

## 多信源多中继编码协作系统准循环LDPC码的联合设计与性能分析

张顺外\* 魏琪

(南京邮电大学通信与信息工程学院 南京 210003)

**摘要:** 为解决多信源多中继低密度奇偶校验(LDPC)码编码协作系统编码复杂度高、编码时延长的问题,该文引入一种特殊结构的LDPC码—基于生成矩阵的准循环LDPC码(QC-LDPC)码。该类码结合了QC-LDPC码与基于生成矩阵LDPC(G-LDPC)码的特点,可直接实现完全并行编码,极大地降低了中继节点的编码时延及编码复杂度。在此基础上,推导出对应于信源节点和中继节点采用的QC-LDPC码的联合校验矩阵,并基于最大公约数(GCD)定理联合设计该矩阵以消除其所有围长为4,6(girth-4, girth-6)的短环。理论分析和仿真结果表明,在同等条件下该系统的误码率(BER)性能优于相应的点对点系统。仿真结果还表明,与采用显式算法构造QC-LDPC码或一般构造QC-LDPC码的协作系统相比,采用联合设计QC-LDPC码的系统均可获得更高的编码增益。

**关键词:** 准循环低密度奇偶校验码; 编码协作; 联合校验矩阵; 最大公约数定理

中图分类号: TN911.22

文献标识码: A

文章编号: 1009-5896(2019)10-2325-09

DOI: [10.11999/JEIT190069](https://doi.org/10.11999/JEIT190069)

## Joint Design of Quasi-cyclic Low Density Parity Check Codes and Performance Analysis of Multi-source Multi-relay Coded Cooperative System

ZHANG Shunwai WEI Qi

(College of Telecommunications and Information Engineering, Nanjing University of Posts and Telecommunications, Nanjing 210003, China)

**Abstract:** To solve the problems of high encoding complexity and long encoding delay in the multi-source multi-relay Low Density Parity Check (LDPC) coded cooperative system, a special kind of structured LDPC codes—Quasi-Cyclic LDPC (QC-LDPC) codes based on generator matrix is proposed, which combines the characteristics of QC-LDPC codes and Generator-matrix-based LDPC (G-LDPC) codes. It can perform completely parallel encoding, which greatly reduces the encoding complexity and delay at the relays. Based on this, a joint parity check matrix corresponding to the QC-LDPC codes adopted by the sources and relays is deduced, and the matrix is further jointly designed based on the Greatest Common Divisor (GCD) theorem to eliminate all cycles of girth-4 and girth-6. Theoretical analysis and simulation results show that under the same conditions, the Bit Error Rate (BER) performance of the proposed system is better than that of the corresponding point-to-point system. The simulation results also show that the cooperative system with jointly designed QC-LDPC codes can obtain a higher coding gain than the system with explicitly constructed QC-LDPC codes or generally constructed QC-LDPC codes.

**Key words:** Quasi Cyclic Low Density Parity Check (QC-LDPC) codes; Coded cooperation; Jointly parity check matrix; Greatest Common Divisor (GCD) theorem

收稿日期: 2019-01-24; 改回日期: 2019-06-16; 网络出版: 2019-06-26

\*通信作者: 张顺外 swzhang@njupt.edu.cn

基金项目: 国家自然科学基金(61501256), 江苏省自然科学基金(BK20150857), 南京邮电大学国自基金孵化项目(NY219073)

Foundation Items: The National Natural Science Foundation of China (61501256), The Natural Science Foundation of Jiangsu Province (BK20150857), The NUPTSF(NY219073)

## 1 引言

低密度奇偶校验(Low Density Parity Check, LDPC)码<sup>[1-3]</sup>是一种性能逼近香农限的高效信道编码技术。准循环LDPC (Quasi-Cyclic LDPC, QC-LDPC)码作为LDPC码的一个重要子类,不仅具有随机LDPC码的优点,而且其校验矩阵具有准循环移位特性。因此,在实际构造过程中只需存储每个子块的循环移位值,极大地降低了编码的复杂度及系统对存储空间的需求,便于硬件实现。围长为4, 6(girth-4, girth-6)的短环会严重降低QC-LDPC码的性能,消除短环是提高QC-LDPC码编码增益的最有效手段之一。近年来,诸多学者针对该问题进行了相关研究。文献[4]介绍了一种基于欧几里德几何性质构造大围长QC-LDPC码的代数方法,该方法构造的QC-LDPC码性能逼近香农限。文献[5]提出了一种根据QC-LDPC码Tanner图中短环数与校验矩阵特征值之间关系计算短环的有效方法。该方法可以有效降低QC-LDPC码的编码复杂度,并且该方法下产生的QC-LDPC码围长优于普通的LDPC码。文献[6]给出了两种基于中国余数定理扩展QC-LDPC码码长的方法,第1种是在不减小围长的情况下扩展QC-LDPC码的码长,第2种是设计定长的QC-LDPC码。这两种方法设计的QC-LDPC码码长、码率灵活且围长较大。文献[7]基于斐波那契数列提出了一种QC-LDPC码的新颖构造方法,该构造方法能够有效避免4环的产生,具有较好的纠错性能,并且可以通过改变参数值进而改变码长和码率。目前消除4环(即girth $\geq 6$ )的研究成果已经非常丰富,因此如何消除6环及更大围长的环成为LDPC码构造方面的一个研究重点。另外,虽然对于列重固定的情形,学者们已经构造出了girth $\geq 12$ 的LDPC码<sup>[8]</sup>;但是对于列重可变的情形,构造girth $> 6$ 的LDPC码并不容易。鉴于此,本文研究一种任意列重、任意行重且girth $\geq 8$ 的QC-LDPC码的构造方法。

