高斯整数零相关区序列集构造方法的研究

陈晓玉[①②]　　李冠敏[①②]　　孔德明*[③]　　李玉博[①②]

[①](燕山大学信息科学与工程学院　秦皇岛　066004)
[②](河北省信息传输与信号处理重点实验室　秦皇岛　066004)
[③](燕山大学电气工程学院　秦皇岛　066004)

摘　要：该文提出两类高斯整数零相关区(ZCZ)序列集的构造方法。方法1以ZCZ序列集为基础，利用插零滤波法构造高斯整数ZCZ序列集，并给出了所构造的高斯整数ZCZ序列集度的计算方法。方法2提出了两种高斯整数正交矩阵的构造方法，进而基于正交矩阵构造最优高斯整数ZCZ序列集。该文所构造的高斯整数ZCZ序列集可以应用于准同步码多分址(QS-CDMA)、正交频分复用(OFDM)和多输入多输出(MIMO)等多种通信系统中，在抑制干扰的同时，提高系统的频谱效率。

关键词：信号处理；高斯整数；零相关区序列；度；正交矩阵

中图分类号：TN911.2　　**文献标识码**：A　　**文章编号**：1009-5896(2019)06-1420-07

DOI: 10.11999/JEIT180703

Research on the Constructions of Gaussian Integer Zero Correlation Zone Sequence Set

CHEN Xiaoyu[①②]　　LI Guanmin[①②]　　KONG Deming[③]　　LI Yubo[①②]

[①](*College of Information Science and Engineering, Yanshan University, Qinhuangdao* 066004, *China*)
[②](*Hebei Key Laboratory of Information Transmission and Signal Processing, Qinhuangdao* 066004, *China*)
[③](*College of Electrical Engineering, Yanshan University, Qinhuangdao* 066004, *China*)

Abstract: Two constructions of Gaussian integer Zero Correlation Zone (ZCZ) sequence set are researched. In Construction I, the method of zero padding is implemented on the ZCZ sequence set, and then the Gaussian integer ZCZ can be obtained by the filtering operation. Furthermore, the degree of the Gaussian integer ZCZ sequence set is calculated in this paper. In Construction II, two constructions of Gaussian integer orthogonal matrix are proposed. In addition, the optimal Gaussian integer ZCZ sequence sets are constructed based on the orthogonal matrix. The two classes of Gaussian integer ZCZ sequence sets presented in this paper can be applied to many communication systems such as Quasi-Synchronous Code Division Multiple Access (QS-CDMA), Orthogonal Frequency Division Multiplexing (OFDM) and Mutiple-Input Multiple-Output (MIMO) system to suppress the interference and improve the spectrum efficiency.

Key words: Signal processing; Gaussian integer; Zero Correlation Zone (ZCZ) sequence; Degree; Orthogonal matrix

1　引言

高斯整数序列是一类复数序列，它的实部和虚部都取自整数集。由于具有较高的传输速率和频谱利用率[1]，高斯整数序列得到了广泛关注，尤其是完备高斯整数序列，已经取得了一定的研究成果。文献[2]利用较短的完备高斯整数序列，构造了高能量效率的长完备高斯整数序列。文献[3]在m序列和GMW(Gordon-Mills-Welch)序列的基础上，利用映射关系生成了的$p-1$级完备和几乎完备高斯整数序列。文献[4]把集合Z_N分成$k+1$个子集，在此基础上构造周期为p^k的完备高斯整数序列。文献[5]利用p元伪随机序列构造了长度为p^m-1的几乎完备高斯整数序列。文献[6,7]构造出了任意长度的完

收稿日期：2018-07-13；改回日期：2019-01-28；网络出版：2019-02-20
*通信作者：　孔德明　demingkong@ysu.edu.cn
基金项目：国家自然科学基金(61601399, 61501395, 61501394)，河北省自然科学基金(F2016203155)，河北省高等学校科学研究计划(QN2016120)

Foundation Items: The National Natural Science Foundation of China (61601399, 61501395, 61501394), The Natural Science Foundation of Hebei Province (F2016203155), The Science Research Programs of Hebei Educational Committee (QN2016120)

备高斯整数序列。ZCZ序列是一种适用于准同步码多分址(QS-CDMA)系统的扩频地址码。在QS-CDMA系统中，只要通信用户信号的时延不超过一定范围(零相关区长度)，零相关区(Zero Correlation Zone, ZCZ)序列便可利用自身理想的自相关特性和互相关特性消除系统的多址干扰和多径干扰。除此应用之外，在多输入多输出-正交频分复用(MIMO-OFDM)系统[8]中，ZCZ序列集也可利用自身相关特性进行无干扰导频设计，从而获得较高的信道估计精度，有效地消除同信道导频干扰。高斯整数ZCZ序列集可以兼具二者的优点。一方面可以保证较高的频谱利用率，另一方面可以降低系统的干扰，具有良好的应用前景。文献[9]以差集为基础，利用移位序列得到了参数灵活的高斯整数ZCZ序列集。文献[10]对二元正交矩阵进行插零和过滤操作得到了最优和几乎最优的高斯整数ZCZ序列集，但插零的个数受矩阵阶数和完备序列长度的限制。文献[11]利用过滤方法，基于不同种类的基序列和完备序列得到相应的高斯整数ZCZ序列集。文献[12]基于完备序列和16-QAM正交矩阵，构造出了参数可以灵活选择的16-QAM零相关区序列集，它是高斯整数ZCZ序列集的特例。文献[13]利用完备高斯整数序列构造了高斯整数ZCZ序列集。文献[14]利用交织法构造了长度为偶数的高斯整数ZCZ序列集。

