

基于自动秩估计的黎曼优化矩阵补全算法及其在图像补全中的应用

刘 静* 刘 涵 黄开宇 苏立玉

(西安交通大学电子与信息工程学院 西安 710049)

(西安交通大学智能网络与网络安全教育部重点实验室 西安 710049)

摘 要: 矩阵补全(MC)作为压缩感知(CS)的推广, 已广泛应用于不同领域。近年来, 基于黎曼优化的MC算法因重构精度高、计算速度快的特点, 引起了广泛关注。针对基于黎曼优化的MC算法需假设原矩阵秩固定已知, 且随机选择迭代起点的特点, 该文提出一种基于自动秩估计的黎曼优化MC算法。该算法通过优化包含秩正则项的目标函数, 迭代获取秩估计值和预重构矩阵。在估计所得秩对应的矩阵空间上以预重构矩阵为迭代起点, 利用基于黎曼流形的共轭梯度法进行矩阵补全, 从而提高重构精度。实验结果表明, 与几种经典的图像补全方法相比, 该文算法图像重构精度显著提高。

关键词: 图像补全(IC); 矩阵补全(MC); 自动秩估计; 黎曼优化; 卷积神经网络

中图分类号: TP391.41

文献标识码: A

文章编号: 1009-5896(2019)11-2787-08

DOI: 10.11999/JEIT181076

Automatic Rank Estimation Based Riemannian Optimization Matrix Completion Algorithm and Application to Image Completion

LIU Jing LIU Han HUANG Kaiyu SU Liyu

(School of Electronics and Information Engineering, Xi'an Jiaotong University, Xi'an 710049, China)

(Ministry of Education Key Laboratory for Intelligent Networks and Network Security,
Xi'an Jiaotong University, Xi'an 710049, China)

Abstract: As an extension of Compressed Sensing(CS), Matrix Completion(MC) is widely applied to different fields. Recently, the Riemannian optimization based MC algorithm attracts a lot of attention from researchers due to its high accuracy in reconstruction and computational efficiency. Considering that the Riemannian optimization based MC algorithm assumes a fixed rank of the original matrix, and selects a random initial point for iteration, a novel algorithm is proposed, namely automatic rank estimation based Riemannian optimization matrix completion algorithm. In the proposed algorithm, the estimate of rank is obtained minimizing the objective function that involving the rank regulation, in addition, the iterative starting point is optimized based on Riemannian manifold. The Riemannian manifold based conjugate gradient method is then used to complete the matrix, thereby improving the reconstruction precision. The experimental results demonstrate that the image completion performance is significantly improved using the proposed algorithm, compared with several classical image completion methods.

Key words: Image Completion(IC); Matrix Completion(MC); Automatic rank estimation; Riemannian optimization; Convolutional Neural Network (CNN)

1 引言

近年来, 图像补全(Image Completion, IC)逐渐成为计算机视觉和图像处理领域的一个研究热

点。在许多实际应用中经常面临诸如图像数据缺失、损坏和噪声污染等问题, 图像补全的目的是根据结构和纹理信息估计其缺失部分, 尽可能恢复原始图像。由于图像补全具有易于实现、可信度高等优点, 在获取气象数据^[1], 古文物保护^[2], 目标识别和检测^[3]等多种领域被广泛应用。因此, 如何更准确、更快速地估计图像缺失数据即图像补全要解决的问题。

随着稀疏表示(Sparse Representation, SR)理

收稿日期: 2018-11-23; 改回日期: 2019-05-07; 网络出版: 2019-05-20

*通信作者: 刘静 elelj20080730@gmail.com

基金项目: 国家自然科学基金(61573276)

Foundation Item: The National Natural Science Foundation of China (61573276)

论的发展,基于低秩表示(Low-Rank Representation, LRR)的图像补全方法受到越来越多的关注。低秩表示是稀疏表示在矩阵上的拓展,矩阵的秩是其稀疏性的合理度量^[4]。基于图像与矩阵的对应关系,通过得到矩阵的低秩表示而获得数据的全局性特征达到图像补全的目的。基于上述思想,文献[5]提出了奇异值阈值(Singular Value Thresholding, SVT)算法,SVT算法针对小规模矩阵比较高效,但存在阈值选取固定的缺点且奇异值分解复杂度较高,基于SVT算法补全后的图像高频部分分辨率不高。文献[6]提出的不精确的增广拉格朗日乘数(Inexact Augmented Lagrange Multipliers, IALM)算法对采样率较高的矩阵补全误差较小,但对采样率较低的矩阵而言,基于IALM算法得到的补全后图像保真度较差。

近年来,基于黎曼优化的矩阵补全算法因其能够减少奇异值分解代价,在补全低秩矩阵时显示出速度快、精度高的优点,被越来越多地应用于计算机视觉和图像处理的各个领域。文献[7]将黎曼优化用于低秩矩阵补全问题,其核心思想是在固定秩的矩阵空间中迭代搜索与原矩阵最接近的矩阵。但文献[7]所提算法需对原矩阵的秩进行估计且基于黎曼流形的迭代起点具有随机性。目前对于秩的估计仍是一个开放性问题,文献[8]提出的奇异值投影(Singular Value Projection, SVP)算法虽能有效估计秩,但其在低秩矩阵补全时迭代不连贯。文献[9]所提OptSpace算法在秩较大时才能获得良好的补全结果。

本文在文献[10]的基础上引入自动秩估计正则项和基于黎曼流形的优化算法,提出了一种基于自动秩估计的黎曼优化矩阵补全算法,有效弥补了黎曼优化方法假设秩固定已知且迭代起点随机的缺点。本文主要贡献如下:

