

$K_{2,4,p}$ 的点可区别IE-全染色

陈祥恩*^① 张爽^① 李泽鹏^②

^①(西北师范大学数学与统计学院 兰州 730070)

^②(兰州大学信息科学与工程学院 兰州 730000)

摘要: 该文利用色集合事先分配法、构造染色法、反证法讨论了完全三部图 $K_{2,4,p}$ 的点可区别IE-全染色问题, 确定了 $K_{2,4,p}$ 的点可区别IE-全染色数。

关键词: 完全三部图; IE-全染色; 点可区别IE-全染色; 点可区别IE-全染色数

中图分类号: O157.5

文献标识码: A

文章编号: 1009-5896(2020)12-2999-06

DOI: 10.11999/JEIT190829

Vertex Distinguishing IE-total Coloring of $K_{2,4,p}$

CHEN Xiang'en^① ZHANG Shuang^① LI Zepeng^②

^①(College of Mathematics and Statistics, Northwest Normal University, Lanzhou 730070, China)

^②(School of Information Science and Engineering, Lanzhou University, Lanzhou 730000, China)

Abstract: Vertex-distinguishing IE-total colorings of complete tripartite graphs $K_{2,4,p}$ are discussed by using the methods of distributing the color sets in advance, constructing the colorings and contradiction. The vertex-distinguishing IE-total chromatic numbers of $K_{2,4,p}$ are determined.

Key words: Complete tripartite graphs; IE-total coloring; Vertex-distinguishing IE-total coloring; Vertex distinguishing IE-total chromatic number

1 引言

点可区别一般边染色是由Harary等人于1985年在文献[1]中提出的, 在文献[1-6]中均有研究。近些年来点可区别的未必正常的全染色也被研究, IE-全染色就是一种未必正常的全染色。点可区别IE-全染色在文献[7]中提出。图 G 的一般全染色是指若干种颜色对图 G 的全体顶点及边的一个分配, 图 G 的IE-全染色是指使得图 G 的任意两个相邻的顶点的颜色不同的一个一般全染色。设 f 是图 G 的IE-全染色, x 为 G 的一个顶点, 将在 f 下 x 的颜色及与 x 关联的边的颜色所构成的集合记为 $C_f(x)$ 或 $C(x)$, 称之为顶点 x 在 f 下的色集合。设 f 是图 G 的IE-全染色, 若对图 G 的任意两个不同的顶点 u, v , 有 $C(u) \neq C(v)$, 则 f 称为图 G 的点可区别IE-全染色,

简记为VD IETC。对图 G 进行点可区别IE-全染色所需要的最少颜色数称为 G 的点可区别IE-全染色数, 记为 $\chi_{vt}^{ie}(G)$ 。图 G 的 k -IE-全染色是指使用了 k 种颜色的图 G 的IE-全染色。图 G 的 k -点可区别IE-全染色是指图 G 的图使用了 k 种颜色的点可区别IE-全染色, 简记为 k -VDIETC。

本文研究 $K_{2,4,p}$ 的点可区别IE-全染色, 并给出了它们的点可区别IE-全染色数。本文述及的完全三部图 $K_{m,n,p}$ 的顶点集合 $V=X \cup Y \cup Z$, 其中 $X=\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, $Y=\{y_1, y_2, \dots, y_m\}$, $Z=\{z_1, z_2, \dots, z_p\}$, 边集合 $\{x_i y_j | i=1, 2, \dots, m, j=1, 2, \dots, n\} \cup \{y_j z_t | j=1, 2, \dots, n, t=1, 2, \dots, p\} \cup \{x_i z_t | i=1, 2, \dots, m, t=1, 2, \dots, p\}$ 。

值得一提的是, 许进等人[8-14]对极大平面图及其着色问题进行了深入研究, 李泽鹏等人[15,16]对唯一3色平面图得出了重要结果, 朱恩强等人[17]深入地探索了无圈4色三角剖分图。

为了叙述方便, 本文做出如下约定: 在本文一提到或要给出一个图的 l -VDIETC时, 总认为所使用的 l 种颜色为 $1, 2, \dots, l$; 所谓 $\{1, 2, \dots, l\}$ 的一个 i -子集是指 $\{1, 2, \dots, l\}$ 的含有 i 个元素的子集; 当 A 是 $\{1, 2, \dots, l\}$ 的子集时, 用 \bar{A} 表示 A 的补集。

收稿日期: 2019-10-28; 改回日期: 2020-08-25; 网络出版: 2020-09-04

*通信作者: 陈祥恩 chenxe@nwnu.edu.cn

基金项目: 国家自然科学基金(11761064, 61163037), 兰州大学中央高校基本科研业务费专项基金(lzujbky-2018-37)

Foundation Items: The National Natural Science Foundation of China (11761064 61163037), Special Fund for the Operating Expenses of Basic Scientific Research in Central Universities of Lanzhou University (lzujbky-2018-37)

2 准备工作

引理1 当 $k \geq 10$ 且 $p > \sum_{i=1}^7 \binom{k-1}{i} - 6$ 时, $K_{2,4,p}$ 不存在 $(k-1)$ -VDIETC。

证明: 用反证法证明 $K_{2,4,p}$ 不存在 $(k-1)$ -VDIETC, 假如 $K_{2,4,p}$ 有 $(k-1)$ -VDIETC g 。

断言1: 任意1-子集均不是 $X \cup Y$ 中任一点的色集合。

否则, 不妨设 $\{1\}$ 为 X 中某点的色集合, 则 Z 中每个点必含1, 故 $p \leq \sum_{i=1}^6 \binom{k-2}{i}$, 与 $p > \sum_{i=1}^7 \binom{k-1}{i} - 6$ 矛盾。