本文提出两种高斯整数ZCZ序列集的构造方法。方法1是基于ZCZ序列集进行设计的，并给出了所构造的高斯整数ZCZ序列集度的计算方法。方法2是基于高斯整数正交矩阵进行设计的，提出了两种高斯整数正交矩阵的构造方法, 此正交矩阵可以为具有其它相关特性的高斯整数序列设计提供初始序列。

2　基本概念

定义1　设序列u=$(u(0), u(1), \cdots, u(N-1))$是一个长度为$N$的复数序列，序列中的元素$u(t)$, $0 \le t \le N-1$取自集合A，其中A=$\{a+bj|a, b \in Z\}$，则称序列u为高斯整数序列。序列u中不同非零元素的个数称为序列u的度。

定义2　设a=$(a(0), a(1), \cdots, a(N-1))$和$b$=$(b(0), b(1), \cdots, b(N-1))$是两个复数序列，序列$a$和序列$b$的周期互相关函数定义为

$$R_{a,b}(\tau)=\sum_{t=0}^{N-1} a(t)\cdot b^*(t+\tau),\ 0 \le \tau \le N-1 \tag{1}$$

其中，$t+\tau$为模N运算。当a=b时，$R_{a,a}(\tau)$为序列a的自相关函数，简记为$R_a(\tau)$。

定义3　设序列u的自相关函数满足

$$R_u(\tau)=\begin{cases} E_u, & \tau=0(\bmod N) \\ 0, & \tau \ne 0(\bmod N) \end{cases} \tag{2}$$

其中，E_u=$\sum_{t=0}^{N-1}|u(t)|^2$, E_u是一个正实数，则称序列u为完备序列。

定义4　设U=$\{u^0, u^1, \cdots, u^{M-1}\}$是一个包含$M$个序列的序列集，其中$u^i$=$(u^i(0), u^i(1), \cdots, u^i(N-1)), 0 \le i \le M-1$。对于序列集$U$中任意的两个序列$u^i, u^j$，当$|\tau| \le Z-1, i \ne j$或者$0<|\tau| \le Z-1, i$=$j$时，序列的相关函数都满足：$\left|R_{u^i,u^j}(\tau)\right|$=0。则称序列集$U$为ZCZ序列集，其参数用$(N, M, Z)$来表示，其中$Z$是零相关区的长度。

定义5[15]　设一个参数为(N, M, Z)的ZCZ序列集，根据ZCZ的理论界限值可知：$ZM/N \le 1$。假设M_0是理论上序列数目的最大值，则M_0=$\lfloor N/Z \rfloor$，其中$\lfloor\cdot\rfloor$表示向下取整。如果序列集的数目满足M=M_0，则称序列集为最优ZCZ序列集，此时性能参数为η=$M/\lfloor N/Z \rfloor$=1。如果M=M_0-1或者M=M_0-2，则称序列集为几乎最优ZCZ序列集。

定义6[16]　设序列u=$(u(0), u(1), \cdots, u(N-1))$和$v$=$(v(0), v(1), \cdots, v(N-1))$是长度为$N$的两个序列，利用序列$u$和$v$构造新的序列$s$=$(s(0), s(1), \cdots, s(N-1))$如式(3)

$$s=u \odot v \tag{3}$$

其中，

$$s(k)=\sum_{t=0}^{N-1} v(t)u^*(t+k),\ 0 \le k \le N-1 \tag{4}$$

其中，$\odot$表示过滤操作，序列u称为基序列，v称为过滤序列。

引理1[16]　设序列集S=$\{s^0, s^1, \cdots, s^{M-1}\}$和序列集$U$=$\{u^0, u^1, \cdots, u^{M-1}\}$，其中$s^i$是由$u^i$过滤得到的，即$s^i$=$u^i \odot v$，若过滤序列$v$是完备序列，则序列集$S$和序列集$U$的自相关和互相关特性均相同。

3　基于ZCZ序列集构造法

3.1　构造法1

本节将ZCZ序列插0，然后利用完备高斯整数序列进行过滤操作得到高斯整数ZCZ序列集。

步骤1　设序列集U=$\{u^0, u^1, \cdots, u^{M-1}\}$是一个参数为$(N, M, Z)$的ZCZ序列集，其中，

$$u^i=(u^i(0), u^i(1), \cdots, u^i(N-1), 0 \le i \le M-1 \tag{5}$$

将序列u^i的每个元素后面插入$K-1$个连续0元素，构成新的序列集$\breve{U}$=$\{\breve{u}^0, \breve{u}^1, \cdots, \breve{u}^{M-1}\}$，具体如式(6)

$$\breve{u}^i=(\breve{u}^i(0),\breve{u}^i(1),\cdots\breve{u}^i(L-1))$$
$$=\Bigg(u^i(0),\overbrace{0,\cdots,0}^{K-1},u^i(1),\overbrace{0,\cdots,0}^{K-1},\cdots,$$
$$u^i(N-1),\overbrace{0,\cdots,0}^{K-1}\Bigg) \tag{6}$$