(1)基于L1范数正则化1阶秩矩阵补全(L1-norm regularized rank-one Matrix Completion, L1MC)算法引入关于秩的正则项,通过逐步更新达到自动秩估计的目的。

(2)引入基于黎曼流形的优化算法,以自动秩估计步骤所得预重构矩阵作为黎曼优化方法迭代起点,减少了迭代次数,提高了运算速率,节省了运算空间。

(3)本文利用卷积神经网络(Convolutional Neural Network, CNN)预处理样本图像。采用分块处理方法,用图像中欧氏距离小的像素块构建低秩矩阵,同时对此低秩矩阵奇异值分解以优化自动秩估计模块的初始条件。

2 基于自动秩估计的黎曼优化矩阵补全算法概述

对于目标矩阵,若只能观测到其一部分元素,另一部分元素由于各种原因丢失或无法得到,矩阵补全即将这些缺失的元素合理准确地填补^[11]。标准矩阵补全问题可建模为式(1)的秩最小化约束优化模型^[12]

$$\min_{\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{n_1 \times n_2}} \text{rank}(\mathbf{X}), \quad \text{s.t. } \mathbf{P}_\Omega(\mathbf{X}) = \mathbf{P}_\Omega(\mathbf{A}) \quad (1)$$

其中, $\mathbf{A}$ 为样本矩阵, Ω 为观测元素的索引集合, $\mathbf{P}_\Omega$ 为正交投影算子, 定义为

$$\mathbf{P}_\Omega(\mathbf{X}_{ij}) = \begin{cases} \mathbf{X}_{ij}, & (i, j) \in \Omega \\ 0, & (i, j) \notin \Omega \end{cases} \quad (2)$$

文献[11]将标准矩阵补全问题松弛为式(3)的凸约束优化模型

$$\min_{\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{n_1 \times n_2}} \|\mathbf{X}\|_*, \quad \text{s.t. } \mathbf{P}_\Omega(\mathbf{X}) = \mathbf{P}_\Omega(\mathbf{A}) \quad (3)$$

随着一系列基于核范数松弛的矩阵补全模型被陆续提出, 文献[12]将标准矩阵补全问题松弛为式(4)的矩阵LASSO模型

$$\min_{\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{n_1 \times n_2}} \frac{1}{2} \|\mathbf{P}_\Omega(\mathbf{X}) - \mathbf{P}_\Omega(\mathbf{A})\|_F^2 + \lambda \|\mathbf{X}\|_* \quad (4)$$

其中, $\|\cdot\|_F^2$ 为Frobenius范数(简称F范数)。

为弥补使用黎曼优化方法求解式(4)时假设秩固定已知和迭代起点随机的局限性, 本文提出一种基于自动秩估计的黎曼优化矩阵补全算法, 很大程度减少估计秩的工作量同时优化基于黎曼流形的迭代起点, 基于自动秩估计的黎曼优化矩阵补全算法的图像补全流程如图1。

如图1所示, 本文基于CNN预处理输入图像, 采用分块处理的方法遍历全图搜寻相似像素块, 并将其列向量化排列组合构建低秩矩阵。根据经验公式 $\hat{k} = \text{round}(1/8 \times \min(m, n))$ 初始化所得矩阵的秩, 通过迭代更新达到自动秩估计的目的, 同时得到预重构矩阵。以此预重构矩阵为迭代起点引入黎曼优化方法补全低秩矩阵。

3 低秩矩阵构建

低秩矩阵补全问题的解决建立在矩阵可以低秩表示的基础上, 在IC应用中, 多数图像并非低秩。文献[13]说明了由相似像素块组成的矩阵具有低秩属性, 因此, 本文采用参考像素块及其相似像素块共同构建低秩矩阵 $\mathbf{A}_p \in \mathbb{R}^{m \times n}$ 。由于样本图像存在大量缺失像素, 搜索相似像素块具有一定难度, 因此本文沿用文献[14]所提方法, 即用CNN对样本图像缺失像素预处理, 所用CNN由完整图像 $\mathbf{I}_r$ 和对应随机采样的图像 $\mathbf{I}_y$ 训练。

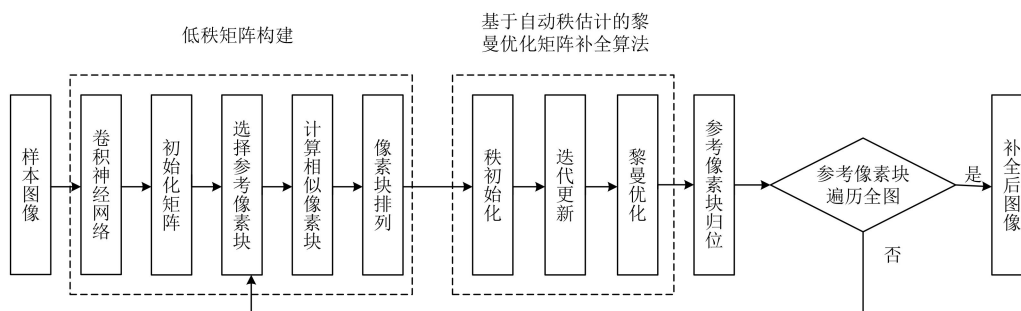


图1 基于自动秩估计的黎曼优化矩阵补全算法的图像补全

如图2所示, 样本图像经预处理后, 在像素点 (i, j) 处选取含 $n_p \times m_p$ 个像素的参考像素块 $P_p(i, j)$, 通过计算欧式距离选择一组与其相似的像素块, 计算欧式距离时为样本像素分配比初始化像素更大的权重。参考像素块与相似像素块被一同存储在低秩

矩阵 A_p 的列中。最后通过基于自动秩估计的黎曼优化矩阵补全算法处理 A_p 中的缺失像素。补全像素块 $P_p(i, j)$ 后迭代处理下一个参考像素块 $(P_p(i + \delta_p, j))$, $1 \leq \delta_p < \min(n_p, m_p)/2$ 直至参考像素块遍历全图。



