

一种新型的高阶时域有限差分方法

许 杰 徐 珂 黄志祥*

(安徽大学电子信息工程学院 合肥 230039)

摘 要: 相比于传统高阶时域有限差分算法(FDTD)而言, 该文提出了一种改进的高阶FDTD的优化方法, 该算法基于安培环路定律, 通过计算机技术找到一组最优的系数使得FDTD方法的全局色散误差达到最小, 通过不同分辨率下的点源辐射模拟证明了该方法在较低分辨率的情况下仍然具有极低的相位误差, 对于解决电大尺寸结构建模中的数值色散等问题提供了有效的解决方案。

关键词: 时域有限差分方法; 相位误差; 优化算法; 安培环路定律

中图分类号: O441.4

文献标识码: A

文章编号: 1009-5896(2020)02-0425-05

DOI: 10.11999/JEIT190050

A New High Order Finite Difference Time Domain Method

XU Jie XU Ke HUANG Zhixiang

(College of Electronic Information Engineering, Anhui University, Hefei 230039, China)

Abstract: Compared with the traditional high-order Finite Difference Time Domain(FDTD) Method, an improved high-order FDTD optimization method is proposed in this paper. This algorithm is based on Ampere's law of circuits and finds a set of optimal coefficients through computer technology to minimize the global dispersion error of the FDTD method. The simulation of point source radiation with different resolutions shows that this method still has very low phase error in the case of lower resolution. It provides an effective solution to the problem of numerical dispersion in the modeling of large size structures.

Key words: Finite Difference Time Domain(FDTD); Phase error; Optimization algorithm; Ampere's law

1 引言

时域有限差分方法(Finite Difference Time Domain, FDTD)^[1,2]作为一种比较成熟的计算方法在众多领域都发挥着巨大的作用, 由于其具有简单直观的优势, 使得这种方法不断地被人们进行改进和研究, 然而FDTD方法在模拟电磁波传播过程中也存在很多缺陷, 其中一个比较严重的缺陷就是过度的相位误差积累。一般而言, 相位误差是由时域有限差分算法中模拟波数引起的。这种波数误差又是由代表计算区域的数值网格的分辨率所引起的。因此一些研究人员已经对FDTD的色散关系进行了相关研究, 揭示了相互之间的数值色散及稳定性依

据。同时对网格大小、传播方向等等进行了详细的分析。在其他的 research 结果中, 文献[3-5]强调在FDTD算法中尽可能地利用时间步长的最大值来减少数值色散。在电大尺寸结构建模^[6-8]中, 数值色散^[9-11]是FDTD方法的一个严重的问题。网格分辨率必须随着问题尺寸的增加而增加, 这样才可以保证总的累积相位误差保持在可以接受的水平上。换句话说, 就是每波长的网格数必须随波长的增加而增加用以保持相位精度从而导致在模拟2维和3维的大波长的问题时需要占用大量的计算机资源。为了应对FDTD数值色散问题, 大多数的研究均选用高阶差分格式^[12-16], 比如2阶时间差分 and 空间4阶差分格式[(2, 4)方案]或者时间和空间的4阶差分格式[(4, 4)方案]。对这两个高阶格式进行了色散分析, 证明了它们在数值色散方面优于标准FDTD方案。这里提出的新方案是在2阶时间差分 and 空间4阶差分格式[(2, 4)方案]的基础上的一种新的优化算法, 它在保持了整体算法稳定性的基础上, 同时提供了极高的相位精度。模拟实验结果证明, 该方法可以在保证计算精度的条件下, 明显减少了计算时间, 降低了内存需求, 在精确性和有效性方面都达到了良好

收稿日期: 2019-01-17; 改回日期: 2019-08-28; 网络出版: 2019-09-02

*通信作者: 黄志祥 zxhuang@ahu.edu.cn

基金项目: 国家自然科学基金(61722101, 61801002, 61701001, 61701003), 安徽大学物理科学与信息技术研究所开放式学科建设基金(2019AH001)

Foundation Items: The Natural National Natural Science of China (61722101, 61801002, 61701001, 61701003), The Open Fund for Discipline Construction, Institute of Physical Science and Information Technology, Anhui University (2019AH001)