其中，$0\le i\le M-1$, $L{=}NK$；

步骤 2 设$a{=}(a(0),a(1),\cdots,a(P-1))$是一个长度为$P$(其中$P|L$)的完备高斯整数序列,将序列$a$每个元素后面加上$J-1$个连续0元素，得到一个新的完备序列如式(7)

$$\breve{a}=(\breve{a}(0),\breve{a}(1),\cdots,\breve{a}(L-1))$$
$$=\Bigg(a(0),\overbrace{0,\cdots,0}^{J-1},a(1),\overbrace{0,\cdots,0}^{J-1},\cdots,$$
$$a(P-1),\overbrace{0,\cdots,0}^{J-1}\Bigg) \tag{7}$$

其中，$J{=}L/P$；

步骤 3 将序列$\breve{u}^i$作为基序列,序列$\breve{a}$作为过滤序列，进行过滤操作后得到一个新的序列集$C{=}\{c^0,c^1,\cdots,c^{M-1}\}$，具体为

$$c^i{=}(c^i(0),c^i(1),\cdots,c^i(L-1)) \tag{8}$$

$$c^i(t){=}\sum_{\tau=0}^{L-1}\breve{a}(\tau)\,\breve{u}^{i*}(\tau+t),\ 0\le t\le L-1 \tag{9}$$

定理1 序列集C是一个参数为(NK,M,ZK)的高斯整数ZCZ序列集。

证明 设任意的两个序列$\breve{u}^i,\breve{u}^j\in\breve{U}$，其中$0\le i,j\le M-1$，序列$\breve{u}^i$中的元素可以表示为

$$\breve{u}^i(t)=u^i(q_i)\delta(t-q_iK),$$
$$0\le q_i\le N-1,\ 0\le t\le L-1 \tag{10}$$

计算其互相关函数如式(11)

$$R_{\breve{u}^i,\breve{u}^j}(\tau){=}\sum_{t=0}^{L-1}\breve{u}^i(t)\,\breve{u}^{j*}(t+\tau)$$
$$=\sum_{t=0}^{L-1}u^i(q_i)\delta(t-q_iK)$$
$$\cdot u^{j*}(q_j)\delta(t+\tau-q_jK) \tag{11}$$

当$\tau{=}0$且$i\ne j$时

$$R_{\breve{u}^i,\breve{u}^j}(0){=}\sum_{t=0}^{N-1}u^i(t)u^{j*}(t){=}0 \tag{12}$$

当$\tau\ne(q_j-q_i)K$时，对于任意的$0\le t\le L-1$，必有$t-q_i\cdot K$和$t+\tau-q_jK$不同时为0，则有$R_{\breve{u}^i,\breve{u}^j}(\tau){=}0$。

当$\tau\ne0$且$\tau{=}(q_j-q_i)K$时，有

$$R_{\breve{u}^i,\breve{u}^j}(\tau){=}\sum_{q_i=0}^{N-1}u^i(q_i)u^{j*}(q_i+\tau/K)$$
$$=R_{u^i,u^j}(\tau/K) \tag{13}$$

对于任意的$\tau{=}(q_j-q_i)K$，可以得到$0<\tau/K{=}(q_j-q_i)\le Z-1$，由序列集$U$的零相关区长度为$Z$，得$R_{\breve{u}^i,\breve{u}^j}(\tau){=}0$。

综上所述，序列集$\breve{U}$是一个参数为(NK,M,ZK)的ZCZ序列集。已知$\breve{a}$是完备序列，根据引理1知序列集C是一个参数为(NK,M,ZK)的高斯整数ZCZ序列集。 证毕

3.2 高斯整数ZCZ序列集度的计算方法

文献[11]中指出高斯整数ZCZ序列集的度不是无限而是有限的，本文中最小度为2，最大度与初始ZCZ序列和完备序列的选取有关。本节给出了一种计算度的具体方法。

步骤 1 设g为高斯整数ZCZ序列集的度，令集合$M{=}\{m_0,m_1,\cdots,m_{g-1}\}$, $m_i\ne0$；

步骤 2 设$\gcd(J,K){=}d$，将完备序列a中的元素分为d组，每个组$D_i(0\le i\le d-1)$中含有$q{=}P/d$个元素。如式(14)

$$a{=}\,(D_0,D_1,\cdots,D_{d-1})$$
$$=(\overbrace{a(0),a(1),\cdots,a(q-1)}^{D_0},$$
$$\overbrace{a(q),a(q+1),\cdots,a(2q-1)}^{D_1},\cdots,$$
$$\overbrace{a(P-q),a(P-q+1),\cdots,a(P)}^{D_{d-1}}) \tag{14}$$

其中，$a(p)\ne0,0\le p\le P-1$；

步骤 3 将D_i中的元素与集合M中的元素对应相乘，则有

$$\boldsymbol{V}{=}[v_{i,j}]_{d\times g}{=}\begin{bmatrix}v_{0,0}&v_{0,1}&\cdots&v_{0,g-1}\\v_{1,0}&v_{1,1}&\cdots&v_{1,g-1}\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\v_{d-1,0}&v_{d-1,1}&\cdots&v_{d-1,g-1}\end{bmatrix}_{d\times g} \tag{15}$$

其中，

$$v_{i,j}{=}D_i\times m_j,0\le i\le d-1,0\le j\le g-1 \tag{16}$$

步骤 4 令集合W如式(17)

$$W{=}\,\{w|w{=}v_{0,j_0}+v_{1,j_1}+\cdots+v_{d-1,j_{g-1}},$$
$$j_0,j_1,\cdots,j_{g-1}\in[0,g-1],v_{ij}\in\boldsymbol{V}\} \tag{17}$$

