第11卷 第1期　　电子科学学刊　　Vol. 11, No. 1
1989 年 1 月　　JOURNAL OF ELECTRONICS　　Jan., 1989

分析线天线及阵的多点加权配置技术*

洪　伟　　章文勋
（东南大学，南京）

摘要　本文提出的多点加权配置技术具有配置法简单计算量小的特点，又能获得与 Galerkin 法等矩量类方法相当的收敛速度．在超收敛点集(即 Gauss 点集)上加权配置，对细振子及振子阵阻抗的分析结果与有关文献中的结果一致．

关键词　线天线；配置法；多点配置

一、引　言

矩量法具有便于程序化，初始数据准备工作量少等优点，现已成为电磁场边值问题特别是线天线分析的一种有效手段．和有限元法、有限差分法等相比，在获得同等精度条件下矩量法中的代数方程组阶数较低，占用计算机空间少，但矩量法中代数方程组的系数矩阵为满元矩阵，而有限元法或有限差分法中则为带形矩阵且矩阵元素的计算很简单．矩量法中代数方程组系数矩阵的元素一般为对场域和对源域的双重积分且需利用数值积分获得，其计算量占矩量法总计算量的百分之九十以上．因此，减少矩阵元素的计算时间和加快收敛速度就成为减少矩量法计算时间和占用空间的两个主要途径．配置法采用取样函数为检验函数而使矩阵元素退化为仅对源域的积分，使计算量大幅度减小，但同时也使方法的总体收敛速度减慢．本文提出的多点加权配置技术既吸取了配置法单重积分计算量小的优点又可获得与 Galerkin 法等相当的收敛速度．

二、多点加权配置技术

设算子方程

$$\mathbf{L}u = f \tag{1}$$

其中 $\mathbf{L}$ 为线性正算子，$u \in D \subset H$ 为待求函数，D 为算子 $\mathbf{L}$ 的定义域，H 为 Hilbert 空间，$f \in R \subset H$ 为已知函数，R 为 $\mathbf{L}$ 的值域．又设 $U = \mathrm{span}\{\phi_1, \phi_2, \cdots, \phi_N\}$ 为由线性无关基函数集 $\{\phi_1, \phi_2, \cdots, \phi_N\}$ 所生成的基函数空间，$V = \mathrm{span}\{\psi_1, \psi_2, \cdots, \psi_N\}$ 为由线性无关检验函数集 $\{\psi_1, \psi_2, \cdots, \psi_N\}$生成的检验函数空间，对于 Galerkin 法 $U = V$．U, V 都为 H 的闭子空间．

用 $u_N \in U$ 近似 u，则有

---

* 1987 年 6 月 20 日收到，1988 年 1 月 26 日修改定稿．

$$u = u_N + \varepsilon = \sum_{n=1}^{N} a_n \phi_n + \varepsilon \tag{2}$$

其中 a_n 为待定系数，ε 为余量．将(2)式代入方程(1)并利用算子 $\mathbf{L}$ 的线性特性得

$$\sum_{n=1}^{N} a_n \mathbf{L}\phi_n - f = -\mathbf{L}\varepsilon \tag{3}$$

如果$-\mathbf{L}\varepsilon$ 与 Hilbert 空间H正交，则因$-\mathbf{L}\varepsilon \in H$，必有$-\mathbf{L}\varepsilon = 0$；但因计算机容量限制，我们只能令 $-\mathbf{L}\varepsilon$ 与H的某一有限维闭子空间正交以使误差函数 $-\mathbf{L}\varepsilon$ 在这种意义上最小，比如取检验函数空间 V 为这样的闭子空间，则有

$$\langle \phi_m, -\mathbf{L}\varepsilon \rangle = 0 \tag{4}$$

式中，$\langle \bullet, \bullet \rangle$表示内积．将(3)式代入上式得

$$\left\langle \phi_m, \sum_{n=1}^{N} a_n \mathbf{L}\phi_n - f \right\rangle = 0 \tag{5}$$

或

$$\sum_{n=1}^{N} a_n \langle \phi_m, \mathbf{L}\phi_n \rangle = \langle \phi_m, f \rangle, \quad m = 1, 2, \cdots, N \tag{6}$$