断言2: 任意2-子集均不是 $X \cup Y$ 中任一点的色集合。

否则, 不妨设 $\{1,2\}$ 为 $X \cup Y$ 中某点的色集合, 则 Z 中每个点必含1或2, 故 $p \leq 2 \sum_{i=1}^6 \binom{k-3}{i} + \sum_{i=1}^5 \binom{k-3}{i}$, 与 $p > \sum_{i=1}^7 \binom{k-1}{i} - 6$ 矛盾。

(1) 当 $X \cup Y$ 中点的颜色至少有3种互不不同时, 不妨设为1, 2, 3, 则 $\{1, 2, 3\}$ 的1-子集、2-子集、3-子集均不能作为 Z 中任一点的色集合, 从而 $p \leq \sum_{i=1}^7 \binom{k-1}{i} - 7$ 。这与 $p > \sum_{i=1}^7 \binom{k-1}{i} - 6$ 矛盾。

(2) 当 $X \cup Y$ 中点的颜色刚好有2种互不不同时, 不妨设 $g(x_i)=1, g(y_j)=2, i=1, 2, j=1, 2, 3, 4$ 。

断言3: $\{1, 2\}$ 不能作为 Z 中任一点的色集合。

因为 $\overline{C(x_i)}, \overline{C(y_j)}, i=1, 2, j=1, 2, 3, 4$, 这6个集合互不相同, 所以其中至少有3个不是 $\emptyset, \{1\}, \{2\}$ 。不妨设 $\overline{C(y_2)}, \overline{C(y_3)}, \overline{C(y_4)}$ 都不是 $\emptyset, \{1\}, \{2\}$, 然后分两种情况进行讨论。

当 $|\overline{C(y_j)}| \leq 7, j=2, 3, 4$ 时, $\{1\}, \{2\}, \{1, 2\}, \overline{C(y_2)}, \overline{C(y_3)}, \overline{C(y_4)}$ 都不能作为 Z 中任一点色集合, 故 $p \leq \sum_{i=1}^7 \binom{k-1}{i} - 6$ 矛盾。

存在 $j \in \{2, 3, 4\}$, 使得 $|\overline{C(y_j)}| \geq 8$ 。那么 $\overline{C(y_j)}$ 的 i -子集($i=1, 2, \dots, 7$)均不是 Z 中任一点的色集合, 故 $p \leq \sum_{i=1}^7 \binom{k-1}{i} - 254$ 矛盾。

证毕

引理2 当 $k \geq 10$ 且 $\sum_{i=1}^7 \binom{k-1}{i} - 6 < p \leq \sum_{i=1}^7 \binom{k}{i} - 6$ 时, $K_{2,4,p}$ 存在 k -VDIETC。

证明: 为了给出 $K_{2,4,p}$ 的 k -IE-全染色 g , 先对 $K_{2,4,p}$ 的每个顶点对应 $\{1, 2, \dots, k\}$ 的一个子集, 令

$D(x_1)=\{1, 2, \dots, k\}, D(x_2)=D(x_1) \setminus \{2\}, D(y_1)=D(x_1) \setminus \{1\}, D(y_2)=D(x_1) \setminus \{3\}, D(y_3)=D(x_1) \setminus \{4\}, D(y_4)=D(x_1) \setminus \{1, 3\}, D(z_i)=\{i+4\}, i=1, 2, \dots, k-4, D(z_{k-3})=\{1, 5\}, D(z_{k-2})=\{2, 5\}, D(z_{k-1})=\{3, 5\}, D(z_k)=\{4, 5\}, \{1, 2, \dots, k\}$ 的3-子集、4-子集、 \dots 、7-子集以及除 $\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 5\}, \{2, 5\}, \{3, 5\}, \{4, 5\}$ 外的2-子集排成一个序列 T_1 , 令 $D(z_{k+1}), D(z_{k+2}), \dots, D(z_p)$ 依次是 T_1 中的第1, 2, $\dots, p-k$ 项。这一点是可以做到的, 因为 T_1 中含 $\binom{k}{2} + \binom{k}{3} + \dots + \binom{k}{7} - 6$ 项, 而 $p-k \leq \binom{k}{2} + \binom{k}{3} + \dots + \binom{k}{7} - 6$, 即 $p \leq \sum_{i=1}^7 \binom{k}{i} - 6$ 。证毕