协作技术<sup>[9-11]</sup>是在中继信道和多址接入信道基础上受到多输入多输出(Multiple-Input Multiple-Output, MIMO)技术的启发而产生的,用户之间通过相互协作,形成虚拟的MIMO系统以实现空间分集增益,从而提高系统性能。编码协作<sup>[12-14]</sup>将信道编码技术和协作技术有机融合,能同时获得编码增益和协作分集增益,极大地提高了系统的可靠性。编码协作最早由文献[15]提出,并证明了Turbo编码协作系统优于其他协作系统。而与Turbo码相比, QC-LDPC码具有编码复杂度低、存储空间需

求小、可进行并行迭代译码等特点。故QC-LDPC编码协作系统复杂度较低,更易于工程实现。文献[16]提出在中继节点处对来自两信源的信息采用QC-LDPC码再次联合编码,并基于Tanner图在目的节点提出一种联合迭代译码算法。文献[17]设计了一种采用联合迭代译码的QC-LDPC编码协作,该方法下生成的QC-LDPC码消除了I型和II型girth-4环,提升了协作系统的编码增益。文献[18]针对信源节点和中继节点都需要传输自己数据的场景,通过构造联合网络信道校验矩阵,提出了一种网络信道LDPC码的联合设计方法,该方法能够同时给信源和中继提供额外的保护。

鉴于QC-LDPC编码协作的诸多优点,本文针对采用QC-LDPC码的多信源多中继编码协作系统展开研究。创新点主要包括以下两点:首先,研究一种基于最大公约数(Greatest Common Divisor, GCD)定理构造QC-LDPC码的方法,该构造方法能够实现任意列重、任意行重且girth $\geq 8$ 的QC-LDPC码。其次,针对多信源多中继编码协作系统,推导出对应于信源节点和中继节点采用的QC-LDPC码的联合校验矩阵,并基于GCD定理联合设计该矩阵消除了其所有girth-4, girth-6环。

文中 $\mathbf{I}$ ,  $\mathbf{O}$ 分别表示单位矩阵、 $\mathbf{0}$ 矩阵或 $\mathbf{0}$ 向量,  $(\cdot)^T$ 表示向量或矩阵的转置。

## 2 系统描述

由 $K$ 个信源节点、 $W$ 个中继节点和1个目的节点组成的多信源多中继QC-LDPC编码协作系统模型见图1。信源节点 $S_k(k = 1, 2, \dots, K)$ 、中继节点 $R_w(w = 1, 2, \dots, W)$ 及目的节点D均配备单根接收天线,中继节点在半双工方式下工作。利用时分多址(Time Division Multiple Access, TDMA)技术,信源节点 $S_k(k = 1, 2, \dots, K)$ 分别将编码器QC-LDPC- $S_k(k = 1, 2, \dots, K)$ 生成的码字 $\mathbf{c}_k(k = 1, 2, \dots, K)$ 通过广播信道传送至各中继节点 $R_w(w = 1, 2, \dots, W)$ 及目的节点D。首先,中继节点 $R_w(w = 1, 2, \dots, W)$ 对接收到的来自信源节点的 $K$ 路信号译码,恢复出原始的发送码字;然后,将译码恢复的 $K$ 路码字级联,并通过编码器QC-LDPC- $R_w(w = 1, 2, \dots, W)$ 对级联后的码字进行再编码;最后,利用TDMA技术,中继节点 $R_w(w = 1, 2, \dots, W)$ 分别将再编码产生的校验比特 $\mathbf{p}_w(w = 1, 2, \dots, W)$ 发送至目的节点。目的节点D在接收到信源节点和中继节点的 $K+W$ 路信号后,采用联合最小和(Minimum-Sum, MS)迭代译码算法进行译码。



字进行译码。该算法实现了每次迭代过程中外信息的充分交换,加速了译码收敛,能获得更优异的译码性能。

值得注意的是,本文所研究的是理想编码协作系统,即所有中继节点都能正确译码来自信源节点的信息。在非理想情况下,中继节点译码可能存在错误,经过再次编码会存在错误扩散,进而影响目的节点处联合迭代译码性能。针对此问题,可采取两种解决方案:(1)采用自动请求重传技术(Automatic Repeat Request, ARQ),一旦中继节点译码出现错误,就请求相应的信源节点重传数据,直至译码正确。该方案避免了因中继节点译码错误而导致的错误扩散,但降低了系统的传输效率。(2)中继节点丢弃译码错误码字,仅对译码正确码字采用级联,然后对级联的码子进行再编码。例如, $R_1$ 对来自 $S_2$ 的码字 $c_2$ 译码错误,则 $R_1$ 仅对 $c_1, c_3, \dots, c_K$ 级联,即QC-LDPC- $R_1$ 仅对 $s' = [c_1, c_3, \dots, c_K]^T$ 再编码。这时,就目的节点而言,其对应的联合校验矩阵式(8)中的 $B_1$ 用对应大小的零矩阵 $O$ 代替。

下文以双信源双中继编码协作系统为例展开研究,此处给出其联合校验矩阵

$$H_D = \begin{bmatrix} H_1 & O & O & O \\ O & H_2 & O & O \\ A_1 & B_1 & I & O \\ A_2 & B_2 & O & I \end{bmatrix} \quad (9)$$