图2 低秩矩阵构建示意图

4 基于自动秩估计的黎曼优化矩阵补全算法

本文基于黎曼优化方法补全低秩矩阵 $A_p \in \mathbb{R}^{m \times n}$, 需假定式(1)中全局最小化的秩已知(例如: 令秩为 k), 再在秩为 k 的矩阵空间上引入黎曼优化方法。但在实际应用中, 秩 k 往往难以确定且黎曼优化的迭代起点 X_1 具有随机性, 因此本文提出一种基于自动秩估计的黎曼优化矩阵补全算法, 弥补了上述缺陷。

4.1 黎曼优化方法

由式(4)得基于黎曼优化方法解决的低秩矩阵补全问题的目标函数为

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{X}} f(\mathbf{X}) &:= \frac{1}{2} \|\mathbf{P}_\Omega(\mathbf{X}) - \mathbf{P}_\Omega(\mathbf{A})\|_F^2 + \lambda \|\mathbf{X}\|_* \\ \text{s.t. } \mathbf{X} &\in \mathcal{M}_k := \{\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{m \times n} : \text{rank}(\mathbf{X}) = k\} \end{aligned} \quad (5)$$

其中, $\mathbf{A} = \mathbf{A}_p \in \mathbb{R}^{m \times n}$ 为样本矩阵, $\mathcal{M}_k$ 是一个秩为 k 的矩阵空间, 为光滑流形 (C^∞), 且目标函数 $f(\mathbf{X})$ 同为光滑的, 因此式(5)是一个光滑函数的优化问题, 可以通过引入基于黎曼流形的共轭梯度法来解决^[7]。以第 i 次迭代为例, 在图3中对基于黎曼流形的共轭梯度法进行可视化的展示

如图3所示, 计算迭代点 $\mathbf{X}_i$ 处的梯度 ξ_i 后, 为确定共轭方向 η_i , 需先计算向量传递 $\mathcal{T}_{\mathbf{X}_{i-1} \rightarrow \mathbf{X}_i}(\eta_{i-1})$ 。得到共轭方向 η_i 后计算步长 t_i 从而确定下一个迭代点 $\mathbf{X}_i + t_i \eta_i$ 。但由于 $\mathbf{X}_i + t_i \eta_i$ 不一定在 $\mathcal{M}_k$ 上, 此时需要收缩算子 $R_{\mathbf{X}_i}$ 将其投影到 $\mathcal{M}_k$ 上得到 $\mathbf{X}_{i+1}$ 。各步骤具体算法可参考文献^[7]。

4.2 基于自动秩估计的黎曼优化矩阵补全算法

本文基于1阶秩近似^[10]建立模型式(6), 1阶秩近似是一种常见的用于矩阵补全的低秩矩阵分解方

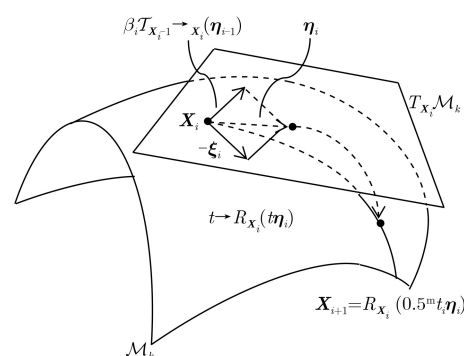


图3 黎曼流形上的共轭梯度法

法。任一矩阵 $\mathbf{Z}$ 均可被表示为 k 个1阶秩矩阵的加权和:
 $\mathbf{Z} = \sum_{r=1}^k w_r \mathbf{u}_r \mathbf{v}_r^T = \mathbf{U} \text{diag}(\mathbf{w}) \mathbf{V}^T$, 其中 $\mathbf{w} = [w_1, w_2, \dots, w_r, \dots, w_k]^T$ 为权重向量, $\mathbf{U} \in \mathbb{R}^{m \times k} = \{\mathbf{u}_r\}_{r=1}^k$ 和 $\mathbf{V} \in \mathbb{R}^{n \times k} = \{\mathbf{v}_r\}_{r=1}^k$ 为因子矩阵, $k(k < \min(m, n))$ 为 $\mathbf{Z}$ 的秩。上述矩阵 $\mathbf{Z}$ 的表示形式类似于SVD, 但因子矩阵 $\mathbf{U}$ 和 $\mathbf{V}$ 的列不强制为正交。通过对权重向量进行L1范数正则化来解决秩估计问题, 同时最小化重构误差 $\frac{1}{2} \|\mathbf{A} - \mathbf{Z}\|_F^2$ 和秩相关项 αk 。

$$\left. \begin{aligned} \min_{\mathbf{A}, \mathbf{w}, \{\mathbf{u}_r, \mathbf{v}_r\}_{r=1}^k} & \mu \|\mathbf{w}\|_1 + \alpha k + \frac{1}{2} \|\mathbf{A} - \mathbf{Z}\|_F^2 \\ \text{s.t. } & \mathbf{Z} = \sum_{r=1}^k w_r \mathbf{u}_r \mathbf{v}_r^T, \|\mathbf{u}_r\|_2 = \|\mathbf{v}_r\|_2 = 1, r=1, 2, \dots, k \end{aligned} \right\} (6)$$

