

(k, l) -递归极大平面图的结构

陈祥恩* 李婷

(西北师范大学数学与统计学院 兰州 730070)

摘要: 对于一个平面图 G 实施扩3-轮运算是指在 G 的某个三角形面 xyz 内添加一个新顶点 v , 使 v 与 x, y, z 均相邻, 最后得到一个阶为 $|V(G)|+1$ 的平面图的过程。一个递归极大平面图是指从平面图 K_4 出发, 逐次实施扩3-轮运算而得到的极大平面图。所谓一个 (k, l) -递归极大平面图是指一个递归极大平面图, 它恰好有 k 个度为3的顶点, 并且任意两个3度顶点之间的距离均为 l 。该文对 (k, l) -递归极大平面图的存在性问题做了探讨, 刻画了 $(3, 2)$ -及 $(2, 3)$ -递归极大平面图的结构。

关键词: 平面图; 极大平面图; 扩3-轮; 递归极大平面图

中图分类号: O157.5

文献标识码: A

文章编号: 1009-5896(2018)09-2281-06

DOI: 10.11999/JEIT171021

The Structure of (k, l) -recursive Maximal Planar Graph

CHEN Xiang'en LI Ting

(College of Mathematics and Statistics, Northwest Normal University, Lanzhou 730070, China)

Abstract: For a maximal planar graph G , the operation of extending 3-wheel is a process from G to $G \vee v$, where v is a new vertex embedded in some triangular face xyz of G and $G \vee v$ is a graph of order $|V(G)|+1$ obtained from G by connecting v to each one of x, y, z with one edge. A recursive maximal planar graph is a maximal planar graph obtained from K_4 by extending 3-wheel continuously. A (k, l) -recursive maximal planar graph is a recursive maximal planar graph with exactly k vertices of degree 3 so that the distance between arbitrary two vertices of degree k is l . The existence of (k, l) -recursive maximal planar graph is discussed and the structures of $(3, 2)$ -as well as $(2, 3)$ -recursive maximal planar graphs are described.

Key words: Planar graph; Maximal planar graph; Extending 3-wheel; Recursive maximal planar graph

1 引言

1976年Appel与Haken等人^[1-3]宣布用计算机给出了四色猜想的“证明”, 但是给出四色猜想的数学证明仍是一个尚待解决的困难问题。四色猜想的研究对象可归结于极大平面图, 因此, 弄清楚极大平面图的结构与构造是极为重要的。许多学者对极大平面图的结构进行了研究。文献^[4, 5]给出了利用纯弦圈构造极大平面图方法。2005年, Brinkmann等人^[6]给出了构造最小度为5的极大平面图的一种有效方法。2001年, Gao等人^[7]及2011年, Bose等人^[8]对极大平面图的边翻转进行了探讨。我们知道, 唯一4-可着色平面图一定是极大平面图, 那么唯一3-可着色平面图的充分必要条件是什么,

至今尚未解决。文献^[9, 10]中对唯一3-可着色平面图的关键性及三角形的相邻性做了探讨。

许进教授等人在其系列文献^[11-17]中对极大平面图进行了深入的研究。许进教授在文献^[13]中对 $(2, 2)$ -递归极大平面图进行了刻画, 同时为了给证明JT猜想做准备, 得到了一个重要结果, 即“对 $(2, 2)$ -递归极大平面图 G 的长为2的路 xuy 实施扩4轮运算后所得到的图不是唯一4色的, 其中 x 与 y 是 G 的两个3度顶点”。本文推广了 $(2, 2)$ -递归极大平面图到 (k, l) -递归极大平面图, 对 (k, l) -递归极大平面图的存在性及结构问题作一探讨。

本文所说的图均为无向有限简单图, 平面图均指其平面嵌入。

对于一个平面图 G 实施扩3-轮运算是指在 G 的某个三角形面 xyz 内添加一个新顶点 v , 使 v 与 x, u, y 均相邻, 最后得到一个阶为 $|V(G)|+1$ 的平面图的过程。这个扩3-轮运算通常记为“ $v-xyz$ ”。一个递归极大平面图是指从平面图 K_4 出发, 逐次实施扩3-轮运算而得到的极大平面图。所谓一个 (k, l) -递归极

收稿日期: 2017-11-01; 改回日期: 2018-06-04; 网络出版: 2018-07-12

*通信作者: 陈祥恩 chenxe@nwnu.edu.cn

基金项目: 国家自然科学基金(11761064, 61163037, 61163054)

Foundation Items: The National Natural Science Foundation of China (11761064, 61163037, 61163054)