下面给出 $K_{2,4,p}$ 的一个 k -IE-全染色 g 。令 $g(x_i)=1, g(y_j)=2, i=1, 2, j=1, 2, 3, 4$; 用 $\max D(z_i)$ 染点 $z_i, i=1, 2, \dots, p$ 。用 $\min[D(x) \cap D(y)]$ 染边 $xy, \forall x \in X, y \in Y$ 。而 z_i 的关联边均染以 $i+4, i=1, 2, \dots, k-4$; 当 $|D(z_i)|=2$ 时, $g(uz_i)=\min[D(u) \cap D(z_i)], u \in X \cup Y$; 当 $|D(z_i)|=3$ 时, 设 $D(z_i)=\{a, b, c\}$, 而 $a < b < c$, 用 a 染边 $x_1 z_i$, 用 b 染边 $y_1 z_i$, 用 c 染边 $x_2 z_i$, 用 $\min[D(y) \cap D(z_i)]$ 染边 $yz_i, y \in \{y_2, y_3, y_4\}$; 当 $|D(z_i)|=4$ 时, 设 $D(z_i)=\{a, b, c, d\}$, 而 $a < b < c < d$, 用 a 染边 $x_1 z_i$, 用 b 染边 $y_1 z_i$, 用 c 染边 $x_2 z_i$, 用 d 染边 $y_2 z_i, y_3 z_i, y_4 z_i$; 当 $|D(z_i)|=5$ 时, 设 $D(z_i)=\{a, b, c, d, e\}$, 而 $a < b < c < d < e$, 用 a, b, c, d, e 分别染边 $x_1 z_i, y_1 z_i, x_2 z_i, y_2 z_i$ 和边 $y_3 z_i, g(y_4 z_i)=\min[D(y_4) \cap D(z_i)]$; 当 $|D(z_i)|=6$ 或者7时, 设 $|D(z_i)|=\{a_j | j=1, 2, \dots, l\}, l$ 为6或者7, 其中 $a_1 < a_2 < a_3 < a_4 < a_5 < a_6 (< a_7)$, 用 $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6$ 分别染 $x_1 z_i, y_1 z_i, x_2 z_i, y_2 z_i, y_3 z_i, y_4 z_i$ 。最后得到的 $K_{2,4,p}$ 的 k -IE-全染色 g 是点可区别的, 因为 $v \in V(K_{2,4,p})$ 均有 $C(u)=C(v)$ 。

3 主要结果及其证明

定理1 对正整数 $p \geq 4$, 有

$$\chi_{vt}^{ie}(K_{2,4,p}) = \begin{cases} 4, & p = 4; \\ 5, & 5 \leq p \leq 19; \\ 6, & 20 \leq p \leq 51; \\ 7, & 52 \leq p \leq 115; \\ 8, & 116 \leq p \leq 243; \\ 9, & 244 \leq p \leq 495; \\ k, & \sum_{i=1}^7 \binom{k-1}{i} - 6 < p \leq \sum_{i=1}^7 \binom{k}{i} - 6, k \geq 10 \end{cases}$$

证明: 由引理1及引理2可知, 当 $k \geq 10$ 且

$$\sum_{i=1}^7 \binom{k-1}{i} - 6 < p \leq \sum_{i=1}^7 \binom{k}{i} - 6 \text{ 时结论成立.}$$

以下考虑其他情况.

情形1: $244 \leq p \leq 495$.

用反证法证明 $K_{2,4,p}$ 不存在8-VDIETC, 假如 $K_{2,4,p}$ 有8-VDIETC g .

断言1: 任意1-子集均不是 XUY 中任一点的色集合.

否则, 不妨设 $\{1\}$ 为 X 中某点的色集合, 则 Z 中每个点必含1, 故 $p \leq \sum_{i=1}^6 \binom{7}{i} = 126$, 矛盾.

断言2: 任意2-子集均不是 XUY 中任一点的色集合.

$$\text{否则 } p \leq 2 \sum_{i=0}^6 \binom{6}{i} + \sum_{i=1}^5 \binom{6}{i} = 190, \text{ 矛盾.}$$

(1) 当 XUY 中点的颜色至少有3种互不相同, 不妨设为1, 2, 3, 则 $\{1, 2, 3\}$ 的1-子集、2-子集、3-子集均不能作为 Z 中任一点的色集合, 并且 XUY 中至少5个点的色集合既不是 $\{1, 2, 3\}$ 的子集, 也不是 Z 中点的色集合. 由断言1、断言2知, 这12个色集合彼此不同, 故 $p \leq \sum_{i=1}^7 \binom{8}{i} - 11 = 242$, 矛盾.

(2) 当 XUY 中点的颜色刚好有2种互不相同, 不妨设 $g(x_i) = 1, g(y_j) = 2, i = 1, 2, j = 1, 2, 3, 4$.

断言3: $\{1, 2\}$ 不能作为 Z 中任一点的色集合.

因为 $\overline{C(x_i)}, \overline{C(y_j)}, i = 1, 2, j = 1, 2, 3, 4$, 这6个集合互不相同, 所以其中至少有3个不是 $\emptyset, \{1\}, \{2\}$. 不妨设 $\overline{C(y_2)}, \overline{C(y_3)}, \overline{C(y_4)}$ 都不是 $\emptyset, \{1\}, \{2\}$. 此时, $\{1\}, \{2\}, \{1, 2\}, \overline{C(y_2)}, \overline{C(y_3)}, \overline{C(y_4)}$ 以及 XUY 中至少5个点的色集合不能作为 Z 中任一点的色集合. 由3个断言知, 这11个色集合彼此不同. 故 $p \leq \sum_{i=1}^7 \binom{8}{i} - 11 = 243$, 矛盾.

$K_{2,4,p}$ 的9-VDIETC 可由 $K_{2,4,495}$ 的9-VDIETC 限制在 $\{x_1, x_2, y_1, y_2, y_3, y_4, z_1, z_2, \dots, z_p\}$ 上得出. 下面给出 $K_{2,4,495}$ 的9-VDIETC, 令 $D(x_1) = \{1, 2, \dots, 9\}, D(x_2) = D(x_1) \setminus \{2\}, D(y_1) = D(x_1) \setminus \{1\}, D(y_2) = D(x_1) \setminus \{3\}, D(y_3) = D(x_1) \setminus \{4\}, D(y_4) = D(x_1) \setminus \{5\}$, 将 $\{1, 2\}, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{5\}$ 外的 $\{1, 2, \dots, 9\}$ 的其余的1-子集、2-子集、...、7-子集作为 Z 中点的色集合. 据此可参照引理2的证明过程的第2段所述的染法给出 $K_{2,4,495}$ 的9-VDIETC.