其中, μ 和 α 是正则项系数, k 是待估秩, 权重向量 $\mathbf{w}$ 由矩阵 $\mathbf{A}$ 的奇异值组成。

本文采用块坐标下降(Block Coordinate Descent, BCD)方法解决式(6)^[10]。将目标变量划分为 $k+2$ 组: $\{\{w_1, \mathbf{u}_1, \mathbf{v}_1\}, \{w_2, \mathbf{u}_2, \mathbf{v}_2\}, \dots, \{w_r, \mathbf{u}_r, \mathbf{v}_r\}, \dots, \{w_k, \mathbf{u}_k, \mathbf{v}_k\}, \mathbf{A}, k\}$, 优化每组变量时固定其余组, 更新组内各个变量时固定组内其余变量, 完成 $k+2$ 组变量更新便可得到最终估计的秩 k 。关于第 r 组 $\{w_r, \mathbf{u}_r, \mathbf{v}_r\}$ 的拉格朗日函数为

$$\mathcal{L}(w_r, \mathbf{u}_r, \mathbf{v}_r) = \mu |w_r| + \frac{1}{2} \|\mathbf{A}_r - w_r \mathbf{u}_r \mathbf{v}_r^T\|_F^2 \quad (7)$$

其中, $\mathbf{A}_r = \mathbf{A} - \sum_{q=1}^{r-1} w_q \mathbf{u}_q \mathbf{v}_q^T$ 是近似值的残差。

4.2.1 更新 $\mathbf{u}_r, \mathbf{v}_r$

式(7)中关于 $\mathbf{u}_r$ 的部分为 $\mathcal{L}(\mathbf{u}_r) = \frac{1}{2} \|\mathbf{A}_r - w_r \mathbf{u}_r \mathbf{v}_r^T\|_F^2$

为求驻点, 将 $\mathcal{L}_{\mathbf{u}_r}$ 对 $\mathbf{u}_r$ 求偏导且令其为0, 得

$$w_r^2 \mathbf{u}_r - w_r \mathbf{A}_r \mathbf{v}_r = 0 \Rightarrow \mathbf{u}_r^{(i+1)} = \frac{\mathbf{A}_r^i \mathbf{v}_r^i}{w_r^i} \quad (8)$$

将向量 $\mathbf{u}_r^{(i+1)}$ 标准化: $\mathbf{u}_r^{(i+1)} = (\mathbf{u}_r^{(i+1)} / \|\mathbf{u}_r^{(i+1)}\|_2)$ 。

本文只更新非零权重($w_r^i \neq 0$)的组。

同理可更新 $\mathbf{v}_r^{(i+1)}$

$$\mathbf{v}_r^{(i+1)} = \frac{\mathbf{A}_r^{T^i} \mathbf{u}_r^{(i+1)}}{w_r^i} \quad (9)$$

其中标准化表示为 $\mathbf{v}_r^{(i+1)} = (\mathbf{v}_r^{(i+1)} / \|\mathbf{v}_r^{(i+1)}\|_2)$ 。

4.2.2 更新 w_r

式(7)中关于 w_r 的部分为 $\mathcal{L}(w_r) = \mu |w_r| + \frac{1}{2} \|\mathbf{A}_r - w_r \mathbf{u}_r \mathbf{v}_r^T\|_F^2$

将 $\mathcal{L}_{w_r}$ 对 w_r 求偏导数, 令其为0, 得

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}_{w_r}}{\partial w_r} &= \frac{\mu |w_r|}{\partial w_r} + (w_r - \text{trace}(\mathbf{v}_r \mathbf{u}_r^T \mathbf{A}_r)) \\ &= \frac{\mu |w_r|}{\partial w_r} + w_r - \langle \mathbf{A}_r, \mathbf{v}_r \mathbf{u}_r^T \rangle = 0 \end{aligned} \quad (10)$$

由式(10)得, $w_r = \langle \mathbf{A}_r, \mathbf{v}_r \mathbf{u}_r^T \rangle - \mu (|w_r| / \partial w_r)$ 。

通过式(11)更新 $w_r^{(i+1)}$ ^[15]

$$w_r^{(i+1)} = \text{shrink}_{\mu} \left(\langle \mathbf{A}_r^i, \mathbf{v}_r^{(i+1)} \mathbf{u}_r^{T(i+1)} \rangle \right) \quad (11)$$

其中, shrink是软阈值算子

$$\text{shrink}_{\mu}(a) = \begin{cases} a - \mu, & a > \mu \\ 0, & |a| \leq \mu \\ a + \mu, & a < -\mu \end{cases} \quad (12)$$

4.2.3 更新 $\mathbf{A}$

式(6)中关于 $\mathbf{A}$ 的部分为

$$\left. \begin{aligned} \min_{\mathbf{A}} & \frac{1}{2} \|\mathbf{A} - \mathbf{Z}\|_F^2 \\ \text{s.t. } & \mathbf{Z} = \sum_{r=1}^k w_r \mathbf{u}_r \mathbf{v}_r^T, \|\mathbf{u}_r\|_2 = \|\mathbf{v}_r\|_2 = 1 \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

推导出式(13)的KKT (Karush-Kuhn-Tucker) 条件^[16], 通过 $\mathbf{A}^{(i+1)} = \mathbf{P}_{\Omega}(\mathbf{A}) + \mathbf{P}_{\Omega^c}(\mathbf{Z}^{(i+1)})$ 更新 $\mathbf{A}^{(i+1)}$, 其中 $\mathbf{Z}^{(i+1)} = \sum_{r=1}^k w_r^{(i+1)} \mathbf{u}_r^{(i+1)} \mathbf{v}_r^{T(i+1)}$ 。

4.2.4 更新 k

式(6)中关于 k 的部分为

$$f(k) = \mu |\mathbf{w}|_{r=1}^k + \frac{1}{2} \|\mathbf{A} - \sum_{r=1}^k w_r \mathbf{u}_r \mathbf{v}_r^T\|_F^2 + \alpha k \quad (14)$$