大平面图是指一个递归极大平面图，它恰好有 k 个度为3的顶点，并且任意两个3度顶点之间的距离均为 l 。本文对 (k,l) -递归极大平面图的存在性问题做了探讨，刻画了 $(3,2)$ -及 $(2,3)$ -递归极大平面图的结构。

首先，以如下方式依次构造一系列递归极大平面图 $G^{(i)}$, $i = 1, 2, 3, \dots$ 。其中 $G^{(1)}$, $G^{(2)}$, $G^{(3)}$ 如图1(a), 图1(b)及图1(c)所示。一般地，由 $G^{(i)}$ 构造

$G^{(i+1)}$ 的过程如下：

在 $G^{(i)}$ 的基础上，在面 $x_{i+1}y_i z_i$ 里添加一个新点 y_{i+1} ，使 y_{i+1} 与 x_{i+1}, y_i, z_i 均连边，然后在所得到图的面 $x_{i+1}y_{i+1}z_i$ 里添加一个新点 z_{i+1} ，使 z_{i+1} 与 x_{i+1}, y_{i+1}, z_i 均连边，最后在所得图的面 $x_{i+1}y_{i+1}z_{i+1}$ 里添加一个新点 x_{i+2} ，使 x_{i+2} 与 $x_{i+1}, y_{i+1}, z_{i+1}$ 均连边，最终得图 $G^{(i+1)}$ 。

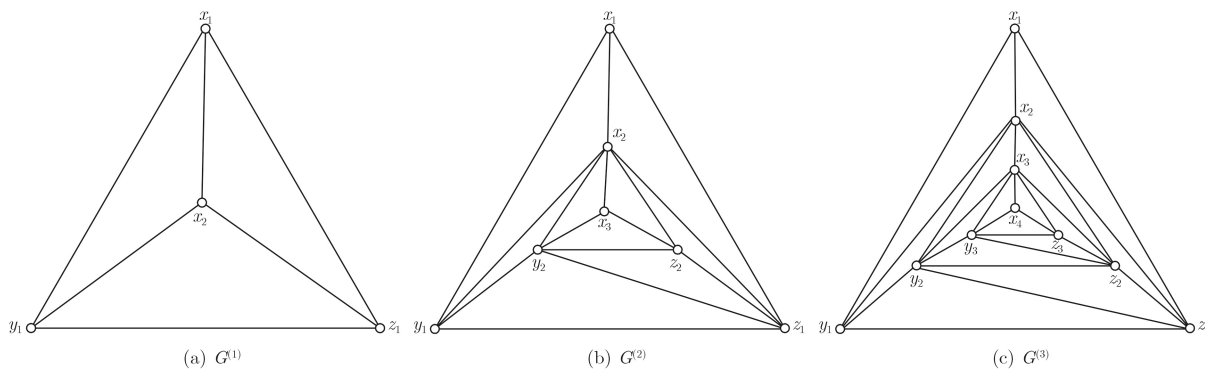


图1 阶分别为4,7,10的递归极大平面图

2 (k,l) -递归极大平面图的存在性探讨

下述两个命题是显然的。

命题1 当 $l \geq 2$ 时， $G^{(l)}$ 是 $(2,l)$ -递归极大平面图。

命题2 $G^{(l)}$ 的最中心的3度顶点 x_{l+1} 与 x_i, y_i, z_i 的距离均为 $l+1-i$, $i = 1, 2, \dots, l$ 。特别地， x_{l+1} 与外表面的3个顶点 x_1, y_1, z_1 的距离均为 l 。

命题3 在 $G^{(l)}$ 的外部面上添加一个新点 x ，使 x 与 x_1, y_1, z_1 均连边(如图2所示)，所得到的 $(2,l+1)$ -递归极大平面图的阶数最少，其阶数等于 $3l+2$ 。

证明 由于任一面均可作为外部面，固定 $(2,l+1)$ -递归极大平面图 G 的一个3度顶点为 x ，它的3个邻点为 x_1, y_1, z_1 ，在此基础上逐次扩3-轮可得 G 。

先扩3-轮 $x_2-x_1y_1z_1$ ，如图3(a)所示，这是阶数最少的 $(2,2)$ -递归极大平面图，其阶等于 $5=3 \times 1 + 2$ 。为了得到 $(2,3)$ -递归极大平面图，在最

后一次扩3-轮时，所在的面边界不能出现 x_1, y_1, z_1 ，因而还得做两次扩3-轮以便出现所需要的面 $x_2y_2z_2$ ，然后在面 $x_2y_2z_2$ 里扩3-轮，得 $(2,3)$ -递归极大平面图(如图3(b))，其阶数最少。将这个过程进行下去，命题得证。