### 3.3 QC-LDPC码的联合设计

针对上述信源节点和中继节点的编码方式,本文引入一种行重、列重任意可变的规则QC-LDPC码的构造方法——基于最大公约数定理构造QC-LDPC码。其优势在于可构造大围长且码长任意的QC-LDPC码。并基于该构造方法对式(9)所示的系统校验矩阵进行联合设计以消除短环。

#### 3.3.1 基于最大公约数定理构造QC-LDPC码

根据文献[21]可知列重 $d_v = J$ 、行重 $d_c = L$ 的规则QC-LDPC码对应的校验矩阵 $H$ 表示为

$$H = \begin{bmatrix} I(a_0 \cdot 0) & I(a_0 \cdot 1) & \cdots & I(a_0 \cdot (L-1)) \\ I(a_1 \cdot 0) & I(a_1 \cdot 1) & \cdots & I(a_1 \cdot (L-1)) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ I(a_{J-1} \cdot 0) & I(a_{J-1} \cdot 1) & \cdots & I(a_{J-1} \cdot (L-1)) \end{bmatrix} \quad (10)$$

其中, $I(a_j \cdot l)$ ( $j = 0, 1, \dots, J-1$ ;  $l = 0, 1, \dots, L-1$ )是受循环移位值 $a_j \cdot l$ 控制的一个 $B \times B$ 的循环移位矩阵。系数 $a_0, a_1, \dots, a_{J-1}$ 是 $J$ 个整数,且 $0 \leq a_0 < a_1 < \dots < a_{J-1}$ 。

定义矩阵 $H$ 的指数矩阵 $E(H)$ 的元素对应于

$H$ 中的循环移位值,式(10)所示矩阵 $H$ 的指数矩阵 $E(H)$ 如式(11)

$$E(H) = \begin{bmatrix} a_0 \cdot 0 & a_0 \cdot 1 & \cdots & a_0 \cdot (L-1) \\ a_1 \cdot 0 & a_1 \cdot 1 & \cdots & a_1 \cdot (L-1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{J-1} \cdot 0 & a_{J-1} \cdot 1 & \cdots & a_{J-1} \cdot (L-1) \end{bmatrix} \quad (11)$$

下面介绍基于最大公约数定理(GCD)构造矩阵 $H$ 对应指数矩阵的方法。

基于最大公约数定理构造 $E(H)$ :假设 $i, j, k$ 是3个元素( $0 \leq i < j < k \leq J-1$ ),若所有的3元数组 $(a_i, a_j, a_k)$ 都满足GCD约束,即 $(a_k - a_i)/\text{GCD}(a_k - a_i, a_j - a_i) \geq L$ ,那么当循环移位矩阵的大小 $B$ 满足 $B \geq (a_{J-1} - a_0)(L-1) + 1$ 时,所得对应指数矩阵对应的校验矩阵girth $\geq 8$ 。详细证明参见文献[22]。

下面以列重 $J=6$ 为例,简要说明基于最大公约数定理构造 $E(H)$ 。

**例1** 若 $J=6, L$ 任意取值,则有

**情形1** 若 $L$ 是奇数且3不是 $(L-2)$ 的约数(i.e.  $L \pmod{6} = 1$ 或 $3$ ),则满足GCD约束的系数 $\{a_0, a_1, \dots, a_{J-1}\} = \{0, 2, L, L+4, 2L+2, 2L+4\}$ ,循环移位矩阵的大小 $B \geq (2L+4)(L-1) + 1$ ,对应的指数矩阵为

$$E(H) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 2 & 4 & \cdots & 2(L-1) \\ 0 & L & 2L & \cdots & L(L-1) \\ 0 & L+4 & 2(L+4) & \cdots & (L+4)(L-1) \\ 0 & 2L+2 & 2(2L+2) & \cdots & (2L+2)(L-1) \\ 0 & 2L+4 & 2(2L+4) & \cdots & (2L+4)(L-1) \end{bmatrix} \quad (12)$$

**情形2** 若 $L$ 是偶数,3是 $(L-2)$ 的约数且4不是 $(L-1)$ 的约数(i.e.  $L \pmod{12} = 2, 8, 11$ ),则满足GCD约束的系数 $\{a_0, a_1, \dots, a_{J-1}\} = \{0, 1, L, L+3, 2L+2, 2L+3\}$ ,循环移位矩阵的大小 $B \geq (2L+3)(L-1) + 1$ ,对应的指数矩阵为

$$E(H) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 2 & \cdots & (L-1) \\ 0 & L & 2L & \cdots & L(L-1) \\ 0 & L+3 & 2(L+3) & \cdots & (L+3)(L-1) \\ 0 & 2L+2 & 2(2L+2) & \cdots & (2L+2)(L-1) \\ 0 & 2L+3 & 2(2L+3) & \cdots & (2L+3)(L-1) \end{bmatrix} \quad (13)$$

基于上述最大公约数构造 $E(H)$ 的方法, QC-LDPC码校验矩阵构造步骤描述如下:

步骤1 根据最大公约数定理,计算满足GCD

约束的系数 $\{a_0, a_1, \dots, a_{J-1}\}$ 及循环移位矩阵大小 $B$ 的取值;

步骤2 结合行重 $L$ 的实际取值, 根据式(11)构造符合要求的指数阵 $\mathbf{E}(\mathbf{H})$ ;