简记为矩阵形式有

$$\mathbf{Ka} = \mathbf{b} \tag{7}$$

其中矩阵元素

$$K_{mn} = \langle \phi_m, \mathbf{L}\phi_n \rangle = \int_{\Omega_m} \phi_m \overline{\mathbf{L}\phi_n} d\Omega \tag{8}$$

$$b_m = \langle \phi_m, f \rangle = \int_{\Omega_m} \phi \bar{f}_m d\Omega \tag{9}$$

式中 Ω_m 为 ϕ_m 的定义子域，“—”表示复共轭．对于线天线问题，$\mathbf{L}$ 为积分算子，因此，在 $\mathbf{K}_{mn}$ 中包含着对场域 Ω_m 和源域 Ω_n 的双重积分．若令 ϕ_m 为取样函数

$$\phi_m(\mathbf{r}) = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_m) \tag{10}$$

式中 $\mathbf{r}$ 表示场点位置矢量，这时(8)，(9)两式退化为

$$K_{mn} = \overline{\mathbf{L}\phi_n}(\mathbf{r}_m) \tag{11}$$

$$b_m = \bar{f}(\mathbf{r}_m) \tag{12}$$

这就是通常的配置法．显然配置法较其它矩量类方法计算量小得多，但其收敛速度慢，与 Galerkin 法的收敛速度有量级之差[1-4]．为加快收敛速度而又保持与配置法相当的计算量，在 ϕ_m 所定义的子区域 Ω_m 内进行多点加权配置，即令

$$\phi_m(\mathbf{r}) = \sum_{p=1}^{M_p} W_p \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_{mp}) \tag{13}$$

式中 W_p 为加权系数，$\mathbf{r}_{mp}$ 为子域 Ω_m 中的第 p 个配置点位置矢量．将上式代入(8)，(9)两式得

$$K_{mn} = \sum_{p=1}^{M_p} W_p \overline{\mathbf{L}\phi_n}(\mathbf{r}_{mp}) \tag{14}$$

$$b_m = \sum_{p=1}^{M_p} W_p \bar{f}(\mathbf{r}_{mp}) \tag{15}$$

与(11),(12)式比较可知 M_p 点加权配置方法的计算量为普通单点配置法的 M_p 倍，然而适当选择配置点集 $\{r_{mp}\}$ 和权系数集 $\{W_p\}$ 可获得与 Galerkin 法等相当的收敛速度，从而获得事半功倍之效果.

三、配置点集和权系数集的选取

配置点集 $\{r_{mp}\}$ 和权系数集 $\{W_p\}$ 的选取具有一定的任意性，但在 M_p 一定的条件下，适当选择 $\{r_{mp}\}$ 和 $\{W_p\}$可使收敛速度加快，也即存在最佳点集 $\{r_{mp}\}$ 和系数集$\{W_p\}$ 使 M_p 点加权配置法达到最佳收敛速度. 下面从数值积分角度给出 $\{r_{mp}\}$ 和 $\{W_p\}$ 的若干种选取方法.

对于积分

$$\int_a^{a+h} f(x)dx \tag{16}$$

其中 $f(x)$ 具有 M_{p+1} 阶导数. 将 $f(x)$ 在 $x=a$ 点展开成泰勒级数有

$$f(x) = \sum_{n=0}^{M_p} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \frac{f^{(M_p+1)}(a+\theta h)}{(M_p+1)!}(x-a)^{M_p+1} \tag{17}$$

式中 $0 \leqslant \theta \leqslant 1$. 两边应用 M_p 点插值型求积公式，由于对上式右边第一项 M_p 次多项式准确成立，因此有积分余项

$$\mathscr{R} = \frac{f^{(M_p+1)}(a+\theta h)}{(M_p+2)!} h^{M_p+2} = \mu \cdot h^{M_p+2} \tag{18}$$