定理1 存在 $(k,2)$ -递归极大平面图， $k \geq 2$ 。

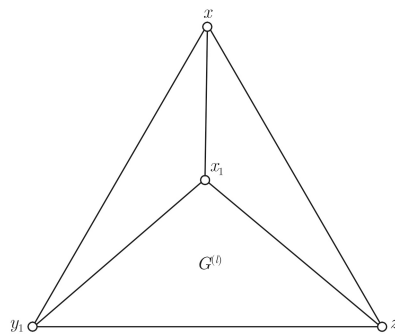


图2 命题3所述图的结构

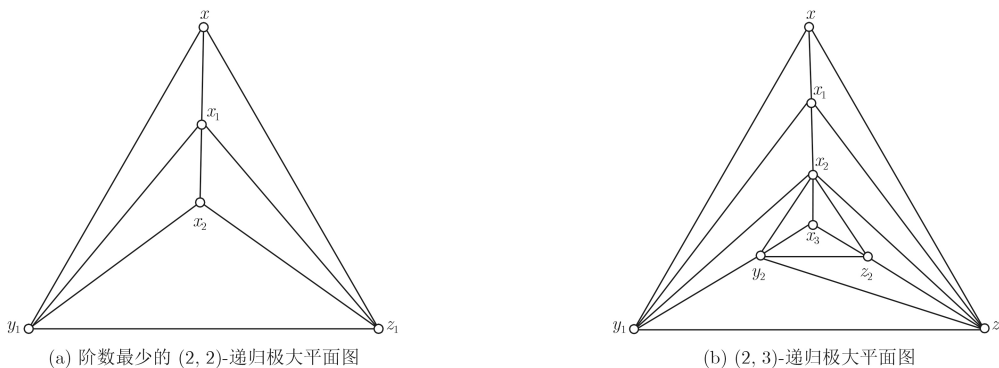


图3 命题3证明过程中出现的递归极大平面图

证明 图3(a)给出了一个 $(k, 2)$ -递归极大平面图, 称 x_1 为其中心点, 选与3度点 x 及 x_1 关联的2个三角形面进行2次扩3-轮, 得图4(a), 这是一个 $(3, 2)$ -递归极大平面图。在此基础上任选一个3度点 v , 再

对与 v 及 x_1 关联的2个三角形面均扩3-轮, 得图4(b), 这是一个 $(4, 2)$ -递归极大平面图, 这个过程进行下去, 任意的 $(k, 2)$ -递归极大平面图均可构造出来。证毕

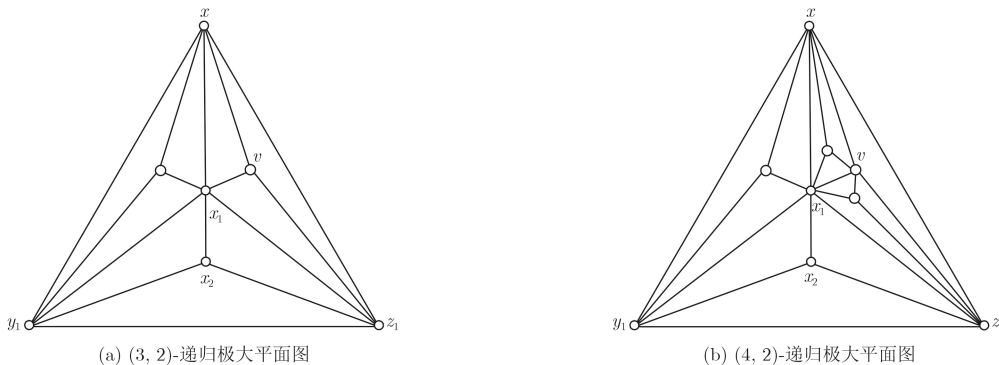


图4 定理4证明过程中出现的递归极大平面图

定理2 存在 (k, l) -递归极大平面图, 这里 $k \geq 2$, $l(\geq 2)$ 是偶数。

证明 由上述定理可知, 存在 $(k, 2)$ -递归极大平面图 H , H 中有 k 个3度顶点 v_1, v_2, \dots, v_k 。而 $v_i x_1 v_j$ 是 H 的长为2的路, $1 \leq i < j \leq k$, 这里 x_1 是 H 的一个中心点, 注意不会存在一个面使其边界上既含 $v_i x_1$ 又含 $v_j x_1$, $i \neq j$ 。对每个 v_i , 选定一个与 v_i 和 x_1 关联的面 $v_i x_1 u_i$, $i=1, 2, \dots, k$ 。