在对 $f(k)$ 最小化时, 考虑到 k 为离散值, 则

$$k^{i+1} = \arg \min_k f(k), k=1, 2, \dots, \min(m, n) \quad (15)$$

自动秩估计具体步骤见表1的算法1。

本文所提基于自动秩估计的黎曼优化矩阵补全算法步骤如下: 执行算法1得到其输出 k 和秩为 k 的矩阵 $\mathbf{Z}$, 基于 k 和 $\mathbf{Z}$ 参照文献[7]执行基于黎曼流形的共轭梯度法。具体衔接方法为令 $\mathbf{X}_1 = \mathbf{Z}$, 在秩为 k 的黎曼流形 $\mathcal{M}_k$ 上以 $\mathbf{X}_1$ 为迭代起点执行基于黎曼流形的共轭梯度法。基于自动秩估计的黎曼优化矩阵补全算法如表2所示。

4.3 算法复杂度分析

算法1的复杂度主要集中在步骤(3)迭代更新 $\mathbf{u}_r, \mathbf{v}_r, w_r$ 、步骤(5)更新 k 以及步骤(7)判断条件的计算部分。通过式(8)更新 $\mathbf{u}_r$ 主要包含矩阵与向量的乘积及线性运算, 其复杂度为 $O(mn)$, 同理可得更新 $\mathbf{v}_r, w_r$ 的复杂度均为 $O(mn)$ 。因此, 步骤(3)复杂度为 $O(\hat{k}mn)$, 其中 $\hat{k} = \text{round}(1/8 \times \min(m, n))$ 为初始秩。步骤(5)中, 当 $k=1$ 时, $f(1) = \mu |\mathbf{w}| + \frac{1}{2} \|\mathbf{A} - w_1 \mathbf{u}_1 \mathbf{v}_1^T\|_F^2 + \alpha$, 主要包含向量乘积、F范数及线性运算, 复杂度为 $O(mn)$; 当 $k=2$ 时, $f(2) = \mu \sum_{r=1}^2 |w_r| + \frac{1}{2} \|\mathbf{A} - \sum_{r=1}^2 w_r \mathbf{u}_r \mathbf{v}_r^T\|_F^2 + 2\alpha$,

表 1 自动秩估计算法伪代码

算法1 自动秩估计算法
输入: $\mathbf{A} = \mathbf{A}_p \in \mathbb{R}^{m \times n}$, 索引矩阵 Ω, 正则项系数 μ, α, 初始秩 $\hat{k}$, 最大迭代次数 K, 容错度 τ_2。 初始化: 执行奇异值分解 $\mathbf{A} = \mathbf{U} \mathbf{W} \mathbf{V}^T$, 将 $\mathbf{U}$ 的第 r 列单位化记为 $\mathbf{u}_r$, 将 $\mathbf{V}$ 的第 r 行单位化记为 $\mathbf{v}_r$, $\mathbf{w} = \{w_r\}_{r=1}^{\min(m,n)}$ 为 $\mathbf{W}$ 中奇异值组成的向量。令 $\mathbf{Z} = \mathbf{0}$, $\mathbf{P}_{\Omega^c}(\mathbf{A}) = \mathbf{0}$。 输出: $\mathbf{Z}, k$。 (1) for $i = 1, 2, \dots, K$ do: (2) $\mathbf{A}_r = \mathbf{A}$; (3) 更新 $\mathbf{u}_r, \mathbf{v}_r, w_r$: for $r = 1, 2, \dots, \hat{k}$ do: 若 $w_r \neq 0$, 根据式(8)、式(9)和式(11)依次更新 $\mathbf{u}_r, \mathbf{v}_r, w_r$, $\mathbf{A}_r = \mathbf{A}_r - w_r \mathbf{u}_r \mathbf{v}_r^T$, end; (4) 更新 $\mathbf{A}$: 更新 $\mathbf{Z} = \mathbf{A} - \mathbf{A}_r$, 令 $\mathbf{P}_{\Omega^c}(\mathbf{A}) = \mathbf{P}_{\Omega^c}(\mathbf{Z})$; (5) 更新 k: for $k = 1, 2, \dots, \min(m, n)$ do: 计算 $f(k) = \mu \ \mathbf{w}_{r=1}^k\ + 0.5 \ \mathbf{A} - \sum_{r=1}^k w_r \mathbf{u}_r \mathbf{v}_r^T\ _F^2 + \alpha k$, 若 $f(k) < f(k+1)$, 则结束循环, end; (6) $\hat{k} = k$; (7) 若 $\ \mathbf{P}_{\Omega}(\mathbf{A} - \mathbf{Z})\ _F / \ \mathbf{P}_{\Omega}(\mathbf{A})\ _F < \tau_2$ 或 $\ \mathbf{A}^{i+1} - \mathbf{A}^i\ _F / \ \mathbf{A}^{i+1}\ _F < \tau_2$, 则结束循环; (8) end。