步骤3 利用相应的循环移位矩阵扩展指数阵 $\mathbf{E}(\mathbf{H})$ , 得到 $\text{girth} \geq 8$ 的校验矩阵 $\mathbf{H}$ 。

由最大公约数定理可知, 该方法构造的QC-LDPC码保证了校验矩阵中不存在 $\text{girth}-4$ ,  $\text{girth}-6$ 环。

### 3.3.2 联合校验矩阵的设计

基于3.3.1的构造方法, 对多信源多中继编码协作系统中信源节点与中继节点采用的QC-LDPC码进行联合设计, 即设计其联合校验矩阵以消除所有 $\text{girth}-4$ ,  $\text{girth}-6$ 环。简便起见, 本文以双信源双中继编码协作系统为例阐述联合设计方法。把式(9)所示的联合校验矩阵分成左右两部分 $\mathbf{H}_{D(r)}$ ,  $\mathbf{H}_{D(l)}$ , 其中

$$\mathbf{H}_{D(r)} = \begin{bmatrix} \mathbf{O} & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{O} \\ \mathbf{I} & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \quad (14a)$$

$$\mathbf{H}_{D(l)} = \begin{bmatrix} \mathbf{H}_1 & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{H}_2 \\ \mathbf{A}_1 & \mathbf{B}_1 \\ \mathbf{A}_2 & \mathbf{B}_2 \end{bmatrix} \quad (14b)$$

显然,  $\mathbf{H}_{D(r)}$ 是下对角结构, 内部不存在任何环, 并且 $\mathbf{H}_{D(r)}$ 与 $\mathbf{H}_{D(l)}$ 之间不存在任何环。 $\mathbf{H}_{D(l)}$ 由校验矩阵 $\mathbf{H}_1$ ,  $\mathbf{H}_2$ 及子矩阵 $\mathbf{A}_1$ ,  $\mathbf{B}_1$ ,  $\mathbf{A}_2$ ,  $\mathbf{B}_2$ 构成, 内部可能存在短环。因此, 在设计校验矩阵 $\mathbf{H}_D$ 时, 若消除了 $\mathbf{H}_{D(l)}$ 内的短环, 则完全消除了 $\mathbf{H}_D$ 内的所有短环。

根据 $\mathbf{H}_{D(l)}$ 的结构, 本文考虑具有如式(15)结构的 $\hat{\mathbf{H}}_{D(l)}$

$$\hat{\mathbf{H}}_{D(l)} = \begin{bmatrix} \mathbf{H}_1 & \mathbf{X}_1 \\ \mathbf{X}_2 & \mathbf{H}_2 \\ \mathbf{A}_1 & \mathbf{B}_1 \\ \mathbf{A}_2 & \mathbf{B}_2 \end{bmatrix} \quad (15)$$

首先, 将 $\hat{\mathbf{H}}_{D(l)}$ 看作单个QC-LDPC码对应的校验矩阵, 根据3.3.1节所述的最大公约数定理构造 $\hat{\mathbf{H}}_{D(l)}$ 的指数阵 $\mathbf{E}(\hat{\mathbf{H}}_{D(l)})$ , 并进一步扩展得到 $\hat{\mathbf{H}}_{D(l)}$ , 该方法保证了 $\hat{\mathbf{H}}_{D(l)}$ 内没有 $\text{girth}-4$ ,  $\text{girth}-6$ 环。然后, 通过掩码技术<sup>[1]</sup>用对应大小的零矩阵替换式(15)中的 $\mathbf{X}_1$ ,  $\mathbf{X}_2$ 即可得到设计所需的式(14b)。最后, 将其与 $\mathbf{H}_{D(r)}$ 拼接即得到联合校验矩阵 $\mathbf{H}_D$ 。通过该方法得到的 $\mathbf{H}_D$ 不包含任何的 $\text{girth}-4$ ,  $\text{girth}-6$ 环。

## 4 系统性能仿真分析

本节通过数值仿真研究基于联合设计QC-LDPC码的多信源多中继编码协作系统的误码率(Bit Error Rate, BER)性能。 $S_k$ -D和 $R_w$ -D信道为相互独立的瑞利块衰落信道, 每个码字时间内信道衰落系数保持不变, 且 $S_k$ -D和 $R_w$ -D信道的平均信噪比相等。仿真中采用二进制相移键控(Binary Phase Shift Keying, BPSK)调制, 目的节点已知信道状态信息, 并采用联合MS迭代译码算法进行译码。

### 4.1 采用联合设计QC-LDPC码的编码协作系统与点对点系统BER比较

研究采用联合设计QC-LDPC码的多信源多中继编码协作系统在瑞利块衰落信道下的BER性能。协作系统采用的联合设计QC-LDPC码及对应点对点系统所采用的等效QC-LDPC码如表1所示。

图2比较了迭代次数为1, 10和20时, 采用联合设计QC-LDPC码的双信源双中继编码协作系统与相应点对点系统的BER性能。结果表明, 在相同迭代次数情况下, 联合设计QC-LDPC码的双信源双中继编码协作系统较点对点系统具有明显的性能增益。例如当迭代次数为20,  $\text{BER}=10^{-3}$ 时, 编码协作系统较点对点系统有约5 dB的增益。该增益是因为来自信源节点和中继节点的4路信号经历了相互独立的衰落信道, 通过高效的联合MS迭代译码算法对这4路信号译码, 能够有效地抵抗衰落, 获得更好的协作分集增益。