对每个面 $v_i x_1 u_i$ 代之以 $G^{(l/2)}$, 即面 $v_i x_1 u_i$ 及其内部被 $G^{(l/2)}$ 所填充。最后所得图仍含有 k 个3度点, 且任两个3度点之间的距离恰为 l 。证毕

定理3 对奇数 $l \geq 3$, 存在 $(3, l)$ -及 $(4, l)$ -递归极大平面图。

证明 令 $l=2s+1$, 在 $G^{(3)}$ 的基础上, 面 $x_1 x_2 z_1$ 被 $G^{(s)}$ 所填充, 当然 $G^{(s)}$ 的外部面的3条边要和 $x_1 x_2, x_2 z_1, z_1 x_1$ 分别重合。同样, 让 $x_3 x_4 z_3$ 被 $G^{(s)}$ 所填充, 而让 $x_2 x_3 z_2$ 被 $G^{(s+1)}$ 所填充, 最后所得到的图恰有3个3度顶点, 并且任意两个3度顶点之间的距离均为 l 。这样就得到一个 $(3, l)$ -递归极大平面图。在上述得到了的 $(3, l)$ -递归极大平面图的基础上, 设边界包含 $x_2 x_3$ 的并且包含在最后被填充进去的 $G^{(s+1)}$ 中的一个三角形面为 $x_2 x_3 w$, 这时 $G^{(s+1)}$ 中的3度顶点 v 与 w 的距离为 s 。再在面 $x_2 x_3 w$ 中填充进去 $G^{(s+1)}$, 其的3度顶点记为 v' , 所得到的图含有4个3度顶点, 任意两个3度顶点间的距离为 $2s+1=l$ 。特别地, $d(v, v')=2s+1$ 的原因是 v' 与 w 之间的距离为 $s+1$, 而 w 与 v 之间的距离为 s , 结论得证。

本文提出如下猜想。

猜想 不存在 (k, l) -递归极大平面图, 这里 $k \geq 5$, l 为奇数, $l \geq 3$ 。

3 (2,3)-递归极大平面图的结构

设 G 是 $(2, 3)$ -递归极大平面图, 且 G 的两个3度顶点分别为 x 和 y 。

若 x 与 y 之间有3条内部不交的长为3的路, 则称 G 为A型的;

若 x 与 y 之间仅有2条内部不交的长为3的路, 则称 G 为B型的;

若 x 与 y 之间只有1条内部不交的长为3的路, 则称 G 为C型的。

定理4 A型的 $(2, 3)$ -递归极大平面图 G 只有如图5所示的一个, 它是8阶的, 它也是阶数最少的 $(2, 3)$ -递归极大平面图。

证明 不妨设在以 $\{x, x_1, y_1, z_1\}$ 为顶点集合的完全图的基础上, 逐步在面 $x_1 y_1 z_1$ 的内部扩3-轮就可得到 G 。

在此过程中, 必然要第1次出现一步, 使在一个其边界上的点均不是 x_1, y_1, z_1 的三角形面 $x_2 y_2 z_2$ 中扩3-轮。 x_2, y_2, z_2 中恰有一个点, 不妨设为 x_2 , 与 x_1, y_1, z_1 的距离均为1, x_2, y_2, z_2 中恰有一个点与 x_2, y_1, z_1 或与 x_2, x_1, y_1 或与 x_2, x_1, z_1 的距离全为1, 不妨

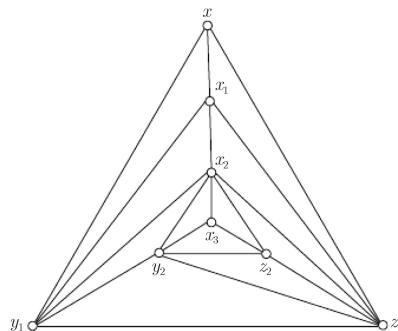


图5 A型的 $(2, 3)$ -递归极大平面图

设 y_2 与 x_2, y_1, z_1 的距离全为1。紧接着扩3-轮时必须考虑 $x_2y_1y_2$ 或 $x_2y_2z_2$ (二者等价), 否则, 如考虑面 y_1, y_2, z_1 , 那么最终所得(2,3)-递归极大平面图中另一3度点 y 没有经过 x_2 的长为3到 x 的路。