情形2: $116 \leq p \leq 243$.

用反证法证明 $K_{2,4,p}$ 不存在7-VDIETC, 假如 $K_{2,4,p}$ 有7-VDIETC g .

断言1: 任意1-子集均不是 XUY 中任一点的色集合.

否则, 不妨设 $\{1\}$ 为 X 中某点的色集合, 则 Z 中每个点必含1, 故 $p \leq \sum_{i=1}^6 \binom{6}{i} = 63$, 矛盾.

断言2: 任意2-子集均不是 XUY 中任一点的色集合.

$$\text{否则 } p \leq 2 \sum_{i=0}^5 \binom{5}{i} + \sum_{i=1}^5 \binom{5}{i} = 95, \text{ 矛盾.}$$

(1) 当 XUY 中点的颜色至少有3种互不相同, 不妨设为1, 2, 3, 则 $\{1, 2, 3\}$ 的1-子集、2-子集、3-子集以及 XUY 中至少5个点的色集合均不能作为 Z 中任一点的色集合. 由断言2知, 这12个色集合彼此不同, 故 $p \leq \sum_{i=1}^7 \binom{7}{i} - 12 = 115$, 矛盾.

(2) 当 XUY 中点的颜色刚好有2种互不相同, 不妨设 $g(x_i) = 1, g(y_j) = 2, i = 1, 2, j = 1, 2, 3, 4$.

断言3: $\{1, 2\}$ 不能作为 Z 中任意点的色集合.

因为 $\overline{C(x_i)}, \overline{C(y_j)}, i = 1, 2, j = 1, 2, 3, 4$, 这6个集合互不相同, 所以其中至少有3个不是 $\emptyset, \{1\}, \{2\}$. 不妨设 $\overline{C(y_2)}, \overline{C(y_3)}, \overline{C(y_4)}$ 都不是 $\emptyset, \{1\}, \{2\}$. 此时, $\{1\}, \{2\}, \{1, 2\}, \overline{C(y_2)}, \overline{C(y_3)}, \overline{C(y_4)}$ 以及 XUY 中每个点的色集合不能作为 Z 中任一点的色集合. 由3个断言知, 这12个色集合彼此不同. 故 $p \leq \sum_{i=1}^7 \binom{7}{i} - 12 = 115$, 矛盾.

$K_{2,4,p}$ 的8-VDIETC 可由 $K_{2,4,243}$ 的8-VDIETC 限制在 $\{x_1, x_2, y_1, y_2, y_3, y_4, z_1, z_2, \dots, z_p\}$ 上得出. 下面给出 $K_{2,4,243}$ 的8-VDIETC, 令 $D(x_1) = \{1, 2, \dots, 8\}, D(x_2) = D(x_1) \setminus \{2\}, D(y_1) = D(x_1) \setminus \{1\}, D(y_2) = D(x_1) \setminus \{3\}, D(y_3) = D(x_1) \setminus \{4\}, D(y_4) = D(x_1) \setminus \{5\}$, 将 $\{1, 2\}, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{5\}$ 外的 $\{1, 2, \dots, 8\}$ 的其余的1-子集、2-子集、...、7-子集作为 Z 中点的色集合. 据此可参照引理2的证明过程的第2段所述的染法给出 $K_{2,4,243}$ 的8-VDIETC.

情形3: $52 \leq p \leq 115$.

用反证法证明 $K_{2,4,p}$ 不存在6-VDIETC, 假如 $K_{2,4,p}$ 有6-VDIETC g .

断言1: 任意1-子集均不是 XUY 中任一点的色集合.

否则, 不妨设 $\{1\}$ 为 X 中某点的色集合, 则 Z 中每个点必含1, 故 $p \leq \sum_{i=1}^5 \binom{5}{i} = 31$, 矛盾.

断言2: 任意2-子集均不是 XUY 中任一点的色集合.

否则 $p \leq 2 \sum_{i=0}^4 \binom{4}{i} + \sum_{i=1}^4 \binom{4}{i} = 47$, 矛盾。

(1) 当 $X \cup Y$ 中点的颜色至少有3种互不相同, 不妨设为1, 2, 3, 则 $\{1, 2, 3\}$ 的1-子集、2-子集、3-子集以及 $X \cup Y$ 中至少5个点的色集合均不能作为 Z 中任一点的色集合。故 $p \leq \sum_{i=1}^6 \binom{6}{i} - 12 = 51$, 矛盾。

(2) 当 $X \cup Y$ 中点的颜色刚好有2种互不相同, 不妨设 $g(x_i) = 1, g(y_j) = 2, i = 1, 2, j = 1, 2, 3, 4$ 。断言3: $\{1, 2\}$ 不能作为 Z 中任意点的色集合。