表 2 基于自动秩估计的黎曼优化矩阵补全算法伪代码

算法2 基于自动秩估计的黎曼优化矩阵补全算法
输入: $\mathbf{X}_1 = \mathbf{Z} \in \mathcal{M}_k(\mathbf{Z}$ 和 k 源于算法1), 容错度 τ_1, 切向量 $\boldsymbol{\eta}_0 = \mathbf{0}$。 输出: $\mathbf{X}^*$。 (1) for $i = 1, 2, \dots, K$ do: (2) 梯度 $\xi_i := \text{gradf}(\mathbf{X}_i)$; % 计算黎曼梯度 (3) 若 $\ \xi_i\ \leq \tau_1$, 则停止迭代, 令 $\mathbf{X}^* = \mathbf{X}_i$, 否则转(4); % 终止条件 (4) 共轭方向 $\boldsymbol{\eta}_i := -\xi_i + \beta_i \mathcal{T}_{\mathbf{X}_{i-1} \rightarrow \mathbf{X}_i}(\boldsymbol{\eta}_{i-1})$; % 计算共轭方向 (5) 步长 $t_i = \text{argmin}_t f(\mathbf{X}_i + t\boldsymbol{\eta}_i)$; % 计算步长 (6) 执行 Armijo 回溯以找到满足 $f(\mathbf{X}_i) - f(R_{\mathbf{X}_i}(0.5^m t_i \boldsymbol{\eta}_i)) \geq -0.0001 \times 0.5^m t_i \langle \xi_i, \boldsymbol{\eta}_i \rangle$ 且 $m \geq 0$ 的最小整数, 计算 $\mathbf{X}_{i+1} := R_{\mathbf{X}_i}(0.5^m t_i \boldsymbol{\eta}_i)$; % 收缩算子 (7) end。

可以通过储存 $f(1)$ 的 $w_1 \mathbf{u}_1 \mathbf{v}_1^T$ 结果降低计算 $f(2)$ 复杂度, 此时计算 $f(2)$ 的复杂度为 $O(2mn)$; 以此类推, 计算 $f(k)$ 的复杂度为 $O(kmn)$ 。步骤(7)判断条件主要包含线性运算及F范数的计算, 复杂度为 $O(mn)$ 。本文实验中 $m = n$, 综上所述, 每次迭代自动秩估计算法的复杂度为 $O(k'n^2)$, 其中 $k' = \max(\hat{k}, k)$ 。此外, 文献[7]已论证基于黎曼流形的共轭梯度法复杂度为 $O((92 + 20\text{OS})nk^2)$, 其中OS为过采样因子, k 为秩。本文所提算法2复杂度由自动秩估计算法复杂度和基于黎曼流形的共轭梯度法复杂度两部分组成, 即 $O(k'n^2) + O((92 + 20\text{OS})nk^2)$ 。分析可得, 基于自动秩估计的黎曼优化矩阵补全算法的复

杂度略高于OptSpace算法的复杂度 $O(kn(\lg n)^2)^{[9]}$, 但由第5.2节可得本文所提算法的图像补全效果远高于OptSpace算法。

5 仿真实验

5.1 实验设置

本文将所提基于自动秩估计的黎曼优化矩阵补全算法应用于图像补全问题, 通过处理不同类型图像对所提算法进行测试。本文预处理所用CNN结构3层中的卷积核 W_l 的维度 s_l 和数目 n_l 的初始设置分别如下: $s_1 = 9, s_2 = 3, s_3 = 5, n_1 = 128, n_2 = 64, n_3 = 1$ 。卷积核 W_l 的权重通过服从均值为零标准差为0.001的高斯分布设置。本文以 10^{-5} 的学习

率将600张图像分为21600块训练CNN，以不同采样率图像作为输入，以达到兼顾对各种采样率下样本图像进行预处理的的目的。基于自动秩估计的黎曼优化矩阵补全算法参数初始值设置如下： $\hat{k} = \text{round}(1/8 \times \min(m, n))$ ， $\mu = 50$ ， $\alpha = 0.01$ ， $K = 800$ ， $\tau_1 = 10^{-12}$ ， $\tau_2 = 10^{-14}$ ， $\lambda = 50$ 。

在测试过程中，本文分别从主观视觉效果和峰值信噪比(Peak Signal to Noise Ratio, PSNR)^[17]、结构相似性(Structural SIMilarity, SSIM)^[18]两个客观评价指标分析各算法图像补全结果。

5.2 实验结果

本文选取两个 256×256 的图像作为参考图像，分别以10%，20%，…，90%的采样率参考图像采样，观察本文算法及其它算法的补全结果。部分实验结果如图4。

从视觉效果的对比中可以看出，采样率为30%时，用本文所提基于自动秩估计的黎曼优化矩阵补

全算法获得的补全后图像在整体视觉上优于其它各算法。SVP方法所得Barbara图人体头部轮廓及House图屋顶轮廓有着不同程度的失真；OptSpace方法和IALM方法的补全图像在整个可见区域上较参考图像有明显的细节丢失；SVT方法虽然相对于其它对比方法视觉效果较好，但与本文算法相比，SVT方法在Barbara图人脸与背景交界处及House图房屋与背景交界处有可见的边缘细节缺失。仅依靠主观视觉判断难以充分说明图像补全效果，因此列出部分客观评价指标结果，如表3所示。

由表3可得，当采样率大于等于20%，本文算法的PSNR和SSIM两项指标均明显高于其它方法，且随着采样率增大，PSNR和SSIM均呈递增趋势。此外，当采样率大于等于20%时，本文算法的SSIM指标远高于其它方法，说明本文算法的图像补全结果与原始参考图像具有更高的结构相似性。这也印证了从主观视觉来看基于自动秩估计的黎曼优化矩