可设在 $x_2y_2z_2$ 中扩3-轮, 增加的顶点为 z_2 。下一步如果在 $x_2z_2z_1$ 或 $y_2z_2z_1$ 中扩3-轮的话, 比如在 $x_2z_2z_1$ 中扩3-轮, 增加顶点 w , 那么里面的3度顶点 y (属于最终所得图)与 x 之间的长恰为3的且经过 y_2 的路是不存在的。这样就保证不了两个3度顶点之间存在3条内部不交路, 因而在 $x_2y_2z_2$ 中扩3-轮新增顶点为 x_3 , 而 x_3 与 x 恰有3条内部不交的长为3的路。进一步扩3-轮是不可取的。

在构造B型极大平面图的过程中, 前6个点可以认为是固定的, 如图6所示。

(1) 第7个点 u_1 如在面 $y_1y_2z_1$ 内, 那么构造出来的图是先依次扩3-轮 u_1, u_2, \dots, u_r , 再在面 $u_{r-1}u_rz_1$ 里依次扩3-轮, 轮心依次为 v_1, v_2, \dots, v_s , 再在面 $v_s v_{s-1} u_{r-1}$ 里依次扩3-轮, 轮心依次为 w_1, w_2, \dots, w_t , 最后所得图(如图7所示)是 w_t 与 x 间恰有两条内部不交的长为3的路。

(2) 第7个点在面 $x_2y_2y_1$ 或 $x_2y_2z_1$ 内(二者等价), 不妨设第7个点 z_2 在面 $x_2y_2z_1$ 内。

这时如第8个点在 $x_2y_2z_2$ 内, 那么以后还要至少进行一次扩3-轮, 且每次扩3-轮时是基于3度点及 x_2 和 z_2 围成的面(当然可以以 y_2 和 z_2 代替这里的 x_2 和 z_2 , 或以 x_2 和 z_2 代替这里的 x_2 和 z_2)。这样就保证恰

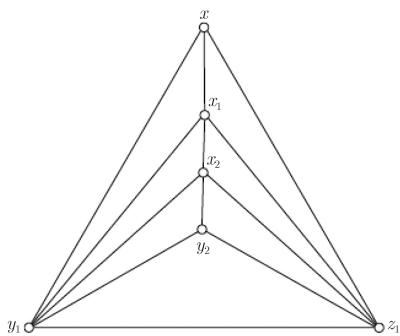


图6 6阶的B型(2,3)-递归极大平面图

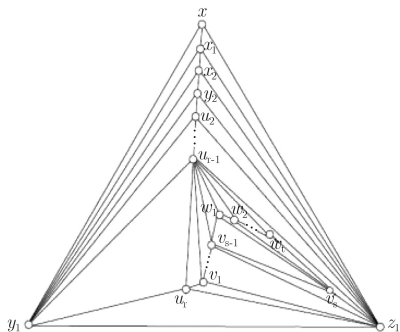


图7 定理7证明里(1)中的B型(2,3)-递归极大平面图

有两条内部不交的路 xx_1x_2y 和 xx_1z_2y 。

如果第8个点 w 在 $x_2z_2z_1$ 内, 第9个点在 x_2z_2w 内, 那么以后扩3-轮时点是基于3度点以及 x_2 和 w 所围成的面, 其结果如图8所示。

如果第8个点 w 在 $x_2z_2z_1$ 内, 第9个点在 z_2wz_1 内, 这时构造不出来(2,3)-递归极大平面图。

如果第8个点 w 在 $x_2z_2z_1$ 内, 第9个点在 x_2wz_1 内, 那么总有经过逐次扩3-轮(顶点 u_1, u_2, \dots, u_r)之后, 总有一步扩3-轮时基于一个边界不含 z_1 的面 $x_2u_{r-1}u_r$, 如图9所示。

至于C型的结构就相当松散了, 在图6的基础上, 在面 $x_2y_2z_1$ 内陆续添点扩3-轮, 但要保证扩3-轮时基于的面的边界上要包含 x_2 , 并且有一次添点时所添的点与 z_1 的距离超过2, 有一次所添的点与 y_2 的距离要超过1, 这是为了使两个3度点 x 与 y 间有唯一的长为3的路 xx_1x_2y 。图10给出的就是一个C型的例子。证毕