的效果,对于解决电大尺寸结构建模中的数值色散等问题提供了一定的解决方案。

2 高阶FDTD差分格式

标准的FDTD差分格式称为S22方法,高阶FDTD差分格式称为S24方法,优化的FDTD差分格式称为M24方法。 h 和 Δt 代表网格大小和时间步长, R 代表了每个波长的FDTD单元分辨率因子或数目, γ_i 和 $\tilde{\gamma}_i$ 分别代表物理波数和数值波数,色散误差用全局色散误差表示为

$$\Phi_{\gamma_i} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\frac{\gamma_i - \tilde{\gamma}_i(\phi)}{\gamma_i} \right) d\phi \quad (1)$$

ϕ 代表波矢量的传播角度。

麦克斯韦方程组的积分形式为

$$\frac{\partial}{\partial t} \int \mathbf{D} \cdot d\mathbf{s} = \oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} \quad (2)$$

$$-\frac{\partial}{\partial t} \int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} \quad (3)$$

在标准的2阶时间差分 and 空间4阶差分格式方法中,可写为

$$\begin{aligned} \varepsilon \frac{\partial E_z}{\partial t} &= \frac{9}{8h} \left(H_y \Big|_{i+1/2,j}^{n+1/2} - H_y \Big|_{i-1/2,j}^{n+1/2} \right. \\ &\quad \left. - H_x \Big|_{i,j+1/2}^{n+1/2} + H_x \Big|_{i,j-1/2}^{n+1/2} \right) \\ &\quad - \frac{1}{24h} \left(H_y \Big|_{i+3/2,j}^{n+1/2} - H_y \Big|_{i-3/2,j}^{n+1/2} \right. \\ &\quad \left. - H_x \Big|_{i,j+3/2}^{n+1/2} + H_x \Big|_{i,j-3/2}^{n+1/2} \right) \\ &= \frac{9}{8(h)^2} \left(h H_y \Big|_{i+1/2,j}^{n+1/2} - h H_y \Big|_{i-1/2,j}^{n+1/2} \right. \\ &\quad \left. - h H_x \Big|_{i,j+1/2}^{n+1/2} + h H_x \Big|_{i,j-1/2}^{n+1/2} \right) \\ &\quad - \frac{1}{8(9h)^2} \left(3h H_y \Big|_{i+3/2,j}^{n+1/2} - 3h H_y \Big|_{i-3/2,j}^{n+1/2} \right. \\ &\quad \left. - 3h H_x \Big|_{i,j+3/2}^{n+1/2} + 3h H_x \Big|_{i,j-3/2}^{n+1/2} \right) \\ &\approx \frac{9}{8(h)^2} \oint_{c1} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} - \frac{1}{8(9h)^2} \oint_{c2} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} \quad (4) \end{aligned}$$

同时有

$$\oint_{c1} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \frac{\partial}{\partial t} \int_{s1} \mathbf{D} \cdot d\mathbf{s} \approx \varepsilon h^2 \frac{\partial E_z}{\partial t} \quad (5)$$

$$\oint_{c2} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \frac{\partial}{\partial t} \int_{s2} \mathbf{D} \cdot d\mathbf{s} \approx 9\varepsilon h^2 \frac{\partial E_z}{\partial t} \quad (6)$$

所以原来的迭代方程现在可以写为

$$\left[\varepsilon \frac{\partial E_z}{\partial t} \right]_{\text{FDTD}} = -\frac{1}{8} \left[\varepsilon \frac{\partial E_z}{\partial t} \right]_{c2} + \frac{9}{8} \left[\varepsilon \frac{\partial E_z}{\partial t} \right]_{c1} \quad (7)$$

式(7)这种关系表明式(4)是在两个不同的环 $c1$ 和 $c2$ 上应用安培定律的加权结果,且系数和为1,如图1所示。需要注意的是等式(7)右边2个系数和 $(-1/8$ 和 $9/8)$ 相加为1,这样才可以保证Maxwell方程的完整性。