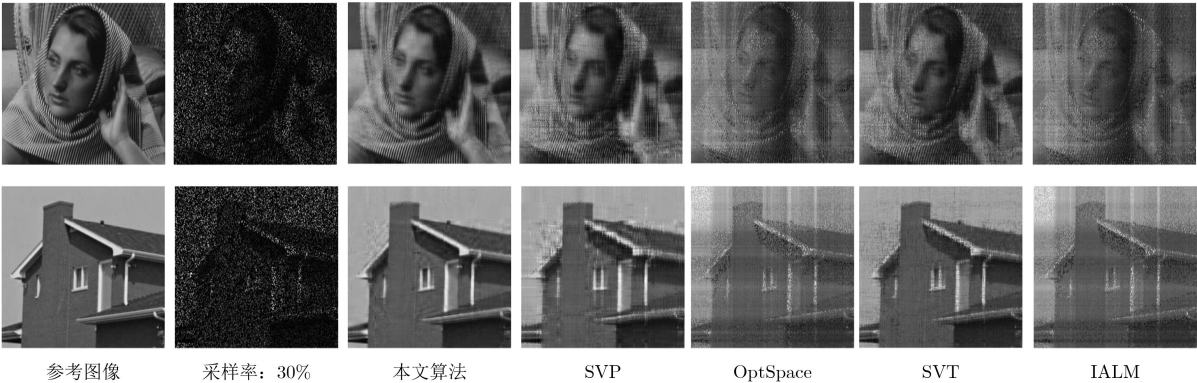


图 4 30%采样率下各算法图像补全结果

表 3 基于各算法的补全后图像PSNR(dB)/SSIM指标评价

采样率(%)		图像补全算法				
		本文算法	SVP	OptSpace	SVT	IALM
10	Barbara	25.1371/0.1018	27.1138/0.0749	28.4540/0.2703	26.4330/0.1817	27.9684/0.2217
	House	25.0207/0.0737	27.0100/0.0845	28.8611/0.3805	26.0756/0.2122	27.3161/0.0319
20	Barbara	29.5855/0.6187	29.4788/0.3705	29.0277/0.3509	27.7929/0.3638	29.0097/0.3175
	House	32.1346/0.7750	30.5881/0.4681	29.2989/0.4096	28.0950/0.4569	29.1008/0.0667
30	Barbara	31.8223/0.7775	30.5821/0.5530	29.7224/0.4138	29.0192/0.5193	29.6337/0.4010
	House	34.3279/0.8434	32.6125/0.6858	29.8818/0.4437	30.2986/0.6472	29.9081/0.4560
40	Barbara	33.1805/0.8054	31.3704/0.6249	30.4532/0.4922	30.2063/0.6471	30.2152/0.4592
	House	36.9926/0.9175	33.4685/0.7449	30.5393/0.4687	32.2618/0.7718	30.6276/0.4546
50	Barbara	34.3090/0.8545	32.3230/0.7045	31.1457/0.5349	31.6388/0.7607	31.0285/0.5060
	House	37.9729/0.9342	34.4193/0.7909	31.8817/0.5854	34.2940/0.8575	31.3316/0.4965
60	Barbara	35.5808/0.8932	33.3609/0.7612	32.2731/0.5955	33.4085/0.8552	31.9375/0.5660
	House	39.5723/0.9504	35.5242/0.8297	33.5629/0.7099	36.5579/0.9150	32.3391/0.4992
70	Barbara	37.1206/0.9277	34.6884/0.8124	33.4690/0.6453	35.7766/0.9191	33.0595/0.6449
	House	41.0744/0.9622	36.8819/0.8690	34.4479/0.7395	39.3028/0.9524	33.4229/0.5724
80	Barbara	39.0801/0.9529	36.4704/0.8665	35.3219/0.7479	38.8081/0.9565	34.7671/0.6462
	House	43.1665/0.9728	38.6710/0.9042	37.2815/0.8288	41.8076/0.9234	35.2485/0.6317
90	Barbara	42.3685/0.9699	39.3773/0.9213	38.4127/0.8653	40.6578/0.9357	38.0598/0.7796
	House	46.1068/0.9810	41.9691/0.9442	40.3322/0.8943	42.0364/0.9707	38.1441/0.7449

阵补全算法的图像补全结果更具优越性的判断。综上所述, 这组评价指标的对比结果充分说明了基于自动秩估计的黎曼优化矩阵补全算法在图像补全方面的优势。

6 结束语

在处理图像补全问题时, 考虑到采用黎曼优化方法需假定全局最小化的秩固定已知, 因此本文提出基于自动秩估计的黎曼优化矩阵补全算法, 有效解决了黎曼优化方法这一缺陷。本文算法不仅避免了需多次实验筛选合适的秩从而降低自动秩估计的工作量, 同时自动秩估计方法产生的预重构矩阵可用作黎曼优化的迭代起点从而减少迭代次数。采用两类原始参考图像对基于自动秩估计的黎曼优化矩阵补全算法进行仿真实验, 并与SVP, OptSpace, SVT, IALM等算法的图像补全结果进行对比和指标分析。实验结果表明, 本文提出的基于自动秩估计的黎曼优化矩阵补全算法无论是在主观视觉效果还是客观指标上都取得了相对较好的图像补全结果。