定理2 高斯整数ZCZ序列集的度$g\le|W|$。当$\gcd(J,K){=}1$时，高斯整数ZCZ序列集的度$g{=}|W|$。

证明 序列$\breve{a}$可以分解成$\breve{a}(t){=}\sum_{l=0}^{d-1}\breve{a}^l(t)$，其中，

$$\breve{a}^{l}(t)=\begin{cases}\breve{a}(t), & lL_0 \le t < (l+1)L_0 \\ 0, & \text{其他}\end{cases} \tag{18}$$

其中，$l=0,1,\cdots,d-1$，$t=0,1,\cdots,L-1$，$L_0=L/d$。

序列$\breve{a}$中的元素可以表示为

$$\begin{aligned}\breve{a}(t) &= a(p)\delta(t-pJ),\\ &\quad 0 \le p \le P-1, 0 \le t \le L-1\end{aligned} \tag{19}$$

由式(9)、式(10)、式(18)和式(19)可得序列c^i如式(20)

$$\begin{aligned}c^i(t) &= \breve{u}^{i}(t) \odot \breve{a}(t) = \sum_{l=0}^{d-1}\sum_{\tau=0}^{L-1} \breve{a}^{l}(\tau)\,\breve{u}^{i*}(\tau+t)\\ &= \sum_{l=0}^{d-1}\sum_{\tau=0}^{L-1} a^l(p)\delta(\tau-pJ)\cdot u^{i*}(q_i)\delta(\tau+t-q_iK)\end{aligned} \tag{20}$$

过滤过程的实质是一个移位相乘再相加的过程。相乘过程由L项元素相乘得到矩阵$\boldsymbol{V}$中的元素，相加过程由d项矩阵$\boldsymbol{V}$中的元素相加得到集合W中的元素。

由$\gcd(J,K)=d$可知存在唯一整数对(x,y)使$xJ+yK=d$成立，其中，x或y为负数。为不失一般性，设x为负数，令$x'=-x$。可得$yK=x'J+d$，式子两边同时乘以整数s, $0 \le s \le L/d$，可得$syK=sx'J+sd$。可知存在唯一整数对(p,q_i)，$p=sx'$，$q_i=sy$，满足式子$\tau=pJ=q_iK-t$, $t=sd$。即d取值固定时，$a^l(p)\delta(\tau-pJ)\cdot u^{i*}(q_i)\delta(\tau+t-q_iK)$只有一个非0值。

当$d>1$时，矩阵$\boldsymbol{V}$中元素相加过程中会产生结果相同的值，因此序列集C所得的度$g \le |W|$。

当$d=1$时，没有相加过程，因此序列集C所得的度$g=|W|$。　　证毕

3.3 性能分析和构造实例

序列集C的参数为(NK,M,ZK)，它的性能参数η如式(21)所示

$$\eta=\frac{M}{\lfloor NK/ZK \rfloor}=\frac{M}{\lfloor N/Z \rfloor} \tag{21}$$

因此，若初始的ZCZ序列集达到最优或者几乎最优，生成的序列集C也是最优或者几乎最优的。

例1　选取参数为(16，4，3)的ZCZ序列集$U=\{u^0,u^1,u^2,u^3\}$如下：u^0=(1, 1, −1, 1, 1, 1, −1, 1, −1, −1, −1, 1, 1, −1, −1, −1, 1)；u^1=(−1, −1, 1, −1, 1, 1, −1, 1, 1, 1, 1, −1, −1, −1, −1, 1)；u^2=(1, −1, −1, −1, 1, −1, −1, −1, −1, 1, −1, −1, −1, 1, −1, −1)；u^3=(−1, 1, 1, 1, 1, −1, −1, −1, 1, −1, 1, 1, −1, 1, −1, −1)。

长度为3的完备序列为$a=[6+11j, 6-10j, 6+2j]$。

可知$K=3$, $J=16$，过滤后得参数为(48, 4, 9)的高斯整数ZCZ序列集$C=\{c^0,c^1,c^2,c^3\}$，序列集为几乎最优ZCZ序列集，部分序列如表1。

表 1　c^0和c^1序列元素

$c^0=[6+11j, 6+2j, -6+10j, 6+11j, -6-2j,$ $6-10j, -6-11j, -6-2j, -6+10j, 6+11j, -6-2j,$ $-6+10j, 6+11j, 6+2j, -6+10j, 6+11j, 6+2j,$ $6-10j, -6-11j, 6+2j, -6+10j, 6+11j, -6-2j,$ $-6+10j, -6-11j, 6+2j, -6+10j, -6-11j, 6+2j,$ $6-10j, -6-11j, 6+2j, 6-10j, 6+11j, -6-2j,$ $6-10j, -6-11j, 6+2j, -6+10j, -6-11j, -6-2j, 6-10j,$ $-6-11j, -6-2j, 6-10j, 6+11j, -6-2j, 6-10j]$
$c^1=[-6-11j, -6-2j, -6+10j, -6-11j, -6-2j, 6-10j,$ $6+11j, -6-2j, 6-10j, -6-11j, -6-2j, 6-10j, 6+11j,$ $6+2j, 6-10j, 6+11j, -6-2j, -6+10j, -6-11j, -6-2j,$ $-6+10j, 6+11j, 6+2j, -6+10j, 6+11j, -6-2j, -6+10j,$ $6+11j, 6+2j, 6-10j, 6+11j, 6+2j, -6+10j, -6-11j,$ $-6-2j, -6+10j, -6-11j, 6+2j, 6-10j, -6-11j, 6+2j,$ $-6+10j, -6-11j, 6+2j, 6-10j, 6+11j, 6+2j, 6-10j]$