因为 $\overline{C(x_i)}, \overline{C(y_j)}, i = 1, 2, j = 1, 2, 3, 4$, 这6个集合互不相同, 所以至少有3个不是 $\emptyset, \{1\}, \{2\}$ 。不妨设 $\overline{C(y_2)}, \overline{C(y_3)}, \overline{C(y_4)}$ 都不是 $\emptyset, \{1\}, \{2\}$ 。此时, $\{1\}, \{2\}, \{1, 2\}, \overline{C(y_2)}, \overline{C(y_3)}, \overline{C(y_4)}$ 以及 $X \cup Y$ 中每个点的色集合不能作为 Z 中任一点的色集合。由3个断言知, 这12个色集合彼此不同。故 $p \leq \sum_{i=1}^6 \binom{6}{i} - 12 = 51$, 矛盾。

$K_{2,4,p}$ 的7-VDIETC可由 $K_{2,4,115}$ 的7-VDIETC限制在 $\{x_1, x_2, y_1, y_2, y_3, y_4, z_1, z_2, \dots, z_p\}$ 上得出。下面给出 $K_{2,4,115}$ 的7-VDIETC, 令 $D(x_1) = \{1, 2, \dots, 7\}, D(x_2) = D(x_1) \setminus \{2\}, D(y_1) = D(x_1) \setminus \{1\}, D(y_2) = D(x_1) \setminus \{3\}, D(y_3) = D(x_1) \setminus \{4\}, D(y_4) = D(x_1) \setminus \{5\}$, 将 $\{1, 2\}, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{5\}$ 外的 $\{1, 2, \dots, 7\}$ 的其余的1-子集、2-子集、 \dots 、7-子集作为 Z 中点的色集合。据此可参照引理2的证明过程的第2段所述的染法给出 $K_{2,4,115}$ 的7-VDIETC。

情形4: $20 \leq p \leq 51$ 。

用反证法证明 $K_{2,4,p}$ 不存在5-VDIETC, 假如 $K_{2,4,p}$ 有5-VDIETC g 。

断言1: 任意1-子集均不是 $X \cup Y$ 中任一点的色集合。

否则, 不妨设 $\{1\}$ 为 X 中某点的色集合, 则 Z 中每个点必含1, 故 $p \leq \sum_{i=1}^4 \binom{4}{i} = 15$, 矛盾。

断言2: 任意2-子集均不是 X 中任一点的色集合。

否则 $p + 4 \leq 2 \sum_{i=0}^3 \binom{3}{i} + \sum_{i=1}^3 \binom{3}{i} = 23, p \leq 19$, 矛盾。

(1) 当 $X \cup Y$ 中点的颜色至少有3种互不相同, 不妨设为1, 2, 3, 则 $\{1, 2, 3\}$ 的1-子集、2-子集以及 $X \cup Y$ 中每个点的色集合均不能作为 Z 中任一点的色集合。故 $p \leq \sum_{i=1}^5 \binom{5}{i} - 12 = 19$, 矛盾。

(2) 当 $X \cup Y$ 中点的颜色刚好有2种互不相同, 不妨设 $g(x_i) = 1, g(y_j) = 2, i = 1, 2, j = 1, 2, 3, 4$ 。

断言3: $\{1, 2\}$ 不能作为 Z 中任意点的色集合。

因为 $\overline{C(x_i)}, \overline{C(y_j)}, i = 1, 2, j = 1, 2, 3, 4$, 这6个集合互不相同, 所以至少有3个不是 $\emptyset, \{1\}, \{2\}$ 。不妨设 $\overline{C(y_2)}, \overline{C(y_3)}, \overline{C(y_4)}$ 都不是 $\emptyset, \{1\}, \{2\}$ 。

断言4: $\{1, 2\}$ 不能作为 Y 中任意点的色集合。

否则, $\{3\}, \{4\}, \{5\}, \{3, 4\}, \{3, 5\}, \{4, 5\}, \{3, 4, 5\}$ 以及 $X \cup Y$ 中每个点的色集合均不能作为 Z 中任一点的色集合, 故 $p \leq \sum_{i=1}^5 \binom{5}{i} - 13 = 18$, 矛盾。

所以, $\{1\}, \{2\}, \{1, 2\}, \overline{C(y_2)}, \overline{C(y_3)}, \overline{C(y_4)}$ 以及 $X \cup Y$ 中每个点的色集合不能作为 Z 中任一点的色集合。故 $p \leq \sum_{i=1}^5 \binom{5}{i} - 12 = 19$, 矛盾。

$K_{2,4,p}$ 的6-VDIETC可由 $K_{2,4,51}$ 的6-VDIETC限制在 $\{x_1, x_2, y_1, y_2, y_3, y_4, z_1, z_2, \dots, z_p\}$ 上得出。下面给出 $K_{2,4,51}$ 的6-VDIETC, 令 $D(x_1) = \{1, 2, \dots, 6\}, D(x_2) = D(x_1) \setminus \{2\}, D(y_1) = D(x_1) \setminus \{1\}, D(y_2) = D(x_1) \setminus \{3\}, D(y_3) = D(x_1) \setminus \{4\}, D(y_4) = D(x_1) \setminus \{5\}$, 将 $\{1, 2\}, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{5\}$ 外的 $\{1, 2, \dots, 6\}$ 的其余的1-子集、2-子集、 \dots 、6-子集作为 Z 中点的色集合。据此可参照引理2的证明过程的第2段所述的染法给出 $K_{2,4,51}$ 的6-VDIETC。

