
		k=0	k=1	k=2	k=3	k=4	
噪声	真实频率 ω_k	6.0000	147.1000	150.2000	200.3000	480.4000	
	真实幅值 $A(k)$	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	
	真实相位 $\varphi_k (^{\circ})$	10	20	30	40	50	
$\lambda=0$	方法 1	频率	6.00000067	147.09904665	150.19933461	200.29999980	480.40000036
		幅值	1.00000000	0.99977048	0.99957468	0.99977037	0.99958865
		相位	9.99999999	20.00041188	29.99979365	39.99999999	49.99999999
	方法 2	频率	5.99999998	147.10240381	150.20170193	200.30000007	480.39999939
		幅值	0.99999321	0.99459332	1.00443541	0.99988666	0.99979348
		相位	10.00012484	19.39671169	29.57409241	39.99995308	50.00017527
	方法 3	频率	5.99997211	147.09400076	149.82154158	200.29997578	480.39997443
		幅值	1.00000000	1.04146275	1.10965963	0.99988479	0.99981302
		相位	9.82935413	-0.93277203	97.76034860	39.82853806	49.82888223
$\lambda=0.5$	方法 1	频率	6.00020842	147.10118517	150.19927403	200.29888332	480.40088789
		幅值	0.99639408	1.00320721	1.00139090	1.00459813	1.00236663
		相位	9.91604492	19.90388873	29.99183265	39.97341435	49.93833486
	方法 2	频率	6.00109630	147.10244794	150.20242199	200.30155284	480.39993610
		幅值	1.00066551	0.99552894	1.00488967	1.0030666	0.99534640
		相位	9.70396941	19.14967786	29.48416036	39.27865050	50.13126115
	方法 3	频率	5.99775637	147.21391566	149.82284705	200.29788181	480.40215873
		幅值	1.00000000	1.04581150	1.11736087	1.00104863	1.00498688
		相位	10.31750086	-0.74682039	97.48412033	40.30296380	49.80095946
$\lambda=2$	方法 1	频率	6.00691995	147.10125971	150.19630237	200.30208186	480.39910475
		幅值	1.01909966	0.98910587	0.99634826	1.001843167	0.99921108
		相位	9.72950972	20.62988658	30.63835482	41.17209508	49.96024725
	方法 2	频率	5.99901863	147.10102802	150.20392916	200.304963777	480.39733537
		幅值	1.00149289	1.02766602	0.99417235	1.01824028	0.99680854
		相位	10.22758364	19.19372882	28.71519241	39.40744567	50.78771918
	方法 3	频率	5.99095409	147.20769073	149.81689036	200.31967340	480.39300117
		幅值	1.00000000	1.04472499	1.10989546	1.03353773	1.01738788
		相位	12.35467315	0.70157964	98.46326816	36.47361616	51.54462032

5 实验

为验证全相位相位差校正法的性能, 将本文方法与传统能量重心法、传统第一类相位差法(第二类相位差法由于精度较低, 不予考虑)的校正结果进行比较。传统方法都在加汉宁窗条件下进行, 文献[4]给出了针对加汉宁窗的能量重心法的幅值、相位校正公式, 并且还给出了针对加汉宁窗的第一类相位差法结合比值法^[4]的幅值、相位校正公式。

实验将谱分析点数 N 取为 1024, 对混有噪声的包含 5 个频率的复合余弦信号 $x(n)$ 进行谱分析与校正

$$x(n) = \lambda \xi(n) + 2 \sum_{k=0}^4 A(k) \cos(\omega_k n + \varphi_k) \quad (31)$$

式(31)中的各频率 ω_k 的真实值如表 1 第 2 行所示(单位为频率分辨率 $\Delta\omega$); 对应的真实幅值 $A(k)$ 如表 1 第 3 行所示, 对应的真实相位 φ_k 如表 1 第 4 行所示。 $\xi(n)$ 为均值为 0, 方差为 1 的高斯白噪声, 可通过改变参数 ' λ ' 值来调节噪声幅度,

假设信号能量为 E_s , 噪声能量为 E_n , 则信噪比 SNR 表示为

$$\text{SNR} = 10 \lg \frac{E_s}{E_n} = 10 \lg \left[\frac{2 \sum_{k=0}^{M-1} A^2(k)}{\lambda^2} \right] \quad (32)$$

从而当 λ 分别取 0、0.5、2 的值, $A(k)$ 值全取 1 时, 代

入式(32)可算出其 SNR 的值为 $+\infty$ 、15.05dB 和 3.01dB, 即噪声逐渐增大的情况。重复 20 次实验求平均可得到表 1 的实验数据, 结论如下:

(1)频率密集场合频率密集场合($k=1, k=2$), 全相位相位差校正法(简称方法 1)校正精度好于传统第 1 类相位差法(简称方法 2)和能量重心法(简称方法 3), 无噪声时的频率校正误差小于 $0.0001 \Delta\omega$; 而方法 2 约为 $0.004-0.005 \Delta\omega$; 方法 3 效果最差, 频率估计误差约为 $0.04-0.1 \Delta\omega$, 且无法实现相位校正。这是由于频率密集场合, 全相位频谱分析的谱间干扰程度低于传统 FFT 谱分析的缘故。

(2)3 种方法中, 方法 1 的相位估计值具有最高的精度无噪声时, 在非频率密集无噪声场合($k=0,3,4$)相位估计误差处于 10^{-7} 度级, 方法 2 处于 10^{-4} 度级, 方法 3 处 10^{-1} 度级。在 SNR=15.05dB, 3 种校正方法的相位估计精度均有所下降, 但方法 1 的校正精度仍高于方法 2, 在 SNR=3.01dB 时, 方法 1 相对于方法 2 的优势有所下降, 两者性能相当。而方法 3 加噪后变得更差。

(3)3 种方法的频率估计中, 对于非密集频率分布场合($k=0,3,4$), 方法 1 和方法 2 的性能相当, 无噪声时同处 $10^{-7} \Delta\omega$ 级, SNR=15.05dB 时同处 $10^{-4} \Delta\omega$ 级, SNR=3.01dB 时同处 $10^{-2} \Delta\omega$ 级。而方法 3 比这两种方法都差, 随着噪声加大, 其劣势有所减小。

(4)各种加噪下, 3 种方法的幅值估计精度相当。但从计算复杂度考虑, 方法 1 占优, 这是因为式(28)的计算方法简单, 且不依赖于窗函数。文献[4]给出的方法 2 的幅值校正公式只是针对于汉宁窗, 而方法 3 的幅值校正公式与能量恢复常数 K_i 有关(加 hanning 窗为 8/3)。

6 结束语

本文提出一种新的结合全相位 FFT 和传统 FFT 谱分析的频谱校正方法, 由两者在主谱线的相位差值即可校正出频率, 由主谱线处的传统功率谱与全相位振幅谱的比值即可校正出的幅值, 而直接取主谱线上全相位的相位谱值无需校正即可得到初始相位, 严格理论推导了其校正机理, 仿真实验证明了此方法适合于间隔为 2 个频率分辨率的密集频率分布场合, 相位估计精度非常高, 频率和幅值估计与传统第一类相位差法性能相当, 因此有较高的应用价值。

参考文献

- [1] Ignado S, Carlos P, and Jesus I. A comparative study of high-accuracy frequency estimation methods[J]. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 2000, 14 (5): 819-834.
- [2] Lobos T, Leonowicz Z, Rezmer J, and Schegner P. High-resolution spectrum-estimation methods for signal analysis in power systems[J]. *IEEE Trans. on Instrumentation and Measurement*, 2006, 55(1): 219-225.
- [3] Gough P T. A fast spectral estimation algorithm based on the FFT[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 1994, 42(6): 1317-1322.
- [4] 朱晓勇, 丁康. 离散频谱校正法的综合比较[J]. *信号处理*, 2001, 17(1): 91-97.
Zhu Xiao-yong and Ding Kang. The synthetical comparison of correcting methods on discrete spectrum [J]. *Chinese Journal on Signal Processing*, 2001, 17(1): 91-97.
- [5] 丁康, 罗江凯, 谢明. 离散频谱时移相位差校正法[J]. *应用数学和力学*, 2002, 23(7): 729-735.
Ding Kang, Luo Jiang-kai, and Xie Ming. Time-Shifting correcting method of phase difference on discrete spectrum[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2002, 23(7): 729-735.
- [6] 王兆华, 侯正信, 苏飞. 全相位 FFT 频谱分析[J]. *通信学报*, 2003, 24(11A): 16-19.
Wang Zhao-hua, Hou Zheng-xin, and Su Fei. All-phase FFT spectrum analysis[J]. *Journal on Communications*, 2003, 24(11A): 16-19.
- [7] 黄翔东, 王兆华. 一种设计频率特性有间断滤波器的新方法[J]. *天津大学学报*, 2006, 39(5): 614-620.
Huang Xiang-dong and Wang Zhao-hua. A novel technique to design filter with discontinuous frequency character [J]. *Journal of Tianjin University*, 2006, 39(5): 614-620.

黄翔东: 男, 1979 年生, 博士, 研究方向为数字滤波器设计及自适应信号处理等。

王兆华: 男, 1937 年生, 教授, 博士生导师, 研究方向为数字图像处理、数字滤波器等。