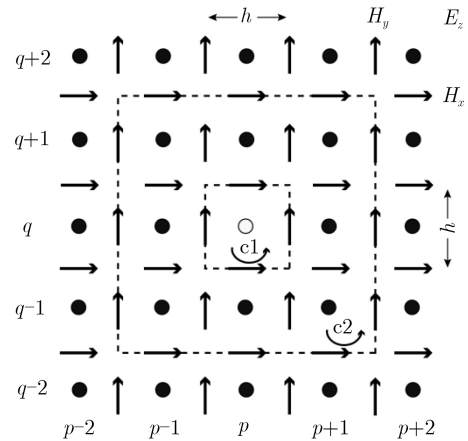


图1 高阶FDTD方法示意图

3 优化的高阶FDTD差分格式

传统意义上的即时间2阶空间2阶差分格式的FDTD方法(S22方案)对于某点场值的求解取决于其周围的4个点的场值大小,而对于时间2阶空间4阶的高阶FDTD(S24方案)来说,其周围的8个点的场值决定了待求点场值的大小,对待求点运用的周围场值个数越多,理论上其结果就越精确,误差就越小。本文中改进的FDTD方法,是在高阶FDTD的基础上除了8个场值点之外,使额外的8个场值点也纳入新的FDTD迭代方程中进行迭代求解,即如图2所示。将外环拆分成两个不同的循环圈 $c2$ 和

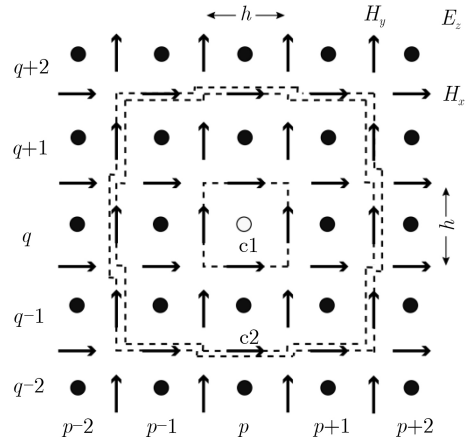


图2 改进的高阶FDTD算法示意图

c3圈, 对c3同样运用安培定律。这额外的8个点的应用将迫使右边系数的值发生变化, 但系数和仍然需要保持为1。所以可以得到

$$\left[\varepsilon \frac{\partial E_z}{\partial t} \right]_{\text{FDTD}} = K_1 \left[\varepsilon \frac{\partial E_z}{\partial t} \right]_{c2} + K_2 \left[\varepsilon \frac{\partial E_z}{\partial t} \right]_{c3} + (1 - K_1 - K_2) \left[\varepsilon \frac{\partial E_z}{\partial t} \right]_{c1} \quad (8)$$

其迭代方程为

$$\begin{aligned} \varepsilon \frac{\partial E_z}{\partial t} = & \frac{K_1}{3h} \left(H_x \Big|_{i,j-3/2} - H_x \Big|_{i,j+3/2} \right. \\ & \left. + H_y \Big|_{i+3/2,j} - H_y \Big|_{i-3/2,j} \right) \\ & + \frac{K_2}{6h} \left(\begin{aligned} & H_x \Big|_{i-1,j-3/2} + H_x \Big|_{i+1,j-3/2} \\ & - H_x \Big|_{i-1,j+3/2} - H_x \Big|_{i+1,j+3/2} \\ & + H_y \Big|_{i+3/2,j-1} + H_y \Big|_{i+3/2,j+1} \\ & - H_y \Big|_{i-3/2,j-1} - H_y \Big|_{i-3/2,j+1} \end{aligned} \right) \\ & + \frac{1 - K_1 - K_2}{h} \left(H_x \Big|_{i,j-1/2} - H_x \Big|_{i,j+1/2} \right. \\ & \left. + H_y \Big|_{i+1/2,j} - H_y \Big|_{i-1/2,j} \right) \end{aligned} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} -\mu \frac{\partial H_x}{\partial t} = & \frac{K_1}{3h} \left(E_z \Big|_{i,j+3/2} - E_z \Big|_{i,j-3/2} \right) \\ & + \frac{1 - K_1}{h} \left(E_z \Big|_{i,j+1/2} - E_z \Big|_{i,j-1/2} \right) \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} \mu \frac{\partial H_y}{\partial t} = & \frac{K_1}{3h} \left(E_z \Big|_{i+3/2,j} - E_z \Big|_{i-3/2,j} \right) \\ & + \frac{1 - K_1}{h} \left(E_z \Big|_{i+1/2,j} - E_z \Big|_{i-1/2,j} \right) \end{aligned} \quad (11)$$