### 4.2 采用联合设计QC-LDPC码的编码协作系统在不同节点数目下的BER比较

研究不同信源节点、中继节点数目下采用联合

表1 双信源双中继编码协作及对应点对点系统所采用的QC-LDPC码

|          | 信源节点所采用的QC-LDPC码   | 中继节点所采用的QC-LDPC码   |
|----------|--|--|
| 双信源双中继系统 | $\mathbf{H}_{S_1} = \mathbf{H}_{1(1100 \times 2200)}$<br>$\mathbf{H}_{S_2} = \mathbf{H}_{2(1100 \times 2200)}$<br>Rate=1/2 | $\mathbf{H}_{R_1} = [\mathbf{A}_{1(1100 \times 2200)} \quad \mathbf{B}_{1(1100 \times 2200)} \quad \mathbf{I}_{(1100 \times 1100)}]$<br>$\mathbf{H}_{R_2} = [\mathbf{A}_{2(1100 \times 2200)} \quad \mathbf{B}_{2(1100 \times 2200)} \quad \mathbf{I}_{(1100 \times 1100)}]$<br>Rate=4/5 |
| 点对点系统    | $\mathbf{H}_S = \mathbf{H}_{(2200 \times 6600)}$<br>Rate=1/3   | \  |

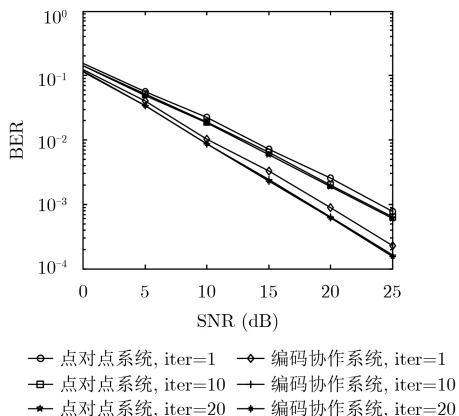


图2 采用联合设计QC-LDPC码的编码协作系统与点对点系统的BER比较

设计QC-LDPC码的编码协作系统的BER性能, 包括双信源双中继、双信源单中继、单信源双中继3种情形。各信源节点及中继节点所采用的QC-LDPC码见表2。

图3比较了迭代次数为10时, 采用联合设计QC-LDPC码的双信源双中继、双信源单中继、单信源双中继编码协作系统的BER性能。可以看出, 在信源节点数目相同的情况下, 编码协作系统的BER性能随中继节点的增加而提升。如在BER=10<sup>-3</sup>时, 双信源双中继编码协作系统较双信源单中继编码协作系统有2 dB的增益。这主要由于来自信源节点的两路信号经过两个中继节点的二度编码传输, 有效地抵抗了信道的衰落, 获得了更多的协作分集增益; 同时, 对目的节点D而言, 随着中继节点数目的增加, 接收到的校验比特增多, 系统能够

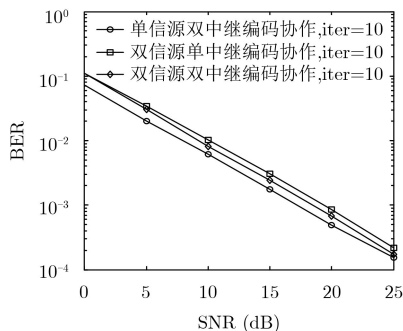


图3 编码协作系统在不同信源节点和中继节点数目下的BER比较

获得更多的编码增益。而在中继节点数目相同的情况下, 编码协作系统的BER性能随着信源节点的增加而降低。这是因为中继节点所需协助的信息比特随信源节点数目的增加而增加, 导致整个协作系统的等效码率变大, 系统所能获得的编码增益降低。

### 4.3 采用联合设计QC-LDPC码与一般构造QC-LDPC码的编码协作系统BER比较

研究采用联合设计QC-LDPC码与一般构造QC-LDPC码(未消环)对于两信源两中继编码协作系统BER性能的影响。采用的联合设计QC-LDPC码见表1, 为同等比较, 对目的节点而言, 一般构造QC-LDPC码与联合设计QC-LDPC码具有相同的等效码率和码长, 其各节点所采用的QC-LDPC码如表3所示。

图4比较了迭代次数分别为1, 10时, 采用一般构造QC-LDPC码和联合设计QC-LDPC码的双信源双中继编码协作系统的BER性能。可以看出, 采用联合设计QC-LDPC码的协作系统的BER性能明

表2 不同信源节点、中继节点数目情况下编码协作系统所采用的QC-LDPC码

|        | 信源节点所采用的QC-LDPC码   | 中继节点所采用的QC-LDPC码   |
|--------|--|--|
| 双信源双中继 | $H_{S_1} = H_{1(1100 \times 2200)}$<br>$H_{S_2} = H_{2(1100 \times 2200)}$<br>Rate=1/2 | $H_{R_1} = [ A_{1(1100 \times 2200)} \quad B_{1(1100 \times 2200)} \quad I_{(1100 \times 1100)} ]$<br>$H_{R_2} = [ A_{2(1100 \times 2200)} \quad B_{2(1100 \times 2200)} \quad I_{(1100 \times 1100)} ]$<br>Rate=4/5 |
| 双信源单中继 | $H_{S_1} = H_{1(1100 \times 2200)}$<br>$H_{S_2} = H_{2(1100 \times 2200)}$<br>Rate=1/2 | $H_R = [ A_{(1100 \times 2200)} \quad B_{(1100 \times 2200)} \quad I_{(1100 \times 1100)} ]$<br>Rate=4/5   |
| 单信源双中继 | $H_S = H_{1(1100 \times 2200)}$<br>Rate=1/2  | $H_{R_1} = [ A_{1(1100 \times 2200)} \quad I_{(1100 \times 1100)} ]$<br>$H_{R_2} = [ A_{2(1100 \times 2200)} \quad I_{(1100 \times 1100)} ]$<br>Rate=2/3   |