其中

$$f^{(M_p+1)}(a+\theta h)/(M_p+2)! = \mu \tag{19}$$

对于 Galerkin 法，$\phi_m = \phi_n$ 并设之为 k 次分段多项式. 在(8)，(9)两式中对关于场域 Ω_m 的积分应用 M_p 点插值型求积公式有

$$K_{mn} = \sum_{p=1}^{M_p} A_p \phi_m(\mathbf{r}_p) \overline{\mathbf{L}\phi}(\mathbf{r}_n) + \mu_K h^{M_p+2} \tag{20}$$

$$b_m = \sum_{p=1}^{M_p} A_p \phi_m(\mathbf{r}_p) \bar{f}(\mathbf{r}_n) + \mu_b h^{M_p+2} \tag{21}$$

与(14),(15)两式对照显然得:

$$\mathbf{r}_{mp} = \mathbf{r}_p \tag{22}$$

$$W_p = A_p \phi_m(\mathbf{r}_p) \tag{23}$$

这里 A_p 为求积系数. 由积分误差 $\mu_K h^{M_p+2}$ 和 $\mu_b h^{M_p+2}$ 引起的解的偏差为[5]

$$\frac{\|\delta\mathbf{a}\|}{\|\mathbf{a}\|} \leqslant \mathrm{Cond}(\mathbf{K}) \left\{ \frac{\|\delta\mathbf{K}\|}{\|K\|} + \frac{\|\delta\mathbf{b}\|}{\|b\|} \right\} \tag{24}$$

其中 $\mathrm{Cond}(\mathbf{K}) = \|K\| \cdot \|K^{-1}\|$，$\delta K_{mn} = \mu_K h^{M_p+2}$ $\delta b_m = \mu_b h^{M_p+2}$. 矩阵范数取为无穷大，范数定义如下

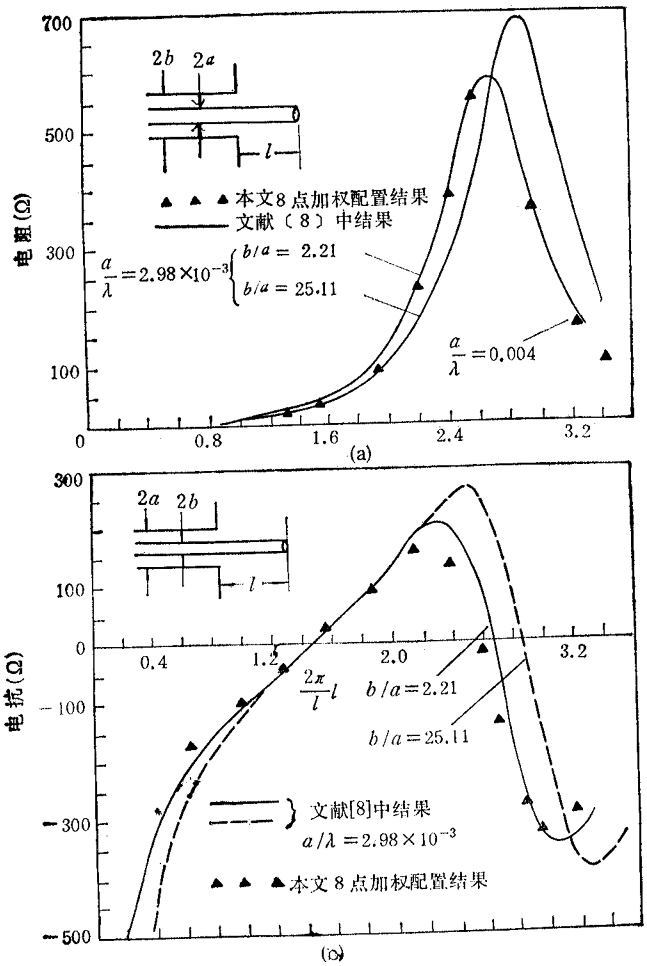

图1　单极子天线输入阻抗曲线

$$\|K\|_\infty = \max_{1\leqslant i\leqslant N}\sum_{i=1}^{N}|K_{ij}|$$

从而有

$$N\min_{1\leqslant i,j\leqslant N}|K_{ij}| \leqslant \|K\|_\infty \leqslant N\max_{1\leqslant i,j\leqslant N}|K_{ij}| \tag{25}$$