M24的色散关系和稳定性条件^[17,18]为

$$\begin{aligned} & \left(\frac{3h}{c\Delta t} \right)^2 \sin^2 \left(\frac{\omega \Delta t}{2} \right) \\ & = \left[K_1 \sin \left(\frac{3\tilde{\gamma}_{i,x}h}{2} \right) + 3(1 - K_1) \sin \left(\frac{\tilde{\gamma}_{i,x}h}{2} \right) \right] \\ & \quad \cdot \left\{ \sin \left(\frac{3\tilde{\gamma}_{i,y}h}{2} \right) [K_1 + K_2 \cos(\tilde{\gamma}_{i,y}h)] \right. \\ & \quad \left. + 3(1 - K_1 - K_2) \sin \left(\frac{\tilde{\gamma}_{i,y}h}{2} \right) \right\} \\ & + \left[K_1 \sin \left(\frac{3\tilde{\gamma}_{i,y}h}{2} \right) + 3(1 - K_1) \sin \left(\frac{\tilde{\gamma}_{i,y}h}{2} \right) \right] \\ & \quad \cdot \left\{ \sin \left(\frac{3\tilde{\gamma}_{i,x}h}{2} \right) [K_1 + K_2 \cos(\tilde{\gamma}_{i,x}h)] \right. \\ & \quad \left. + 3(1 - K_1 - K_2) \sin \left(\frac{\tilde{\gamma}_{i,x}h}{2} \right) \right\} \end{aligned} \quad (12)$$

$$\Delta t = \frac{3h}{c\nu \sqrt{2(3 - 4K_1)(3 - 4K_1 - 2K_2)}} \quad (13)$$

且 $K_1 < 0, K_2 < 3/2 - 2K_1$ 。从式(8)中可以看出, 若为S22方法, 只需要使 $K_1 = K_2 = 0$ 时即可。若为S24方法只需取 $K_1 = -1/8, K_2 = 0$ 即可。这里需要应用式(12)和式(13)寻找一组最优的系数使得其全局误差最小, 表1列举部分分辨率 R 下已寻找到的 K_1, K_2 的值, 以及误差 Φ_{γ_i} 。

表1 部分分辨率的色散误差

R	K_1	K_2	Φ_{γ_i}
5	-0.14493668	0.102073777	5.3797×10^{-10}
10	-0.11619507	0.073446898	9.1959×10^{-14}
15	-0.11180257	0.069281772	8.4433×10^{-16}
20	-0.11032252	0.067892310	2.2994×10^{-17}
25	-0.10964732	0.067260967	4.3034×10^{-18}
30	-0.10928263	0.066920442	1.5703×10^{-19}
35	-0.10906389	0.066716504	4.4814×10^{-20}

色散曲线如图3所示:

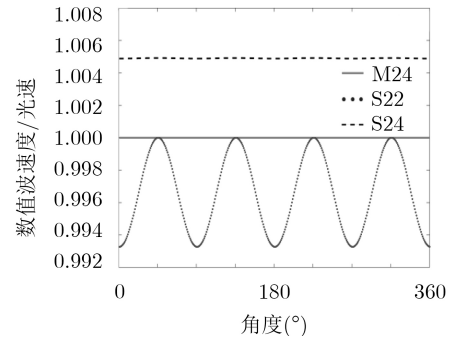


图3 不同FDTD方法下的色散曲线

从图3中可以看出, 改进后的高阶FDTD方法(M24)与普通FDTD方法(S22)和高阶FDTD(S24)方法相比较而言, 精确度更高。

4 数值算例

为验证优化后的高阶FDTD算法(M24方案)的精确性, 通过2个数值算例进行验证。

例1仿真模型如图4所示, 分别采用粗、细网格下对优化后的FDTD算法, 标准的高阶FDTD算法以及标准的普通FDTD算法进行比较, 其中, 粗网格计算网格区域为 40×40 , 网格大小为 $\Delta x = \Delta y = 0.1 \text{ m}$ 。细网格计算区域网格数为 1000×1000 , 网格大小为 $\Delta x = \Delta y = 0.004 \text{ m}$, 长度取粗网格网格长度的 $1/25$, 这样可以使比较的效果更明显。点源放置在计算区域的正中心, 其形式为 $E(t) = \exp(-(t - t_0)^2/\tau^2)$, 其中 $t_0 = 4\tau, \tau = 1.0168 \times 10^{-9}$,

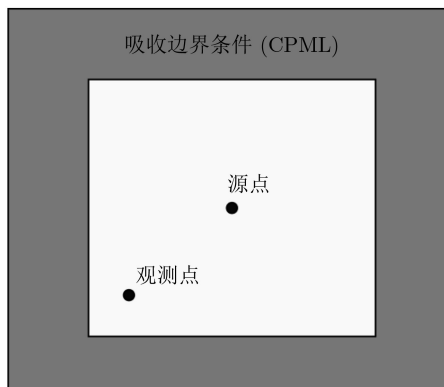


图4 2维点源辐射模型

$R = 5$, $K_1 = -0.144936688126940$, $K_2 = 0.102073777645950$ 。

图5中显示的分别是粗、细网格下对优化后的FDTD算法, 标准的高阶FDTD算法以及标准的普通FDTD算法在观测点的时域波形图。表2显示的是4种情况下的运行时间和占用内存对比。从中可以看出, 点线即优化FDTD方法更加吻合细网格下的FDTD曲线, 在分辨率为 $R = 5$ 的情况下, 其精度可以达到一般FDTD方法分辨率 $R = 125$ 下的效果, 节省了大量的计算机资源, 精确度更高, 运行速度更快。

例2 仿真模型如图6所示。矩形波导二端采用伸缩坐标的吸收边界条件(CPML)吸收平面波, 平面波从左端垂直入射, 在距入射波0.6 m和1.6 m处分别放置2块PEC平板, 板厚0.1 m, 中间开槽, 槽的宽度为0.2 m, 观测点位于右端口。入射波源采用高斯脉冲, 波源形式与例1相同。

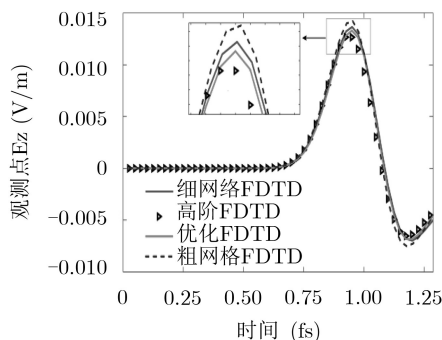


图5 不同方法下点源辐射时域图

表2 4种情况下的运行时间和占用内存对比

	FDTD 方法	运行 时间(s)	占用 内存(MB)	空间 步长(m)	时间 步长(s)
粗网格	S22	0.0356	0.1	0.100	0.16×10^{-9}
	S24	0.0323	0.2	0.100	0.16×10^{-9}
	M24	0.0329	0.7	0.100	0.16×10^{-9}
细网格	S22	77.3070	3.0	0.004	0.66×10^{-10}

图7分别给出了分辨率为 $R = 50$ 情况下传统FDTD, 高阶FDTD, 优化后的FDTD算法与分辨率为 $R = 100$ 下的细网格FDTD的S21参数进行了比较, 结果可以发现优化后的FDTD算法与细网格下的曲线更加吻合, 效果更好。