表3 采用一般构造QC-LDPC码的协作系统各节点所采用的码字

|        | 信源节点所采用的QC-LDPC码              | 中继节点所采用的QC-LDPC码               |
|--------|-------------------------------|--------------------------------|
| 双信源双中继 | $d_v = 2, d_c = 4$<br>$B=550$ | $d_v = 2, d_c = 10$<br>$B=550$ |

注:  $d_v$ 指每列“1”的个数,  $d_c$ 指每行“1”的个数

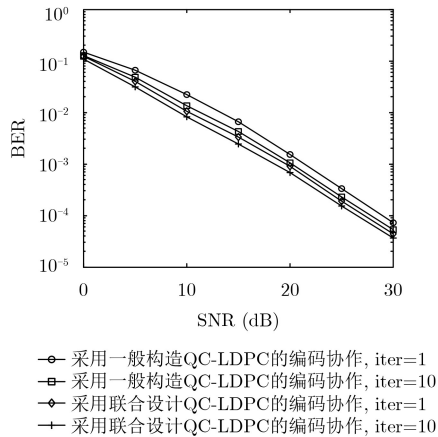


图 4 采用联合设计QC-LDPC码与一般构造QC-LDPC码的编码协作系统BER比较

显优于一般构造QC-LDPC码。如在迭代次数为10、BER=10<sup>-3</sup>时，采用联合设计QC-LDPC码的协作系统有约2 dB的增益。这是因为联合设计的QC-LDPC码中没有任何girth-4环、girth-6环存在，使得联合译码迭代过程中各变量节点、校验节点输入的信息与它上次迭代输出的信息相关性降低，系统能获得更高的编码增益。由此可以看出，联合设计的QC-LDPC码在多信源多中继编码协作系统中具有显著的优势。

#### 4.4 采用联合设计QC-LDPC码与显式构造QC-LDPC码的编码协作系统BER比较

将本文所提QC-LDPC码的联合设计方案与文献[23]所述QC-LDPC码的显式构造方法相比，分

析比较不同构造算法对于双信源双中继编码协作系统BER性能的影响。对采用联合设计QC-LDPC码的协作系统而言，各节点所采用的QC-LDPC码见表1。因显式构造方法限制，为保证目的节点处码长近似相等，将其循环移位子块大小B取为730，得到各节点所采用的码字如表4所示。

图5比较了迭代次数分别为1, 10时，采用联合设计QC-LDPC码和显式构造QC-LDPC码的双信源双中继编码协作系统的BER性能。可以看出，采用联合设计QC-LDPC码的双信源双中继编码协作系统的BER性能明显优于采用显式构造QC-LDPC码的系统。如在迭代次数为10, BER=10<sup>-4</sup>时，采用联合设计QC-LDPC码的系统有约0.5 dB的性能增益。这是因为相较于采用显式构造算法得到的QC-LDPC码，经过联合设计的QC-LDPC码不仅消除了各节点编码所用校验矩阵内部的girth-4环、girth-6环，还消除了各矩阵之间的短环，保证了目的节点处译码所用的联合校验矩阵girth>6，充分提升了系统的编码增益。

#### 4.5 采用联合设计QC-LDPC码的编码协作系统在不同调制方式和不同接收天线数目下的BER比较

针对表1描述系统，图6比较了迭代次数为10时，不同调制方式和天线数目下编码协作系统的BER性能。结果表明，在相同天线数目情况下，采用BPSK调制的编码协作系统性能明显优于采用正交相移键控(Quadrature Phase Shift Keying, QPSK)

表 4 采用显式构造QC-LDPC码的协作系统所采用的码字

|        | 信源节点所采用的QC-LDPC码              | 中继节点所采用的QC-LDPC码              |
|--------|-------------------------------|-------------------------------|
| 双信源双中继 | $d_v = 2, d_c = 3$<br>$B=730$ | $d_v = 2, d_c = 8$<br>$B=730$ |

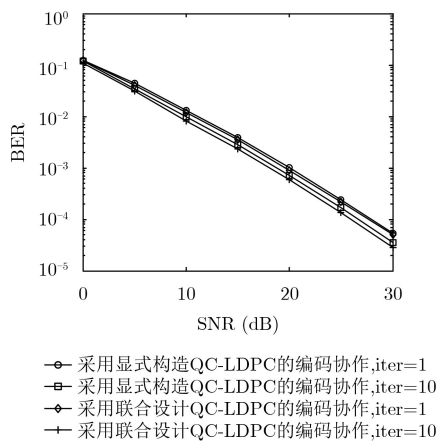


图 5 采用联合设计QC-LDPC码与显式构造QC-LDPC码的编码协作系统BER比较

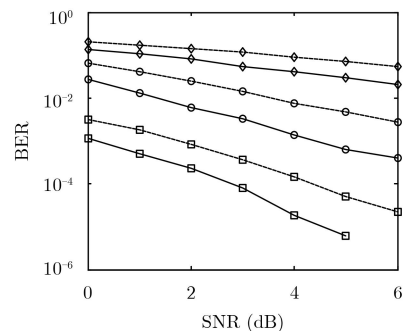


图 6 编码协作系统在不同调制方式和不同接收天线数目情况下的BER比较

调制的系统。如在接收天线数目 $Ant=2$ ,  $BER=10^{-2}$ 时, 采用BPSK调制的编码协作系统较采用QPSK调制的编码协作系统有约2 dB的增益。这是由于QPSK调制以牺牲传输可靠性为代价换取了传输效率的提升。