度的计算：由序列集U和完备序列a可知：$M=\{1,-1\}$，$\gcd(16,3)=1$，$D_0=[6+11j, 6-10j, 6+2j]$；由此可得矩阵：$\boldsymbol{V}=\begin{bmatrix} D_0 & -D_0 \end{bmatrix}$。集合$W$中的元素为$\{6+11j, 6-10j, 6+2j, -6-11j, -6+10j, -6-2j\}$，则$|W|=6$，序列集$C$的度$g=6$。

4 基于正交矩阵构造法

4.1 构造法2

步骤1　构造$N\times N$阶高斯整数正交矩阵$\boldsymbol{H}=[h^0,h^1,\cdots,h^{N-1}]^{\mathrm T}$，其中$[\cdot]^{\mathrm T}$表示矩阵的转置，$h^i=(h^i(0),h^i(1),\cdots,h^i(N-1))$表示$\boldsymbol{H}$的第$i$行，$0\le i\le N-1$；

步骤2　构造序列集$U=\{h^0,h^1,\cdots,h^{N-1}\}$。由正交矩阵的性质知序列集$U$是参数为$(N,N,1)$的ZCZ序列集；

步骤3　将U作为初始序列集，利用构造法1，构造序列集C。

由定理1知序列集C是参数为(NK,N,K)的高斯整数ZCZ序列集。

序列集C的性能参数为$\eta=1$，由定义5知序列集C的参数达到理论界限。由于矩阵阶数和插0个数不受限制，所以序列长度和零相关区长度均可以灵活选择，均可得到最优ZCZ序列集。

高斯整数正交矩阵是构造法2中高斯整数ZCZ序列集设计方法的基础，因此高斯整数正交矩阵的设计尤为重要。

4.2 高斯整数正交矩阵的构造方法

4.2.1 基于多电平正交矩阵构造法

设多电平Hadamard矩阵$\boldsymbol{H}=[h_{t,j}]_{N\times N}$，$h_t$表示矩阵$\boldsymbol{H}$的第$t$行$(0\le t\le N-1)$。设序列$a=(a(0), a(1),\cdots,a(m))$和序列$b=(b(0),b(1),\cdots,b(m))$是高斯整数序列，满足$|a(i)|=|b(i)|, 0\le i\le m$，$c$是一个高斯整数。设矩阵$\boldsymbol{Q}=[q_{t,j}]_{N\times N}$，$q_t$表示矩阵$\boldsymbol{Q}$的第$t$行$(0\le t\le N-1)$，构造方法为

当N为偶数时，$m=0,1,\cdots,N/2-1$

$$\left.\begin{aligned} q_{2m}&=a(m)h_{2m}+b(m)h_{2m+1}\\ q_{2m+1}&=a(m)h_{2m}-b(m)h_{2m+1}\end{aligned}\right\} \tag{22}$$

当N为奇数时，$m=0,1,\cdots,(N-1)/2-1$

$$\left.\begin{aligned} q_{2m}&=a(m)h_{2m}+b(m)h_{2m+1}\\ q_{2m+1}&=a(m)h_{2m}-b(m)h_{2m+1}\\ q_{N-1}&=ch_{N-1}\end{aligned}\right\} \tag{23}$$

定理3 矩阵$\boldsymbol{Q}$是一个高斯整数正交矩阵。

证明 当N为奇数时，令$0\le m_1\ne m_2\le (N-1)/2-1$，以$q_{2m_1}\cdot q_{N-1}$为例进行分析如式(24)

$$\begin{aligned} q_{2m_1}\cdot q_{N-1}=&\sum_{t=0}^{N-1}(a(m_1)h_{2m_1}+b(m_1)h_{2m_1+1})\\ &\cdot(ch_{N-1})^*\\ =&\sum_{t=0}^{N-1}a(m_1)c^*h_{2m_1}h_{N-1}\\ &+b(m_1)c^*h_{2m_1+1}h_{N-1}=0\end{aligned} \tag{24}$$

同样，$q_{2m_1}\cdot q_{2m_2}=0$和$q_{2m_1}\cdot q_{2m_1+1}=0$的证明过程类似。

当N为偶数时，证明过程与N为奇数时类似。

综上所述，矩阵$\boldsymbol{Q}$是一个高斯整数正交矩阵。由$|a(i)|=|b(i)|$可知矩阵$\boldsymbol{Q}$的阶数最大为9。 证毕

4.2.2 基于离散傅里叶变换构造法

设3×3阶矩阵$\boldsymbol{h}=[h_{i,j}]_{3\times3}$，$\boldsymbol{h}_i$为$\boldsymbol{h}$的第$i$行，其中，

$$\boldsymbol{h}_i=\begin{bmatrix} m_i & a_i\sqrt{3}+b_ij & -a_i\sqrt{3}+b_ij\end{bmatrix} \tag{25}$$

对于任意的$i\ne s$，$i,s=0,1,2$满足

$$m_im_s+6a_ia_s+2b_ib_s=0 \tag{26}$$

设矩阵$\boldsymbol{H}=[\boldsymbol{H}_{i,j}]_{3\times3}$，$\boldsymbol{H}_i$表示矩阵$\boldsymbol{H}$的第$i$行，令$\boldsymbol{H}_i=\mathrm{DFT}\,[h_i]$。