情形5: $5 \leq p \leq 19$ 。

用反证法证明 $K_{2,4,p}$ 不存在4-VDIETC, 假如 $K_{2,4,p}$ 有4-VDIETC g 。使用的4种颜色为1, 2, 3, 4。

断言1: $\{1, 2, 3, 4\}$ 的1-子集不是 X 中任一点的色集合。

否则, 不妨设 $g(x_1) = \{1\}$, 那么, $Y \cup Z$ 中每个点色集合均含1, 但 $\{1, 2, 3, 4\}$ 的含1的子集共有8个, 不能区分 $Y \cup Z \cup \{x_1\}$ 中至少10个顶点, 矛盾。

断言2: 当 $p \geq 6$ 时, $\{1, 2, 3, 4\}$ 的1-子集不是 Y 中任一点的色集合。

否则, $g(y_1) = \{1\}$, 那么, $X \cup Z$ 中每个点色集合均含1, 但 $\{1, 2, 3, 4\}$ 的含1的子集共有8个, 不能区分 $X \cup Z \cup \{y_1\}$ 中至少9个顶点, 矛盾。

以下分两种情况讨论:

(1) 当 $p \geq 6$ 。当 $X \cup Y$ 中点的颜色里互不相同的恰有3种时, 不妨设为1, 2, 3, Z 中每个点的色均为4, 但是 $\{1, 2, 3, 4\}$ 的含4的子集共有8个, 不能区分 $6 + p$ 个顶点, 矛盾。故 $\{4\}$ 不是任意点的色集合, 即任意1-子集均不是任一点的色集合, 从而 $6 + p \leq \sum_{i=1}^4 \binom{4}{i} - 4 = 11, p \leq 5$, 矛盾。

当 XUY 中点的颜色恰好有2种互不相同,不妨设 $g(x_i)=1, g(y_j)=2, i=1, 2, j=1, 2, 3, 4$ 。此时, $\{1\}, \{2\}$ 不是任意点的色集合。如果 $\{3\}, \{4\}$ 均是 Z 中点的色集合,那么 XUY 中每个点的色集合均包含3和4,而 $\{1, 3, 4\}, \{2, 3, 4\}, \{1, 2, 3, 4\}$ 不能区分 XUY 中的6个顶点,矛盾;如果 $\{3\}, \{4\}$ 中恰有一个是 Z 中某点的色集合,不妨设 $\{3\}$ 是, $\{4\}$ 不是,此时 $\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{4\}, \{1, 2\}$,均不是任意点的色集合,说明 $6+p \leq \sum_{i=0}^4 \binom{4}{i} - 5 = 11, p \leq 5$,矛盾。

(2) 当 $p=5$ 。先考虑染了点的颜色只有3种的情形,可设 $g(x_i)=1, g(y_j)=2, i=1, 2, j=1, 2, 3, 4, g(z_s)=3$,这时任意1-子集不是任一点的色集合,否则,当某个顶点的色集合为1-子集时,那么所有点的色集合都含同一种颜色,而含一种固定颜色的子集仅有8个,图 $K_{2,4,5}$ 的含有11个顶点,矛盾。因此 $\{1, 2, 3, 4\}$ 的所有2-子集、3-子集、4-子集均为 $K_{2,4,5}$ 中顶点的色集合,此时,这11个集合刚好可以区分 $K_{2,4,5}$ 的11个顶点,但由于 $\{3, 4\}$ 是 Z 中某点的色集合, $\{1, 2\}$ 是 XUY 中某点的色集合,二者的交是空集,矛盾。

再考虑染了点的颜色刚好是3种的情形:

(1) 染了 X 中点的色有2种,不妨设 $g(x_i) \in \{1, 4\}, i=1, 2, g(x_1)=1, g(x_2)=4, g(y_j)=2, j=1, 2, 3, 4, g(z_s)=3, s=1, 2, 3, 4, 5$ 。

断言3: $\{1\}, \{4\}$ 不是任意点的色集合。(否则,不妨设 $g(x_1)=\{1\}$,则 $Y \cup Z \cup \{x_1\}$ 中每个点的色集合均含1,而 $\{1, 2, 3, 4\}$ 的含1的子集共有8个,不能区分10个顶点,矛盾。)

断言4: $\{2\}, \{3\}$ 不是任意点的色集合。(否则,不妨设 $g(y_1)=\{2\}$,则 $K_{2,4,5}$ 的每个点的色集合均含2,而 $\{1, 2, 3, 4\}$ 的含2的子集共有8个,不能区分11个顶点,矛盾。)

因此,每个2-子集、3-子集、4-子集均为 $K_{2,4,5}$ 中点的色集合,由于 $\{1, 4\}$ 只能是 X 中某点的色集合, $\{2, 3\}$ 只能是 $Y \cup Z$ 某顶点的色集合,二者之交为空集,矛盾。

(2) 染了 Y 中点的色有2种,不妨设 $g(x_i)=1, i=1, 2, g(y_j) \in \{2, 4\}, j=1, 2, 3, 4, g(z_s)=3, s=1, 2, 3, 4, 5$ 。

断言5: $\{1\}, \{3\}$ 不是任意点的色集合。(否则,每个顶点的色集合均含一种共同色,矛盾。)

断言6: $\{2\}, \{4\}$ 不全是 $K_{2,4,5}$ 中点的色集合。(否则, $X \cup Z$ 中每个顶点的色集合都包含2和4,而 $\{1, 2, 4\}, \{2, 3, 4\}, \{1, 2, 3, 4\}$ 不能区分 $X \cup Z$ 中的7个顶点,矛盾。)