图6同时比较了接收天线数目 $Ant=1, 2, 3$ 时编码协作系统的BER性能。可以看出, 随着接收天线数目的增加, 不管系统采用的调制方式是BPSK还是QPSK, 采用联合设计QC-LDPC码的编码协作系统的BER性能得到非常明显提升。如要达到 $BER=10^{-3}$ , 采用BPSK调制并在目的节点配置 $Ant=2, 3$ 根接收天线的系统需要的SNR分别为4.5 dB和0.2 dB。这是因为目的节点配置的接收天线数目越多, 采用联合设计QC-LDPC码的编码协作系统就能够获得越多的空间分集增益。

## 5 结论

本文研究了一种采用联合设计QC-LDPC码的多信源多中继编码协作系统, 它结合了信道编码技术和协作技术, 可以同时获得编码增益和协作分集增益。本文提出了一种基于生成矩阵的准循环QC-LDPC码, 并基于最大公约数定理联合设计信源节点和中继节点的QC-LDPC码, 以消除联合校验矩阵中所有可能存在的girth-4, girth-6环。仿真结果表明, 在同等条件下, 采用联合设计QC-LDPC码的多信源多中继编码协作系统的BER性能优于采用一般构造QC-LDPC或显式构造QC-LDPC的编码协作系统及相应的点对点系统。仿真结果还表明, 随着目的节点接收天线数目的增加, 编码协作系统性能得到明显提升。

## 参考文献

- [1] RYAN W E and LIN Shu. Channel Codes: Classical and Modern[M]. Cambridge: Cambridge University Press, 2009: 201–254.
- [2] DEGHAN A and BANIHASHEMI A H. On the Tanner graph cycle distribution of random LDPC, random protograph-based LDPC, and random quasi-cyclic LDPC code ensembles[J]. *IEEE Transactions on Information Theory*, 2018, 64(6): 4438–4451. doi: [10.1109/TIT.2018.2805906](https://doi.org/10.1109/TIT.2018.2805906).
- [3] 贺文武, 夏巧桥, 邹炼. 基于变量节点更新的交替方向乘法LDPC惩罚译码算法[J]. *电子与信息学报*, 2018, 40(1): 95–101. doi: [10.11999/JEIT170358](https://doi.org/10.11999/JEIT170358).  
HE Wenwu, XIA Qiaoqiao, and ZOU Lian. Alternating direction method of multipliers LDPC penalized decoding algorithm based on variable node update[J]. *Journal of Electronics & Information Technology*, 2018, 40(1): 95–101. doi: [10.11999/JEIT170358](https://doi.org/10.11999/JEIT170358).
- [4] LIU Yuanhua, NIU Xinliang, WANG Xinmei, et al. Design of quasi-cyclic LDPC codes based on Euclidean geometries[J]. *Journal of Electronics(China)*, 2010, 27(3): 340–344. doi: [10.1007/s11767-010-0348-0](https://doi.org/10.1007/s11767-010-0348-0).
- [5] KARIMI M and BANIHASHEMI A H. Counting short cycles of quasi cyclic protograph LDPC codes[J]. *IEEE Communications Letters*, 2012, 16(3): 400–403. doi: [10.1109/lcomm.2012.020212.112311](https://doi.org/10.1109/lcomm.2012.020212.112311).
- [6] JIANG Xueqin and LEE M H. Large girth quasi-cyclic LDPC codes based on the Chinese remainder theorem[J]. *IEEE Communications Letters*, 2009, 13(5): 342–344. doi: [10.1109/lcomm.2009.082115](https://doi.org/10.1109/lcomm.2009.082115).
- [7] 袁建国, 梁梦琪, 尚晓娟. 基于Fibonacci数列对QC-LDPC码的一种新颖构造方法[J]. *激光杂志*, 2016, 37(6): 37–40. doi: [10.14016/j.cnki.jgzz.2016.06.037](https://doi.org/10.14016/j.cnki.jgzz.2016.06.037).  
YUAN Jianguo, LIANG Mengqi, and SHANG Xiaojuan. A novel construction method of QC-LDPC codes based on Fibonacci sequence[J]. *Laser Journal*, 2016, 37(6): 37–40. doi: [10.14016/j.cnki.jgzz.2016.06.037](https://doi.org/10.14016/j.cnki.jgzz.2016.06.037).
- [8] ESMAEILI M and GHOLAMI M. Maximum-girth slope-based quasi-cyclic (2,  $k \geq 5$ ) low-density parity-check codes[J]. *IET Communications*, 2008, 2(10): 1251–1262. doi: [10.1049/iet-com:20080013](https://doi.org/10.1049/iet-com:20080013).
- [9] VAN NGUYEN B, JUNG H, and KIM K. Physical layer security schemes for full-duplex cooperative systems: State of the art and beyond[J]. *IEEE Communications Magazine*, 2018, 56(11): 131–137. doi: [10.1109/MCOM.2017.1700588](https://doi.org/10.1109/MCOM.2017.1700588).
- [10] BANNOUR A, SACCHI C, and SUN Yichuang. MIMO-OFDM based energy harvesting cooperative communications using coalitional game algorithm[J]. *IEEE Transactions on Vehicular Technology*, 2017, 66(12): 11166–11179. doi: [10.1109/TVT.2017.2768622](https://doi.org/10.1109/TVT.2017.2768622).
- [11] WANG Jiuling, YU Quan, LI Zan, et al. Distributed space time block transmission and QRD based diversity detector in asynchronous cooperative communications systems[J]. *IEEE Transactions on Vehicular Technology*, 2018, 67(6): 5111–5125. doi: [10.1109/TVT.2018.2812901](https://doi.org/10.1109/TVT.2018.2812901).
- [12] ZHANG Shunwai, YANG Fengfan, and SONG Rongfang. Energy-harvesting-based RA-coded cooperative MIMO: Codes design and performance analysis[J]. *Digital Signal Processing*, 2017, 60(2): 56–62. doi: [10.1016/j.dsp.2016.08.013](https://doi.org/10.1016/j.dsp.2016.08.013).
- [13] MUGHAL S, YANG Fengfan, and UMAR R. Reed-Muller network coded-cooperation with joint decoding[J]. *IEEE Communications Letters*, 2019, 23(1): 24–27. doi: [10.1109/LCOMM.2018.2879101](https://doi.org/10.1109/LCOMM.2018.2879101).
- [14] 陈紫强, 欧阳缙, 肖海林. 解码前传半双工中继信道下协作LDPC码设计[J]. *电子与信息学报*, 2011, 33(11): 2610–2615. doi: [10.3724/SP.J.1146.2011.00323](https://doi.org/10.3724/SP.J.1146.2011.00323).