定理4 矩阵$\boldsymbol{H}$是一个3×3阶高斯整数正交矩阵。

证明 由DFT性质可知

$$\boldsymbol{H}_i=\mathrm{DFT}\,[h_i]=\begin{bmatrix} m_i+2b_ij\\ m_i+(3a_i-b_i)j\\ m_i-(3a_i+b_i)j\end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \tag{27}$$

因为$m_i,a_i,b_i\in Z$，$i=0,1,2$，所以得到的矩阵$\boldsymbol{H}$是高斯整数矩阵。

下面证明矩阵$\boldsymbol{H}$的正交性，任取$0\le i\ne s\le 2$，则$\boldsymbol{H}_i,\boldsymbol{H}_s$是$\boldsymbol{H}$的任意两行。

$$\begin{aligned} \boldsymbol{H}_i\cdot\boldsymbol{H}_s=&(m_i+2b_ij)(m_s+2b_sj)^*\\ &+[m_i+(3a_i-b_i)j]\cdot[m_s+(3a_s-b_s)j]^*\\ &+[m_i-(3a_i+b_i)j]\cdot[m_s-(3a_s+b_s)j]^*\\ =&3(m_im_s+6a_ia_s+2b_ib_s)=0\end{aligned} \tag{28}$$

从而得出结论：矩阵$\boldsymbol{H}$是一个高斯整数正交矩阵。 证毕

文献[4]在构造完备高斯整数序列时，给出了多个未知数求整数解的方法。类似地，m_i,a_i,b_i整数解的具体求法可以参考文献[4]。

针对正交矩阵的构造，文献[17]基于具有理想自相关的二进制序列构造了4元Hadamard矩阵。文献[12]以2元和4元正交矩阵为基础，利用反格雷映射，构造了16-QAM正交矩阵，可以看做是一种特殊的高斯整数正交矩阵。文献[18]以高斯整数为基础，利用傅氏变换构造了3阶的高斯整数正交矩阵。而本文式(27)以多电平矩阵为基础，只有当$b_i=0$，并且文献[18]中$y=z=0$，b为非0实数时，两种构造方法才可获得相同的结果。本文提出了两种高斯整数正交矩阵的构造方法，可以提供多个新的高斯整数正交矩阵。

4.3 Kronecker积

综合上述两种正交矩阵的构造方法，可以得到2～9阶的高斯整数正交矩阵，用$\boldsymbol{H}_{k_i}$表示，其中$k_i\in\{2,3,4,5,6,7,8,9\}$。构造阶数为$G$的高斯整数正交矩阵$\boldsymbol{H}_G$，如式(29)

$$\boldsymbol{H}_G=\boldsymbol{H}_{k_1}\otimes\boldsymbol{H}_{k_2}\otimes\cdots\otimes\boldsymbol{H}_{k_T} \tag{29}$$

其中，$\otimes$表示Kronecker积，$G=k_1\cdot k_2\cdots k_T$。表2列举了2阶、3阶以及5阶的高斯整数正交矩阵，以及由Kronecker积产生的6阶的高斯整数正交矩阵。

4.4 构造实例

例2 令$\begin{bmatrix} m_0 & a_0 & b_0\\ m_1 & a_1 & b_1\\ m_2 & a_2 & b_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2 & -1 & 1\\ 1 & -1 & -4\\ -10 & -3 & 1\end{bmatrix}$，将参数$m_i,a_i,b_i$代入到式(25)，可以得到

$$h=\begin{bmatrix} 2 & -\sqrt{3}+j & \sqrt{3}+j\\ 1 & -\sqrt{3}-4j & \sqrt{3}-4j\\ -10 & -3\sqrt{3}+j & 3\sqrt{3}+j\end{bmatrix} \tag{30}$$

由$\boldsymbol{H}_i=\mathrm{DFT}\,[h_i]$可以得到高斯整数正交矩阵$\boldsymbol{H}$如式(31)

$$\boldsymbol{H}=\begin{bmatrix} 2+2j & 2+2j & 2-4j\\ 1-8j & 1+7j & 1+j\\ -10+2j & -10+8j & -10-10j\end{bmatrix} \tag{31}$$

表 2 正交矩阵的构造实例

矩阵	构造方法	参数	矩阵实例
$\boldsymbol{H}_2$	基于多电平	$a=(1+j)$ $b=(1-j)$	$\boldsymbol{H}_2=\begin{bmatrix} 2 & 2j \\ 2j & 2 \end{bmatrix}$
$\boldsymbol{H}_3$	基于DFT变换	$m_i=(18,1,6)$ $a_i=(-1,-1,-3)$ $b_i=(3,-4,3)$	$\boldsymbol{H}_3=\begin{bmatrix} 18+6j,18-6j,18 \\ 1-8j,1+j,1+7j \\ 6+6j,6-12j,6+6j \end{bmatrix}$
$\boldsymbol{H}_5$	基于多电平	$a=(1+j,-1+j)$ $b=(1-j,-1-j)$ $c=(2+j)$	$\boldsymbol{H}_5=\begin{bmatrix} 1+5j,1-5j,-4,-4,-4, \\ 5+j,-5+j,-4j,-4j,-4j \\ 4,4,-1+5j,-1-5j,4 \\ -4j,-4j,-5+j,5+j,-4j \\ -4-2j,-4-2j,-4-2j,-4-2j,6+3j \end{bmatrix}$
$\boldsymbol{H}_6=\boldsymbol{H}_2\otimes\boldsymbol{H}_3$	Kronecker积	同$\boldsymbol{H}_2$和$\boldsymbol{H}_3$的参数	$\boldsymbol{H}_6=\begin{bmatrix} 36+12j,36-12j,36,-12+36j,12+36j,36j; \\ 2-16j,2+2j,2+14j,16+2j,-2+2j,-14+2j; \\ 12+12j,12-24j,12+12j,-12+12j,24+12j,-12+12j; \\ -12+36j,12+36j,36j,36+12j,36-12j,36; \\ 16+2j,-2+2j,-14+2j,2-16j,2+2j,2+14j; \\ -12+12j,24+12j,-12+12j,12+12j,12-24j,12+12j \end{bmatrix}$