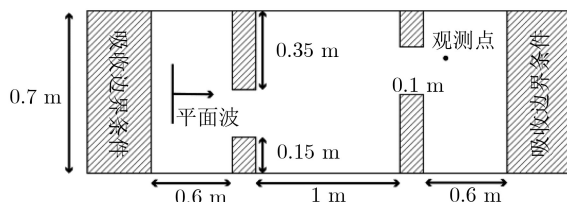


图6 矩形波导示意图

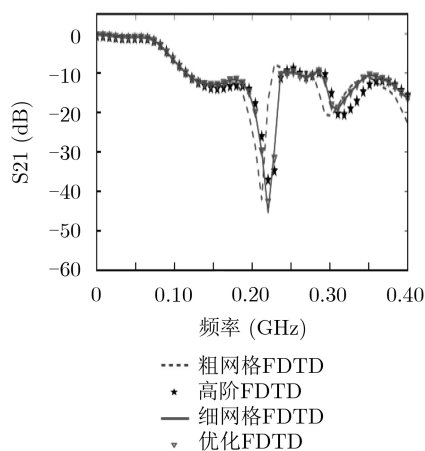


图7 不同方法下的S21参数曲线

5 结论

本文提出了一种对高阶FDTD方法进行优化的技术, 这种优化算法从高阶FDTD基础上出发, 应用安培环路定律通过计算机技术寻找到一组最优的系数使得FDTD方法的全局色散误差达到最小。通过不同分辨率下的点源辐射模拟证明了这种方法在较低分辨率的情况下仍然具有极低的相位误差数值。模拟结果表明, 这种优化算法在保证计算精度的条件下, 明显减少了计算时间, 降低了内存需求, 在精确性和有效性方面都达到了良好的效果, 对于解决电大尺寸结构建模中的数值色散等问题提供了一定的解决方案。

参考文献

- [1] YEE K. Numerical solution of initial boundary value problems involving Maxwell's equations in isotropic media[J]. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, 1966, 14(3): 302-307. doi: 10.1109/TAP.1966.1138693.
- [2] 葛德彪, 闫玉波. 电磁波时域有限差分法[M]. 2版. 西安: 西安电子科技大学出版社, 2005: 58-108.