- CHEN Ziqiang, OUYANG Shan, and XIAO Hailin. Cooperative LDPC codes design for decode-and-forward half-duplex relay channels[J]. *Journal of Electronics & Information Technology*, 2011, 33(11): 2610–2615. doi: [10.3724/SP.J.1146.2011.00323](https://doi.org/10.3724/SP.J.1146.2011.00323).
- [15] JANANI M, HEDAYAT A, HUNTER T E, *et al.* Coded cooperation in wireless communications: Space-time transmission and iterative decoding[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2004, 52(2): 362–371. doi: [10.1109/TSP.2003.821100](https://doi.org/10.1109/TSP.2003.821100).
- [16] LI Zongyan, PENG Mugen, WU Zhanji, *et al.* Network coding scheme based on LDPC product codes in multiple-access relay system[C]. 2011 IEEE International Conference on Communications Workshops, Kyoto, Japan, 2011: 1–4. doi: [10.1109/iccw.2011.5963597](https://doi.org/10.1109/iccw.2011.5963597).
- [17] ZHANG Shunwai, YANG Fengfan, TANG Lei, *et al.* Joint design of QC-LDPC codes for coded cooperation system with joint iterative decoding[J]. *International Journal of Electronics*, 2016, 103(3): 384–405. doi: [10.1080/00207217.2015.1036374](https://doi.org/10.1080/00207217.2015.1036374).
- [18] DU Bing and ZHANG Jun. Parity check network coding for wireless cooperative communications[J]. *Chinese Journal of Electronics*, 2010, 19(2): 339–344.
- [19] 张顺外. LDPC编码协作系统性能与码的设计研究[D]. [博士学位论文], 南京航空航天大学, 2013.  
ZHANG Shunwai. LDPC-coded cooperation: Performance studies and codes design[D]. [Ph.D. dissertation], Nanjing University of Aeronautics and Astronautics, 2013.
- [20] ZHANG Shunwai, YANG Fengfan, and TANG Lei. Network-coding-based multisource multirelay LDPC-coded cooperative MIMO[J]. *Transactions on Emerging Telecommunications Technologies*, 2015, 26(3): 491–502. doi: [10.1002/ett.2659](https://doi.org/10.1002/ett.2659).
- [21] ZHANG Guohua, SUN Rong, and WANG Xinmei. Construction of girth-eight QC-LDPC codes from greatest common divisor[J]. *IEEE Communications Letters*, 2013, 17(2): 369–372. doi: [10.1109/LCOMM.2012.122012.122292](https://doi.org/10.1109/LCOMM.2012.122012.122292).
- [22] ZHANG Jianhua and ZHANG Guohua. Deterministic girth-eight QC-LDPC codes with large column weight[J]. *IEEE Communications Letters*, 2014, 18(4): 656–659. doi: [10.1109/lcomm.2014.030114.132853](https://doi.org/10.1109/lcomm.2014.030114.132853).
- [23] 张国华, 陈超, 杨洋, 等. Girth-8 (3,L)-规则QC-LDPC码的一种确定性构造方法[J]. *电子与信息学报*, 2010, 32(5): 1152–1156. doi: [10.3724/SP.J.1146.2009.00838](https://doi.org/10.3724/SP.J.1146.2009.00838).  
ZHANG Guohua, CHEN Chao, YANG Yang, *et al.* Girth-8 (3,L)-regular QC-LDPC codes based on novel deterministic design technique[J]. *Journal of Electronics & Information Technology*, 2010, 32(5): 1152–1156. doi: [10.3724/SP.J.1146.2009.00838](https://doi.org/10.3724/SP.J.1146.2009.00838).
- 张顺外: 男, 1987年生, 博士, 副教授, 硕士生导师, 研究方向为编码协作网络.  
魏 琪: 男, 1993年生, 硕士生, 研究方向为QC-LDPC码及协作通信技术.