代入(24)式得

$$\frac{\|\delta\mathbf{a}\|_\infty}{\|\mathbf{a}\|_\infty} \leqslant N^2\max_{1\leqslant i,j\leqslant N}\left\{|K_{ij}|\cdot|K_{ij}^{-1}|\left(\frac{\mu_K}{|K_{ij}|}+\frac{\mu_b}{b_i}\right)\right\}h^{M_p+2} \tag{26}$$

对于长为 l 的线天线，等分情况下 $N=l/h$，从而有

$$\frac{\|\delta\mathbf{a}\|_\infty}{\|\mathbf{a}\|_\infty} \leqslant Ph^{M_p} \tag{27}$$

其中

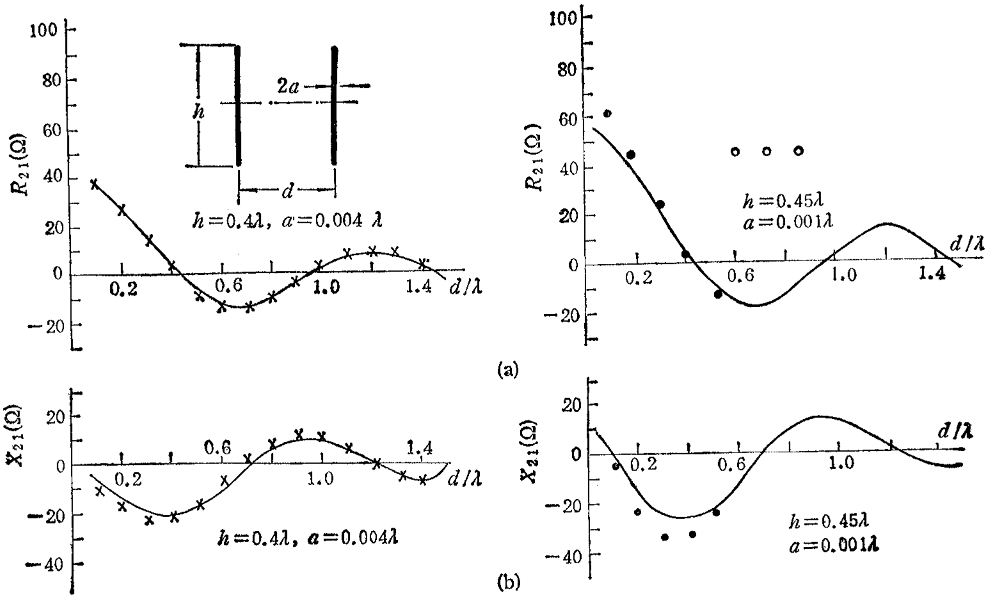

图 2 平行双振子互阻抗随间距 d 的变化曲线

——文献[9]中曲线 ×××本文 5 点加权配置结果 ●●● Galerkin 法

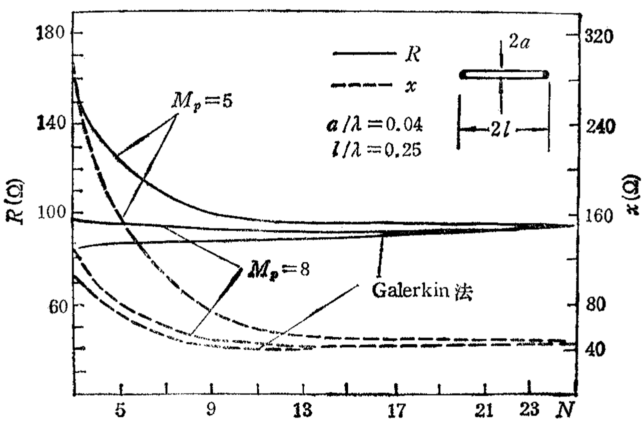

图 3 用 5 点,8点加权配置法和 Galerkin 法分析半波振子输入阻抗时关于分段数N的收敛性比较.

$$P = l^2 \max_{1\leqslant i, j\leqslant N} \left\{ |K_{ij}|\,|K_{ij}^{-1}| \left(\frac{\mu_K}{|K_{ij}|} + \frac{\mu_b}{|b_i|} \right) \right\} \tag{28}$$