GE Debiao and YAN Yubo. Finite Difference Time Domain

- Method for Electromagnetic Waves[M]. 2nd ed. Xi'an: Xidian University Press, 2005: 58–108.
- [3] KIM I S and HOEFER W J R. Numerical dispersion characteristics and stability factor for the TD-FD method[J]. *Electronics Letters*, 1990, 26(7): 485–487. doi: [10.1049/el:19900315](https://doi.org/10.1049/el:19900315).
- [4] CANGELLARIS A C and LEE R. On the accuracy of numerical wave simulations based on finite methods[J]. *Journal of Electromagnetic Waves and Applications*, 1992, 6(12): 1635–1653. doi: [10.1163/156939392X00079](https://doi.org/10.1163/156939392X00079).
- [5] SHLAGER K L, MALONEY J G, RAY S L, *et al.* Relative accuracy of several finite-difference time-domain methods in two and three dimensions[J]. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, 1993, 41(12): 1732–1737. doi: [10.1109/8.273296](https://doi.org/10.1109/8.273296).
- [6] 何四华, 吴春光, 丛滨. 基于高频方法的电大尺寸目标RCS仿真与分析[J]. *现代雷达*, 2017, 39(6): 77–80. doi: [10.16592/j.cnki.1004-7859.2017.06.018](https://doi.org/10.16592/j.cnki.1004-7859.2017.06.018).
HE Sihua, WU Chunguang, and CONG Bin. RCS simulation and analysis of electrically large objects based on high frequency method[J]. *Modern Radar*, 2017, 39(6): 77–80. doi: [10.16592/j.cnki.1004-7859.2017.06.018](https://doi.org/10.16592/j.cnki.1004-7859.2017.06.018).
- [7] 杨杨, 朱劼, 邹宁, 等. 电大凸目标电磁散射的数值路径变换算法研究[J]. *电波科学学报*, 2017, 32(2): 199–206. doi: [10.13443/j.cjors.2017012201](https://doi.org/10.13443/j.cjors.2017012201).
YANG Yang, ZHU Jie, ZOU Ning, *et al.* Numerical contour deformation method for calculating the scattered field from the electrically large convex scatterers[J]. *Chinese Journal of Radio Science*, 2017, 32(2): 199–206. doi: [10.13443/j.cjors.2017012201](https://doi.org/10.13443/j.cjors.2017012201).
- [8] GAO Min, YANG Feng, YAN Fei, *et al.* Improved quasi-analytic method for transient analysis of electrically large conducting targets illuminated by a complex source beam[J]. *IET Microwaves, Antennas & Propagation*, 2017, 11(8): 1139–1146. doi: [10.1049/iet-map.2016.0796](https://doi.org/10.1049/iet-map.2016.0796).
- [9] HADI M F, BOLLIMUNTHA R C, ELSHERBENI A Z, *et al.* A spherical FDTD numerical dispersion relation based on elemental spherical wave functions[J]. *IEEE Antennas and Wireless Propagation Letters*, 2018, 17(5): 784–788. doi: [10.1109/LAWP.2018.2816459](https://doi.org/10.1109/LAWP.2018.2816459).
- [10] PEREDA J A and GRANDE A. Numerical dispersion relation for the 2-D LOD-FDTD method in lossy media[J]. *IEEE Antennas and Wireless Propagation Letters*, 2017, 16: 2122–2125. doi: [10.1109/LAWP.2017.2699692](https://doi.org/10.1109/LAWP.2017.2699692).
- [11] KANG Zhen, MA Xikui, and SHAO Jinghui. A low-dispersion realization of a rectangular grid with PITD method through artificial anisotropy[J]. *IEEE Microwave and Wireless Components Letters*, 2017, 27(4): 320–322. doi: [10.1109/LMWC.2017.2678399](https://doi.org/10.1109/LMWC.2017.2678399).
- [12] ZHOU Longjian, YANG Feng, LONG Rui, *et al.* A hybrid method of higher-order FDTD and subgridding technique[J]. *IEEE Antennas and Wireless Propagation Letters*, 2016, 15: 1261–1264. doi: [10.1109/LAWP.2015.2504448](https://doi.org/10.1109/LAWP.2015.2504448).
- [13] 苏卓, 谭峻东, 张俊, 等. 基于高阶时域有限差分算法的电磁波传播计算[J]. *电波科学学报*, 2014, 29(3): 431–436. doi: [10.13443/j.cjors.2013060801](https://doi.org/10.13443/j.cjors.2013060801).
SU Zhuo, TAN Jundong, ZHANG Jun, *et al.* An electromagnetic wave propagator based on higher-order FDTD method[J]. *Chinese Journal of Radio Science*, 2014, 29(3): 431–436. doi: [10.13443/j.cjors.2013060801](https://doi.org/10.13443/j.cjors.2013060801).
- [14] SAXENA A K and SRIVASTAVA K V. Higher order LOD-FDTD methods and their numerical dispersion properties[J]. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, 2017, 65(3): 1480–1485. doi: [10.1109/TAP.2017.2653758](https://doi.org/10.1109/TAP.2017.2653758).
- [15] REN Xingang, HUANG Zhixiang, WU Xianliang, *et al.* High-order unified symplectic FDTD scheme for the metamaterials[J]. *Computer Physics Communications*, 2012, 183(6): 1192–1200. doi: [10.1016/j.cpc.2012.01.021](https://doi.org/10.1016/j.cpc.2012.01.021).
- [16] WEI Xiaokun, SHAO Wei, SHI Shengbing, *et al.* An optimized higher order PML in domain decomposition WLP-FDTD method for time reversal analysis[J]. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, 2016, 64(10): 4374–4383. doi: [10.1109/TAP.2016.2596899](https://doi.org/10.1109/TAP.2016.2596899).
- [17] TAFLOVE A. Computational Electrodynamics: The Finite-Difference Time-Domain Method[M]. Boston: Artech House, 1995: 109–174.
- [18] HADI M F. A modified FDTD (2, 4) scheme for modeling electrically large structures with high phase accuracy[D]. [Ph.D. dissertation], University of Colorado, 1996.
- 许杰: 男, 1989年生, 博士, 研究方向为计算电磁学、高性能计算和时域数值算法。
- 徐珂: 男, 1991年生, 博士, 研究方向为计算电磁学、多物理仿真和时域数值算法。
- 黄志祥: 男, 1979年生, 教授, 博士生导师, 研究方向为计算电磁学, 电磁散射与逆散射。