注意下述结论是显然的。

定理5 设 G 是(2,3)-递归极大平面图, v 是 G 的任意一个3度顶点, 则

- (a) $G-v$ 是(2,3)-递归极大平面图。
- (b) $G-v$ 是非相邻型的(2,2)-递归极大平面图。

4 (3,2)-递归极大平面图的结构

设 G 是(3,2)-递归极大平面图, x, y, z 是 G 的3个3度顶点, 如果 x, y, z 中任意两个点之间都有两条长

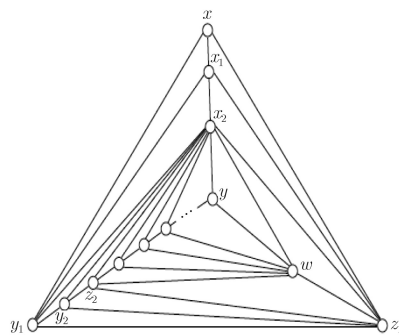


图8 定理7证明里(2)中出现的(2,3)-递归极大平面图

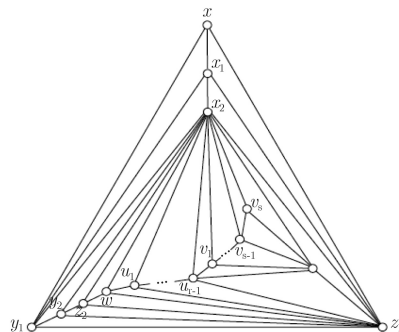


图9 定理7证明里(2)中出现的另一个(2,3)-递归极大平面图

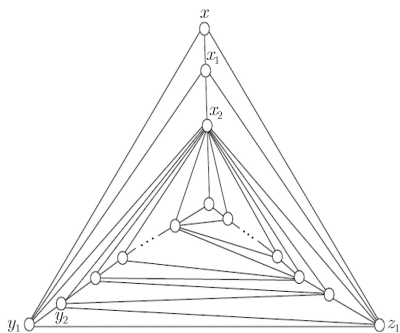


图 10 C型的(2,3)-递归极大平面图

为2的路,那么G称为A型的;

如果 x, y, z 中恰有两对顶点,不妨设为 $\{x, y\}, \{x, z\}$,使得 x 与 y 之间, x 与 z 之间都有两条长为2的路,那么G称为是B型的;

如果 x, y, z 中恰有一对顶点,不妨设为 $\{x, y\}$,使得 x 与 y 之间有两条长为2的路,那么G称为是C型的;

如果 x, y, z 中任意一对顶点之间只有一条长为2的路,那么G称为是D型的。

定理6 A型的(3,2)-递归极大平面图只有一个,即图11(a)所示的7阶图。

证明 先固定前5个点,且使 x 永远成为3度点,如图11(b)所示。注意到3个面 uv_1v_2, v_1v_2w, uv_2w 的彼此等价性,为了得到(3,2)-递归极大平面图,在面 uv_1v_2 内添点逐步扩3-轮,保证里面最终只

有1个3度点,同时在面 v_1v_2w 内添点逐步扩3-轮,使里面最终只有1个3度点,分别只做1次扩3-轮后所得的7阶图,如图11(b)所示。

假如在 uv_1v_1 里或 uv_1v_2 里扩3-轮的话,最终得到的图在 uv_1v_1 里的3度顶点与 v_1v_2w 里的3度顶点最多有1条长为2的路。

假如继续在 uv_1v_2 里3-轮的话,最终所得图在 $u_1v_1v_2$ 里的3度顶点与 x 间的长为2的路最多只有1条。

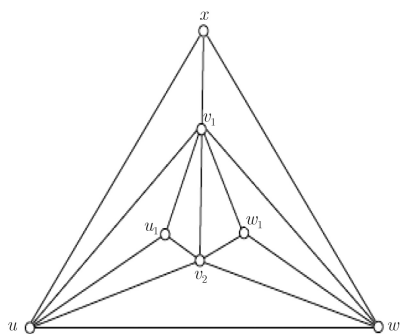
至此定理6得证。

为了得到如图12的B型的(3,2)-递归极大平面图,确保 x 与另外两个3度顶点的长为2的路均有两条,在图11(a)的基础上,确保 x 与 uv_1v_2 内部的3度顶点间的长为2的路有两条,那么在 uv_1v_1 里扩3-轮如同上段B型的方法,而在 v_1v_2w 里扩3-轮时,最后一次扩3-轮所基于的面的边上仅含 v_1 与 w 中的1个即可。图13所示的(3,2)-递归极大平面图就是C型的。

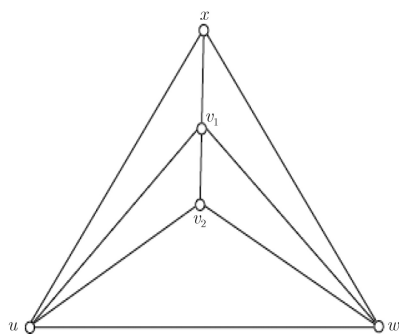
对于D型的(3,2)-递归极大平面图,只需在图11(a)的基础上逐次扩3-轮,使得最终所得图的面 uv_1v_2 内的3度顶点 y, w 在 v_1v_2 内的3度顶点 z ,满足 $|N(x) \cap N(y)| = 1, |N(x) \cap N(z)| = 1, |N(y) \cap N(z)| = 1$ 即可,图14所示的(3,2)-递归极大平面图就是D型的。