这样, $\{1, 2, 3, 4\}$ 的所有2-子集、3-子集、4-子集中最多排除1个,剩下的10个均为 $K_{2,4,5}$ 中点的色集合。

断言7: $\{1, 3\}, \{2, 4\}$ 不全是 $K_{2,4,5}$ 中点的色集合。(否则,若 $\{1, 3\}$ 是 $X \cup Z$ 中某点的色集合, $\{2, 4\}$ 是 Y 中某点的色集合,二者的交是空集,矛盾。)

由断言7,可以先假设 $\{2, 4\}$ 为 $K_{2,4,5}$ 中某点的色集合。由断言6知, $\{2\}, \{4\}$ 仅有1个是 $K_{2,4,5}$ 中某点的色集合,不妨设 $g(y_1)=\{2\}$,这样 $X \cup Z$ 中每个点的色集合均含2,由于含2的子集只有8个,从而 $g(y_2), g(y_3), g(y_4)$ 里均不含2,但含4,且不等于 $\{4\}$,所以他们只能是 $\{1, 4\}, \{3, 4\}, \{1, 3, 4\}$ 。即此时 $\{1, 2, 3, 4\}$ 的15个子集中,除去 $\{1\}, \{3\}, \{4\}$ 和 $\{1, 3\}$,其余11个集合均为 $K_{2,4,5}$ 中点的色集合。此时, $\{2, 3\}$ 是 Z 中某点的色集合, $\{1, 4\}$ 是 Y 中某点的色集合,由于二者的交为空集,矛盾。

(3) 染了 Z 中点的色有2种,不妨设 $g(x_i)=1, i=1, 2, g(y_j)=2, j=1, 2, 3, 4, g(z_s) \in \{3, 4\}, s=1, 2, 3, 4, 5$ 。

断言8: $\{1\}, \{2\}$ 不是任意点的色集合。(否则,每个点的色集合均含一种共同色,矛盾。)

断言9: $\{3\}, \{4\}$ 不全是 $K_{2,4,5}$ 中点的色集合。(否则, XUY 中每个点的色集合都包含3和4,而 $\{1, 3, 4\}, \{2, 3, 4\}, \{1, 2, 3, 4\}$,不能区分 XUY 中的6个顶点,矛盾。)

断言10: $\{1, 2\}, \{3, 4\}$ 不全是 $K_{2,4,5}$ 中点的色集合。(否则, $\{1, 2\}$ 是 XUY 中某点的色集合, $\{3, 4\}$ 是 Y 中某点的色集合,二者的交是空集,矛盾。)

因此,由断言10,不妨设 $\{1, 2\}$ 不是 $K_{2,4,5}$ 中点的色集合,由断言9知, $\{3\}, \{4\}$ 中不全是 Z 中某点的色集合,不妨先设 $\{4\}$ 是, $\{3\}$ 不是,此时,除去 $\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}$ 外 $\{1, 2, 3, 4\}$ 的11个集合均为 $K_{2,4,5}$ 中点的色集合,不妨设 $g(z_1)=4$,那么 XUY 中每个点的色集合都含4。包含1和4、包含2和4的色集合共有6个,刚好可以区分 XUY 的6个顶点,并且此时 $\{1, 4\}$ 必为 X 中点的色集合, $\{2, 3\}$ 必为 Z 中点的色集合,二者的交为空集,矛盾。

$K_{2,4,5}$ 的5-VDIETC可由 $K_{2,4,19}$ 的5-VDIETC限制在 $\{x_1, x_2, y_1, y_2, y_3, y_4, z_1, z_2, \dots, z_p\}$ 上得出。下面给出 $K_{2,4,19}$ 的5-VDIETC,令 $D(x_1)=\{1, 2, \dots, 5\}, D(x_2)=D(x_1) \setminus \{2\}, D(y_1)=D(x_1) \setminus \{1\}, D(y_2)=D(x_1) \setminus \{3\}, D(y_3)=D(x_1) \setminus \{4\}, D(y_4)=D(x_1) \setminus \{5\}$,将 $\{1, 2\}, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{5\}$ 外的 $\{1, 2, \dots, 5\}$ 的其余的1-子集、2-子集、...、5-子集作为 Z 中点的色集合。据此可参照引理2的证明过程的第2段所述的染法给出 $K_{2,4,19}$ 的5-VDIETC。

情形6: $p=4$ 。

易证 $K_{2,4,p}$ 不存在3-VDIETC。在表1中给出了 $K_{2,4,p}$ 的4-VDIETC。证毕

表1 $K_{2,4,p}$ 的4-VDIETC

	z_1	z_2	z_3	z_4	y_1	y_2	y_3	y_4
	3	3	3	3				
x_1	1	1	3	3	3	1	3	1
x_2	1	2	4	4	2	4	2	2
y_1	4	4	4	4	1			
y_2	2	2	2	3	3			
y_3	2	1	2	1	2			
y_4	4	3	4	4	3			