例3 取例2中的3×3阶高斯整数正交矩阵，可以得到参数为(3，3，1)的ZCZ序列集$U=\{h^0,h^1,h^2\}$。取长度为9的完备序列为：$a=(6+41j, 6-10j, 6+2j, 6-22j, 6-10j, 6+2j, 6+14j$，$6-10j, 6+2j)$。

可知$K=3, J=1$，过滤得到序列集$C=\{c^0, c^1, c^2\}$，部分序列为

$$c^0=\begin{cases} 18+66j, 36+12j, 36-60j, 234+66j, \\ 36+12j, 36-60j, -144+66j, \\ 36+12j, 36-60j \end{cases} \tag{32}$$

$$c^1=\begin{cases} -450+33j, 18+6j, 18-30j, 171+33j, \\ 18+6j, 18-30j, 333+33j, \\ 18+6i, 18-30j \end{cases} \tag{33}$$

由此可知序列集C是参数为(9，3，3)的高斯整数ZCZ序列集，而且是最优的。

表3对现有文献中高斯整数ZCZ序列集构造方法进行了比较，可以看出文献[10]中序列的插0个数受到N, Z的限制。文献[11]构造了与初始多元序列集的参数完全相同的高斯整数ZCZ序列集。文献[14]和文献[19]只能构造偶数长度的序列。本文定理1构造的序列长度是初始ZCZ序列长度的任意整数倍。定理2所构造的高斯整数ZCZ序列集的参数可以灵活选择且均为最优，本文构造的高斯整数ZCZ序列可以应用于QS-CDMA系统，降低干扰的同时提高频谱效率。

表 3 高斯整数ZCZ序列集参数比较

文献定理	构造基础	序列集参数	η
文献[10] 定理3	2元正交矩阵	$\mathrm{ZCZ}(L,N,Z-1), \gcd(N,Z)=1$ $\mathrm{ZCZ}(L,N,Z-2), \gcd(N,Z)>1$	$\eta\le1$
文献[11] 定理1	多元$\mathrm{ZCZ}(L,N,K)$序列集	$\mathrm{ZCZ}(L,N,K)$	$\eta\le1$
文献[14] 定理1	移位序列和完备高斯整数序列	$\mathrm{ZCZ}(2N,2M,Z)$	$\eta\le1$
文献[19] 定理1	2元伪随机序列	$\mathrm{ZCZ}(2N,2M,Z), N=2^n-1$	$\eta\le1$
本文 定理1	$\mathrm{ZCZ}(N,M,Z)$序列集和完备高斯整数序列	$\mathrm{ZCZ}(NK,M,ZK)$	$\eta\le1$
本文 构造法2	高斯整数正交矩阵	$\mathrm{ZCZ}(NK,N,K)$	$\eta=1$

5 结束语

本文提出了两种高斯整数ZCZ序列集的构造方法。方法1是以ZCZ序列集为基础进行构造的，并给出了所构造的高斯整数ZCZ序列集度的计算方法。本文所得到的序列长度是初始ZCZ序列长度的任意整数倍。方法2是以高斯整数正交矩阵为基础进行构造的，所得到的高斯整数ZCZ序列集的参数可以灵活选择，且均为最优。另外，本文给出了两类高斯整数正交矩阵的构造方法，得到的正交矩阵可以应用到高斯整数互补序列等序列的构造中，从而为具有其它相关特性的高斯整数序列设计提供初始序列，扩展现有高斯整数序列集设计的思路。

参 考 文 献

[1] HUBER K. Codes over Gaussian integers[J]. *IEEE*

Transactions on Information Theory, 1994, 40(1): 207–216. doi: 10.1109/18.272484.

[2] LEE C D and HONG Shaohua. Generation of long perfect Gaussian integer sequences[J]. *IEEE Signal Processing Letters*, 2017, 24(4): 515–519. doi: 10.1109/LSP.2017.2674972.

[3] 刘元慧, 许成谦, 赵冰. p-1级高斯整数序列的构造[J]. 北京邮电大学学报, 2017, 40(1): 53–56. doi: 10.13190/j.jbupt.2017.01.009.
LIU Yuanhui, XU Chengqian, and ZHAO Bing. Constructions of Gaussian integer sequences of degree-(p-1)[J]. *Journal of Beijing University of Posts and Telecommunications*, 2017, 40(1): 53–56. doi: 10.13190/j.jbupt.2017.01.009.

[4] CHANG K J and CHANG H H. Perfect Gaussian integer sequences of period p^k with degrees equal to or less than k+1[J]. *IEEE Transactions on Communications*, 2017, 65(9): 3723–3733. doi: 10.1109/TCOMM.2017.2714702.