注意下述结论是显然的。

定理7 若设G是(3,2)-递归极大平面图, v 是



(a) A型的(3,2)-递归极大平面图



(b) A型的(3,2)-递归极大平面图的前5个顶点导出的子图

图 11 A型递归极大平面图

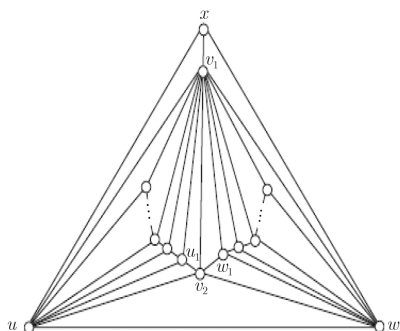


图 12 B型的(3,2)-递归极大平面图

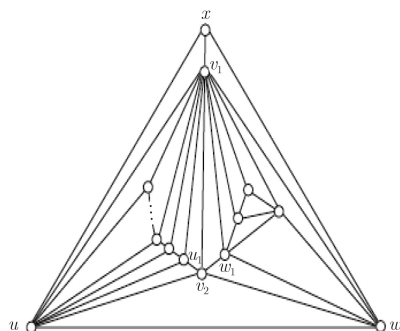


图 13 C型的(3,2)-递归极大平面图

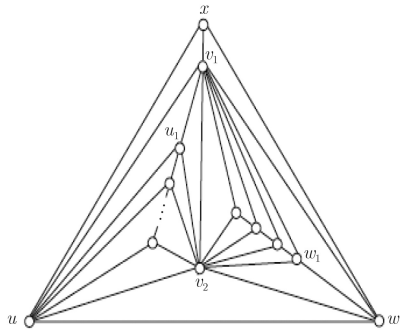


图 14 D型的(3,2)-递归极大平面图

G 的任意一个3度顶点, 则 $G-v$ 是(3,2)-递归极大平面图或 $G-v$ 是(2,2)-递归极大平面图。

5 结束语

本文将文献[13]中讨论的(2,2)-递归极大平面图进行了推广, 提出了 (k,l) -递归极大平面图, 研究了(2,3)-递归极大平面图以及(3,2)-递归极大平面图的结构。我们将会继续对 (k,l) -递归极大平面图的结构及着色问题做进一步探索。