4 结束语

本文期望得出完全三部图的点可区别IE-全染色更广泛的结论，进一步再研究 $K_3[tP_2]$ 的点可区别IE-全染色。

参考文献

- [1] HARARY F and PLANTHOLT M. The Point - Distinguishing Chromatic Index[M]. HARARY F, and MAYBEE J S. Graphs and Application. New York: Wiley, 1985: 147–162.
- [2] HORVŇÁK M and SOTAK R. The fifth jump of the point-distinguishing chromatic index of $K_{n,n}$ [J]. *ARS Combinatoria*, 1996, 42: 233–242.
- [3] HORVŇÁK M and SOTAK R. Localization of jumps of the point-distinguishing chromatic index of $K_{n,n}$ [J]. *Discussiones Mathematicae Graph Theory*, 1997, 17(2): 243–251. doi: 10.7151/dmgt.1051.
- [4] HORŇÁK M and ZAGAGLIA SALVI N. On the point - distinguishing chromatic index of $K_{m,n}$ [J]. *ARS Combinatoria*, 2006, 80: 75–85.
- [5] ZAGAGLIA SALVI N. On the value of the point - distinguishing chromatic index of $K_{n,n}$ [J]. *ARS Combinatoria*, 1990, 29B: 235–244.
- [6] CHEN Xiang'en. Point-distinguishing chromatic index of the union of paths[J]. *Czechoslovak Mathematical Journal*, 2014, 64(3): 629–640. doi: 10.1007/s10587-014-0123-8.
- [7] CHEN Xiang'en, GAO Yuping, and YAO Bing. Vertex-distinguishing IE-total colorings of complete bipartite graphs $K_{m,n}$ ($m < n$)[J]. *Discussiones Mathematicae Graph Theory*, 2013, 33(2): 289–306. doi: 10.7151/dmgt.1659.
- [8] 许进. 极大平面图的结构与着色理论(1)色多项式递推公式与四色猜想[J]. 电子与信息学报, 2016, 38(4): 763–779. doi: 10.11999/JEIT160072.
- [9] XU Jin. Theory on the structure and coloring of maximal planar graphs (1) recursion formula of chromatic polynomial and four-color conjecture[J]. *Journal of Electronics & Information Technology*, 2016, 38(4): 763–779. doi: 10.11999/JEIT160072.
- [10] 许进. 极大平面图的结构与着色理论(2)多米诺构形与扩缩运算[J]. 电子与信息学报, 2016, 38(6): 1271–1296. doi: 10.11999/JEIT160224.
- [11] XU Jin. Theory on structure and coloring of maximal planar graphs (2) Domino configurations and extending-contracting operations[J]. *Journal of Electronics & Information Technology*, 2016, 38(6): 1271–1296. doi: 10.11999/JEIT160224.
- [12] 许进. 极大平面图的结构与着色理论(3)纯树着色与唯一4-色极大平面图猜想[J]. 电子与信息学报, 2016, 38(6): 1328–1353. doi: 10.11999/JEIT160409.
- [13] XU Jin. Theory on structure and coloring of maximal planar graphs (3) purely tree-colorable and uniquely 4-colorable maximal planar graph conjectures[J]. *Journal of Electronics & Information Technology*, 2016, 38(6): 1328–1353. doi: 10.11999/JEIT160409.
- [14] 许进. 极大平面图的结构与着色理论(4)-运算与Kempe等价类[J]. 电子与信息学报, 2016, 38(7): 1557–1585. doi: 10.11999/JEIT160483.
- [15] XU Jin. Theory on structure and coloring of maximal planar graphs (4)-operations and Kempe equivalent classes[J]. *Journal of Electronics & Information Technology*, 2016, 38(7): 1557–1585. doi: 10.11999/JEIT160483.
- [16] XU Jin, LI Zepeng, and ZHU Enqiang. On purely tree-colorable planar graphs[J]. *Information Processing Letter*, 2016, 116(8): 532–536. doi: 10.1016/j.ipl.2016.03.011.
- [17] 许进, 李泽鹏, 朱恩强. 极大平面图理论研究进展[J]. 计算机学报, 2015, 38(8): 1680–1704. doi: 10.11897/SP.J.1016.2015.01680.
- [18] XU Jin, LI Zepeng, and ZHU Enqiang. Research progress on the theory of maximal planar graphs[J]. *Chinese Journal of Computers*, 2015, 38(8): 1680–1704. doi: 10.11897/SP.J.1016.2015.01680.
- [19] 陈祥恩, 李婷. (k,l)-递归极大平面图的结构[J]. 电子与信息学报, 2018, 40(9): 2281–2286. doi: 10.11999/JEIT171021.
- [20] CHEN Xiang'en and LI Ting. The structure of (k,l) -recursive maximal planar graph[J]. *Journal of Electronics & Information Technology*, 2018, 40(9): 2281–2286. doi: 10.11999/JEIT171021.
- [21] LI Zepeng, ZHU Enqiang, SHAO Zehui, et al. Size of edge-critical uniquely 3-colorable planar graphs[J]. *Discrete Mathematics*, 2016, 339(4): 1242–1250. doi: 10.1016/j.disc.2015.11.009.
- [22] LI Zepeng, ZHU Enqiang, SHAO Zehui, et al. A note on uniquely 3-colourable planar graphs[J]. *International Journal of Computer Mathematics*, 2017, 94(5): 1028–1035. doi: 10.1080/00207160.2016.1167196.
- [23] ZHU Enqiang, LI Zepeng, SHAO Zehui, et al. Acyclically 4-colorable triangulations[J]. *Information Processing Letters*, 2016, 116(6): 401–408. doi: 10.1016/j.ipl.2015.12.005.

陈祥恩: 男, 1965年生, 教授, 研究方向为图论及其应用。

张爽: 女, 1995年生, 硕士, 研究方向为图论及其应用。

李泽鹏: 男, 1988年生, 副教授, 研究方向为图论及其应用。

责任编辑: 余蓉