参 考 文 献

- [1] 臧芳. 一种利用低秩矩阵填充技术恢复气象数据的方法[J]. 计算机应用与软件, 2017, 34(9): 322–327. doi: [10.3969/j.issn.1000-386x.2017.09.063](https://doi.org/10.3969/j.issn.1000-386x.2017.09.063).
ZANG Fang. Method of restoring meteorological data using low-rank matrix filling technique[J]. *Computer Applications and Software*, 2017, 34(9): 322–327. doi: [10.3969/j.issn.1000-386x.2017.09.063](https://doi.org/10.3969/j.issn.1000-386x.2017.09.063).
- [2] 杨国亮, 鲁海荣, 丰义琴, 等. 基于非局部矩阵填充的文物修复技术研究[J]. 计算机应用与软件, 2016, 33(11): 126–129. doi: [10.3969/j.issn.1000-386x.2016.11.030](https://doi.org/10.3969/j.issn.1000-386x.2016.11.030).
YANG Guoliang, LU Hairong, FENG Yiqin, *et al.* On cultural relic images restoration technology based on non-local matrix completion[J]. *Computer Applications and Software*, 2016, 33(11): 126–129. doi: [10.3969/j.issn.1000-386x.2016.11.030](https://doi.org/10.3969/j.issn.1000-386x.2016.11.030).
- [3] 陈秋实, 杨强, 董英凝, 等. 基于矩阵填充的合成宽带高频雷达非网格目标分辨技术研究[J]. 电子与信息学报, 2017, 39(12): 2874–2880. doi: [10.11999/JEIT170449](https://doi.org/10.11999/JEIT170449).
CHEN Qiushi, YANG Qiang, DONG Yingning, *et al.* Off-the-grid targets resolution of synthetic bandwidth high frequency radar based on matrix completion[J]. *Journal of Electronics & Information Technology*, 2017, 39(12): 2874–2880. doi: [10.11999/JEIT170449](https://doi.org/10.11999/JEIT170449).
- [4] CAI T T and ZHANG Anru. Sparse representation of a polytope and recovery of sparse signals and low-rank matrices[J]. *IEEE Transactions on Information Theory*, 2014, 60(1): 122–132. doi: [10.1109/TIT.2013.2288639](https://doi.org/10.1109/TIT.2013.2288639).
- [5] CAI Jianfeng, CANDÈS E J, and SHEN Zuowei. A singular value thresholding algorithm for matrix completion[J]. *SIAM Journal on Optimization*, 2010, 20(4): 1956–1982. doi: [10.1137/080738970](https://doi.org/10.1137/080738970).
- [6] LIN Zhouchen, CHEN Minming, and MA Yi. The augmented lagrange multiplier method for exact recovery of corrupted low-rank matrices[J]. *arXiv preprint arXiv: 1009.5055*, 2010.
- [7] VANDEREYCKEN B. Low-rank matrix completion by riemannian optimization[J]. *SIAM Journal on Optimization*, 2013, 23(2): 1214–1236. doi: [10.1137/110845768](https://doi.org/10.1137/110845768).
- [8] MEKA R, JAIN P, and DHILLON I S. Guaranteed rank minimization via singular value projection[C]. Proceedings of the Neural Information Processing Systems Conference, Vancouver, Canada, 2010: 937–945.
- [9] KESHAVAN R H and OH S. A gradient descent algorithm on the grassman manifold for matrix completion[J]. *arXiv preprint arXiv: 0910.5260*, 2009.
- [10] SHI Qiquan, LU Haiping, and CHEUNG Y. Rank-one matrix completion with automatic rank estimation via L1-norm regularization[J]. *IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems*, 2018, 29(10): 4744–4757. doi: [10.1109/TNNLS.2017.2766160](https://doi.org/10.1109/TNNLS.2017.2766160).
- [11] 陈蕾, 陈松灿. 矩阵补全模型及其算法研究综述[J]. 软件学报, 2017, 28(6): 1547–1564. doi: [10.13328/j.cnki.jos.005260](https://doi.org/10.13328/j.cnki.jos.005260).
CHEN Lei and CHEN Songcan. Survey on matrix completion models and algorithms[J]. *Journal of Software*, 2017, 28(6): 1547–1564. doi: [10.13328/j.cnki.jos.005260](https://doi.org/10.13328/j.cnki.jos.005260).
- [12] CANDÈS E J and RECHT B. Exact matrix completion via convex optimization[J]. *Foundations of Computational Mathematics*, 2009, 9(6): 717–772. doi: [10.1007/s10208-009-9045-5](https://doi.org/10.1007/s10208-009-9045-5).
- [13] LI Wei, ZHAO Lei, LIN Zhijie, *et al.* Non-local image inpainting using low - rank matrix completion[J]. *Computer Graphics Forum*, 2015, 34(6): 111–122. doi: [10.1111/cgf.12521](https://doi.org/10.1111/cgf.12521).
- [14] LIU Ping, LEWIS J, and RHEE T. Low-rank matrix completion to reconstruct incomplete rendering images[J]. *IEEE Transactions on Visualization and Computer Graphics*, 2018, 24(8): 2353–2365. doi: [10.1109/TVCG.2017.2722414](https://doi.org/10.1109/TVCG.2017.2722414).
- [15] DONG Bin, MAO Yu, OSHER S, *et al.* Fast linearized Bregman iteration for compressive sensing and sparse denoising[J]. *Communications in Mathematical Sciences*, 2010, 8(1): 93–111. doi: [10.4310/CMS.2010.v8.n1.a6](https://doi.org/10.4310/CMS.2010.v8.n1.a6).
- [16] LIU Yuanyuan, SHANG Fanhua, WEI Fan, *et al.* Generalized higher-order orthogonal iteration for tensor decomposition and completion[C]. Proceedings of the 27th International Conference on Neural Information Processing Systems, Montreal, Canada, 2014: 1763–1771.
- [17] HORE A and ZIOU D. Image quality metrics: PSNR vs.

- SSIM[C]. Proceedings of the 20th International Conference on Pattern Recognition, Istanbul, Turkey, 2010: 2366–2369. doi: [10.1109/ICPR.2010.579](https://doi.org/10.1109/ICPR.2010.579).
- [18] ÖZİÇ M Ü and ÖZŞEN S. A new model to determine asymmetry coefficients on MR images using PSNR and SSIM[C]. Proceedings of 2017 International Artificial Intelligence and Data Processing Symposium, Malatya, Turkey, 2017: 1–6. doi: [10.1109/IDAP.2017.8090201](https://doi.org/10.1109/IDAP.2017.8090201).
- 刘 静: 女, 1975年生, 教授, 博士生导师, 从事压缩感知、图像融合、雷达信号处理方向的研究.
- 刘 涵: 女, 1991年生, 硕士生, 研究方向为压缩感知、图像处理、矩阵补全.
- 黄开宇: 男, 1992年生, 博士生, 研究方向为压缩感知、信号处理、信号与图像处理.
- 苏立玉: 男, 1996年生, 硕士生, 研究方向为压缩感知、图像处理、张量补全.