[5] 李玉博, 陈邈. 几乎完备高斯整数序列构造法[J]. 电子与信息学报, 2018, 40(7): 1752–1758. doi: 10.11999/JEIT170844.
LI Yubo and CHEN Miao. Construction of nearly perfect Gaussian integer sequences[J]. *Journal of Electronics & Information Technology*, 2018, 40(7): 1752–1758. doi: 10.11999/JEIT170844.

[6] PEI S C and CHANG Kuowei. Perfect Gaussian integer sequences of arbitrary length[J]. *IEEE Signal Processing Letters*, 2015, 22(8): 1040–1044. doi: 10.1109/LSP.2014.2381642.

[7] CHANG H S, LI C P, LEE C D, *et al*. Perfect Gaussian integer sequences of arbitrary composite length[J]. *IEEE Transactions on Information Theory*, 2015, 61(7): 4107–4115. doi: 10.1109/TIT.2015.2438828.

[8] CHEN Haibin, ZHANG Rongqing, ZHAI Wenjun, *et al*. Interference-free pilot design and channel estimation using ZCZ sequences for MIMO-OFDM-Based C-V2X communications[J]. *China Communications*, 2018, 15(7): 47–54. doi: 10.1109/CC.2018.8424582.

[9] 刘涛, 许成谦, 李玉博. 基于差集构造零相关区高斯整数序列集[J]. 电子与信息学报, 2017, 39(9): 2277–2281. doi: 10.11999/JEIT161177.
LIU Tao, XU Chengqian, and LI Yubo. Construction of zero correlation zone Gaussian integer sequence sets based on difference sets[J]. *Journal of Electronics & Information Technology*, 2017, 39(9): 2277–2281. doi: 10.11999/JEIT161177.

[10] 李玉博, 孙嘉安, 荆楠. 零相关区高斯整数序列集构造法[J]. 通信学报, 2017, 38(9): 25–30. doi: 10.11959/j.issn.1000-436x.2017179.
LI Yubo, SUN Jiaan, and JING Nan. Construction of zero correlation zone Gaussian integer sequence set[J]. *Journal on Communications*, 2017, 38(9): 25–30. doi: 10.11959/j.issn.1000-436x.2017179.

[11] 刘凯, 陈盼盼. 最佳及几乎最佳高斯整数ZCZ序列集的构造[J]. 电子学报, 2018, 46(3): 755–760. doi: 10.3969/j.issn.0372-2112.2018.03.034.
LIU Kai and CHEN Panpan. Construction of optimal and almost optimal Gaussian integer sequence sets with zero correlation zone[J]. *Acta Electronica Sinica*, 2018, 46(3): 755–760. doi: 10.3969/j.issn.0372-2112.2018.03.034.

[12] LI Yubo, LIU Kai, and XU Chengqian. A construction of optimal 16-QAM+ sequence sets with zero correlation zone[J]. *IEICE Transactions on Fundamentals of Electronics, Communications and Computer Sciences*, 2016, E99-A(4): 819–825. doi: 10.1587/transfun.E99.A.819.

[13] CHEN Xiaoyu, KONG Deming, XU Chengqian, *et al*. Constructions of Gaussian integer sequences with zero correlation zone[J]. *IEICE Transactions on Fundamentals of Electronics, Communications and Computer Sciences*, 2016, E99-A(6): 1260–1263. doi: 10.1587/transfun.E99.A.1260.

[14] 刘凯, 姜昆. 交织法构造高斯整数零相关区序列集[J]. 电子与信息学报, 2017, 39(2): 328–334. doi: 10.11999/JEIT160276.
LIU Kai and JIANG Kun. Construction of Gaussian integer sequence sets with zero correlation zone based on interleaving technique[J]. *Journal of Electronics & Information Technology*, 2017, 39(2): 328–334. doi: 10.11999/JEIT160276.

[15] TANG X H, FAN P Z, and MATSUFUJI S. Lower bounds on correlation of spreading sequence set with low or zero correlation zone[J]. *Electronics Letters*, 2000, 36(6): 551–552. doi: 10.1049/el:20000462.

[16] LIU Y C, CHEN C W, and SU Y T. New constructions of zero-correlation zone sequences[J]. *IEEE Transactions on Information Theory*, 2013, 59(8): 4994–5007. doi: 10.1109/TIT.2013.2253831.

[17] CHUNG J H and YANG K. New design of quaternary low-correlation zone sequence sets and quaternary Hadamard matrices[J]. *IEEE Transactions on Information Theory*, 2008, 54(8): 3733–3737. doi: 10.1109/TIT.2008.926406.

[18] KONG Deming, CHEN Xiaoyu, and LI Yubo. Constructions of Gaussian integer periodic complementary sequences with ZCZ[J]. *IEICE Transactions on Fundamentals of Electronics, Communications and Computer Sciences*, 2017, E100-A(9): 2056–2060. doi: 10.1587/transfun.E100.A.2056.

[19] LI Yubo and XU Chengqian. A new construction of zero correlation zone Gaussian integer sequence sets[J]. *IEEE Communications Letters*, 2016, 20(12): 2418–2421. doi: 10.1109/LCOMM.2016.2609383.

陈晓玉：女，1983年生，副教授，研究方向为扩频序列设计.

李冠敏：女，1993年生，硕士生，研究方向为扩频序列设计.

孔德明：男，1983年生，副教授，研究方向为数字信号处理技术.

李玉博：男，1985年生，副教授，研究方向为无限通信中的序列设计.