参考文献

- [1] APPEL K and HAKEN W. The solution of the four-color map problem[J]. *Science American*, 1977, 237(4): 108–121. doi: [10.1038/scientificamerican1077-108](https://doi.org/10.1038/scientificamerican1077-108).
- [2] APPEL K and HAKEN W. Every planar map is four colorable, I: Discharging[J]. *Illinois Journal of Mathematics*, 1977, 21(3): 429–490.
- [3] APPEL K, HAKEN W, and KOCH J. Every planar map is four-colorable, II: Reducibility[J]. *Illinois Journal of Mathematics*, 1977, 21(3): 491–567.
- [4] 王邵文. 构造极大平面图的圈加边法[J]. 北京机械工业学院学报, 2000, 15(1): 26–29.
WANG Shaowen. Method of cycle add-point to construct a maximum plate graph[J]. *Journal of Beijing Institute of Machinery*, 2000, 15(1): 26–29.
- [5] 王邵文. 构造极大平面图的三种方法[J]. 北京机械工业学院学报, 1999, 14(1): 16–22.
WANG Shaowen. Three methods to construct maximum plain graph[J]. *Journal of Beijing Institute of Machinery*, 1999, 14(1): 16–22.
- [6] BRINKMANN G and MCKAY B D. Construction of planar triangulations with minimum degree 5[J]. *Discrete Mathematics*, 2005, 301(2-3): 147–163. doi: [10.1016/j.disc.2005.06.019](https://doi.org/10.1016/j.disc.2005.06.019).
- [7] GAO Z C, URRUTIA J, and WANG J Y. Diagonal flips in labeled planar triangulations[J]. *Graphs and Combinatorics*, 2004, 17(4): 647–656. doi: [10.1007/s003730170006](https://doi.org/10.1007/s003730170006).
- [8] BOSE P, JANSSENS D, VAN RENNSSEN A, et al. Making triangulations 4-connected using flips[C]. Proceedings of the 23rd Canadian Conference on Computational Geometry, Toronto, 2014: 187–197. doi: [10.1016/j.comgeo.2012.10.012](https://doi.org/10.1016/j.comgeo.2012.10.012).
- [9] LI Zepeng, ZHU Enqiang, SHAO Zehui, et al. Size of edge-critical uniquely 3-colorable planar graphs[J]. *Discrete Mathematics*, 2016, 339(4): 1242–1250. doi: [10.1016/j.disc.2015.11.009](https://doi.org/10.1016/j.disc.2015.11.009).
- [10] LI Zepeng, ZHU Enqiang, SHAO Zehui, et al. A note on uniquely 3-colorable planar graphs[J]. *International Journal of Computer Mathematics*, 2017, 94(5): 1028–1035. doi: [10.1080/00207160.2016.1167196](https://doi.org/10.1080/00207160.2016.1167196).
- [11] 许进. 极大平面图的结构与着色理论: (1)色多项式递推公式与四色猜想[J]. 电子与信息学报, 2016, 38(4): 763–779. doi: [10.11999/JEIT160072](https://doi.org/10.11999/JEIT160072).
XU Jin. Theory on the structure and coloring of maximal planar graphs: (1) Recursion formula of chromatic polynomial and four-color conjecture[J]. *Journal of Electronics & Information Technology*, 2016, 38(4): 763–779. doi: [10.11999/JEIT160072](https://doi.org/10.11999/JEIT160072).
- [12] 许进. 极大平面图的结构与着色理论: (2)多米诺构形与扩缩运算[J]. 电子与信息学报, 2016, 38(6): 1271–1327. doi: [10.11999/JEIT160224](https://doi.org/10.11999/JEIT160224).
XU Jin. Theory on the structure and coloring of maximal planar graphs: (2) Domino configurations and extending-contracting operations[J]. *Journal of Electronics & Information Technology*, 2016, 38(6): 1271–1327. doi: [10.11999/JEIT160224](https://doi.org/10.11999/JEIT160224).
- [13] 许进. 极大平面图的结构与着色理论: (3) 纯树着色与唯一4色极大平面图猜想[J]. 电子与信息学报, 2016, 38(6): 1328–1363. doi: [10.11999/JEIT160409](https://doi.org/10.11999/JEIT160409).
XU Jin. Theory on the structure and coloring of maximal planar graphs: (3) Purely tree-colorable and uniquely 4-colorable maximal planar graph conjecture[J]. *Journal of Electronics & Information Technology*, 2016, 38(6): 1328–1363. doi: [10.11999/JEIT160409](https://doi.org/10.11999/JEIT160409).
- [14] 许进. 极大平面图的结构与着色理论: (4) σ -运算与Kempe等价类[J]. 电子与信息学报, 2016, 38(7): 1557–1585. doi: [10.11999/JEIT160483](https://doi.org/10.11999/JEIT160483).
XU Jin. Theory on the structure and coloring of maximal planar graphs: (4) σ -operations and Kempe equivalent classes[J]. *Journal of Electronics & Information Technology*, 2016, 38(7): 1557–1585. doi: [10.11999/JEIT160483](https://doi.org/10.11999/JEIT160483).
- [15] XU Jin, LI Zepeng, and ZHU Enqiang. On purely tree-colorable planar graphs[J]. *Information Processing Letter*, 2016, 116(8): 532–536. doi: [10.1016/j.ipl.2016.03.011](https://doi.org/10.1016/j.ipl.2016.03.011).
- [16] 许进, 李泽鹏, 朱恩强. 极大平面图理论研究进展[J]. 计算机学报, 2015, 38(8): 1680–1704. doi: [10.11897/SP.J.1016.2015.01680](https://doi.org/10.11897/SP.J.1016.2015.01680).
XU Jin, LI Zepeng, and ZHU Enqiang. Research progress on maximal planar graphs[J]. *Chinese Journal of Computers*, 2015, 38(8): 1680–1704. doi: [10.11897/SP.J.1016.2015.01680](https://doi.org/10.11897/SP.J.1016.2015.01680).
- [17] ZHU Enqiang, LI Zepeng, SHAO Zehui, et al. Acyclically 4-colorable triangulations[J]. *Information Processing Letter*, 2016, 116(6): 401–408. doi: [10.1016/j.ipl.2015.12.005](https://doi.org/10.1016/j.ipl.2015.12.005).

陈祥恩: 男, 1965年生, 教授, 主要研究方向为图论及其应用。

李 婷: 女, 1993年生, 硕士生, 研究方向为图论及其应用。