一般地分段m次多项式基 Galerkin 法的收敛阶数为 $O(h^{m+1})$[1],即

$$\|u - u_N\| = \mu_u h^{m+1} \tag{29}$$

存在积分误差时所得实为 $\tilde{u}_N = u_N + \delta u_N$, 因此有

$$\begin{aligned} \|u - \tilde{u}_N\| &= \|u - u_N + u_N - \tilde{u}_N\| \\ &\leqslant \|u - u_N\| + \|\delta u_N\| \\ &= \mu_u h^{m+1} + \|\boldsymbol{\phi}\| \cdot \|\delta \mathbf{a}\| \end{aligned}$$

$$= \mu_u h^{m+1} + \|\boldsymbol{\phi}\| \cdot p \cdot \|\mathbf{a}\|_\infty \cdot h^{M_p} \tag{30}$$

其中 $\boldsymbol{\phi} = (\phi_1, \phi_2, \cdots, \phi_N)$. 显然当 $M_p \gg m+1$ 时有

$$\|u - \tilde{u}_N\| \approx \|u - u_N\| = \mu_u h^{m+1} \tag{31}$$

即当 $M_p \gg m+1$ 时，按(22)，(23)式取配置点集和权系数集的多点加权配置法具有与 Galerkin 法相当的收敛速度. 一般可取

$$M_p \geqslant m + 1 + v, \ v = 4—7 \tag{32}$$

Gauss 点集已被证明为最佳收敛点集或超收敛点集[1-3]，从数值积分角度讲，若(22)、(23)式中 $\mathbf{r}_p$ 为 Gauss 点，A_p 为 Gauss 求积系数，则(20)，(21)式中的积分余项应修改为 $O(h^{2M_p+1})$，从而 M_p 的选取准则(32)式应修改为

$$M_p \geqslant \left[\frac{m+2}{2}\right] + v, \ v = 2—5 \tag{33}$$

四、数 值 例 子

用多点加权配置技术对单极子天线的输入阻抗和平行双振子互阻抗的计算结果示于图 1 和图 2，与有关文献中的实验或理论结果一致. 图 3 示出了一次多项式基且在超收敛点集上 5 点和 8 点加权配置的收敛性曲线和 Galerkin 法的收敛性曲线，可以看出二者收敛速度相当，但 5 点和 8 点加权配置方法的计算量在同等精度下与普通单点配置法相当，且保持了单点配置法的简单性. 计算所采用的积分方程同文献[6]，且采用了奇性转移技术[7].

参　考　文　献

[1] 洪伟，矩量法理论及应用，南京工学院四系，硕士论文，1984.

[2] Zhang Wenxun, Hong Wei, On the Integral Equations for Wire Antennas, 1986Proc. of JINA, France.

[3] Zhang Wenxun, Yuan Jinyun, Hong Wei, Some Improvements on the Moment Methods, 1985 Proc. of ISAE, Beijing, China.

[4] 章文勋，袁锦云，洪伟，矩量法研究的几个问题，1984 年中国电子学会 GTO/MM 学术讨论会论文，大连.

[5] 洪伟，章文勋，南京工学院学报，1985 年，第 3 期，第 23—30 页.

[6] 洪伟，章文勋，南京工学院学报，1984 年，第 4 期，第 61—67 页.

[7] Zhang Wenxun, The Input Immittances of Coupled Antennas of Arbitrary-shaped Wires, 1985 Proc. of ISAE, Beijing, China.

[8] 谢处方，邱文杰，天线原理与设计，西北电讯工程学院出版社，1985，第 88—89 页.

[9] Kai Fong Lee, Principles of Antenna Theory, New York, 1984, John Wiley & Sons, pp. 94—95.

ANALYSIS OF DIPOLE AND DIPOLE ARRAY BY A COLLOCATION TECHNIQUE WITH MULTIPOINT WEIGHTING

Hong Wei Zhang Wenxun

(*Southeast University, Nanjing*)

Abstract A collocation technique with multipoint weighting is presented. It converges as rapidly as Galerkin method but needs less computation effort. By means of the technique with Gauss points (superconvergent points) as the collocating points, dipole and dipole array are analyzed, and the numerical results obtained are in good agreement with that given in relative