第 32 卷第 6 期　　　电 子 与 信 息 学 报　　　Vol.32No.6
2010 年 6 月　　　Journal of Electronics & Information Technology　　　Jun. 2010

一种优化的高精度灰色 GM(1,1)预测模型

尚军亮　　方　敏
(西安电子科技大学计算机学院　西安　710071)

摘　要：针对灰色 GM(1,1)模型的建模方法存在偏差，模型不满足协调性条件，不具有变换一致性，且通过累加生成建模时，$x^{(0)}(1)$ 没有起到高精度控制预测等问题。该文从重构 GM(1,1)白化背景值出发，利用白化背景值的加权向前差商和向后差商平均值优化模型灰导数，根据新信息对认知的作用大于旧信息的原理，以 $x^{(1)}(n)$ 替换 $x^{(0)}(1)$ 作为模型的初始条件，对 GM(1,1)预测模型进行了改进，从而使所建模型的预测精度大为提高，尤其是发展系数大于 2 时，新模型的拟合精度仍然很高。通过实例对比验证了新模型无论在低增长指数序列还是在高增长指数序列都有非常高的实用性和可靠性。

关键词：灰色系统理论；GM(1,1)模型；背景值；灰导数；初始条件
中图分类号：TP391; N941.5　　　**文献标识码**：A　　　**文章编号**：1009-5896(2010)06-1301-05
DOI: 10.3724/SP.J.1146.2009.00792

New Optimized Method of High-Precision Grey GM(1,1) Forecasting Model

Shang Jun-liang　　Fang Min
(*School of Computer Science* & *Technology*, *Xidian University*, *Xi'an* 710071, *China*)

Abstract: There are some problems in GM(1,1) model, such as, model method biased, compatibility condition not satisfied, transformation inconsistent and first number of the initial sequence not functioning high precision prediction in model after an accumulated generating operation. This paper deals with the GM(1,1) model improvement in reconstructing the GM(1,1) white background value, using white Background value weighted average of forward (backword) difference quotient as the new optimized model's grey derivative, regarding the value of $x^{(1)}(n)$ replacement of $x^{(0)}(1)$ as the model's initial condition. The new model improves the accuracy of the precision greatly. Even if the development coefficient is bigger than 2, the fitting precision of the new model is still high. The analysis of some examples indicates that the new optimized method using whether in low growth index series or in high growth index series has a very high practicability and reliability.

Key words: Gery system theory; GM(1,1) model; Background value; Grey deriveative; Initial condition

1　引言

灰色系统理论是研究少数据不确定性的理论[1]，从邓聚龙教授 1982 年提出以来，作为其理论重要内容之一的 GM(1,1)模型[2]，在经济、管理和工程方面得到了广泛的应用[3−6]。它的特点是建模过程简单，使用样本少，预测公式简单，易于求解。但是它也存在着很多缺陷，如当发展系数 α 的绝对值较大时，模型偏差较大，无法用于中长期预测，甚至不能做短期预测。因此，近年来不少学者提出了对 GM 模型的改进[7−9]，这些改进大致可分为几类：(1)改进模型参数估计方法；(2)对白化背景值改进；(3)对初始条件改进。其中，Luo[10]等提出了对背景值改进的方法，将原背景值 $z^{(1)}(k)=(1/2)\cdot[x^{(1)}(k)+x^{(1)}(k-1)]$ 优化为 $z^{(1)}(k)=(x^{(1)}(k)-x^{(1)}(k-1))/(\ln x^{(1)}(k)-\ln x^{(1)}(k-1))$；Li[11]等对 Wang[12,13]等提出的优化灰导数提高精度的方法进行了严格的数学证明，Dang[14]等以 $x^{(1)}(n)$ 替换 $x^{(0)}(1)$ 为初始条件对模型做了改进。文献[10]虽然提高了建模的精度，但是在发展系数的绝对值较大时，误差也较大。本文认为，文献[10−14]中的模型有共同不足：单纯的对模型某一部分进行改进，而事实上，模型背景值，灰度值及初始条件是相互作用影响精度的。因此，本文从文献[10]背景值优化入手，利用白化背景值加权向前差商和向后差商平均值作为灰度值及改变模型初始条件增加新信息优先权等方式对模型做了优化改进，实验表明新模型适用于各种发展系数的情形，而且模型预测精度大为提高。

2　灰色预测 GM(1,1)模型

设有原始数据 $X^{(0)}=\{x^{(0)}(1),x^{(0)}(2),\cdots,x^{(0)}(n)\}$，$x^{(0)}(i)>0\quad i=1,2,\cdots,n$，对给定原始数据列计算级比 $\sigma(k)=x^{(0)}(k-1)/x^{(0)}(k)$，$k=2,3,\cdots,$

2009-05-22 收到，2009-12-01 改回
西安市科技创新计划(YF07012)和陕西省工业攻关计划(2008K04-14)资助课题
通信作者：尚军亮　shangjunliang110@163.com

n，检验级比 $\sigma(k)$ 是否落于可容覆盖中 $\left(e^{-\frac{2}{n+2}}, e^{\frac{2}{n+2}}\right)$。当级比均落于可容覆盖，则该序列可作为 GM(1,1)建模数据且能进行数据灰色预测。对于级比检验不合格的序列，必须做数据预处理，使其变换后的序列级比落于可容覆盖中。$X^{(0)}$ 的 1-AGO 序列为 $X^{(1)}=\{x^{(1)}(1),x^{(1)}(2),\cdots,x^{(1)}(n)\}$，式 $x^{(1)}(k)=\sum_{i=1}^{k}x^{(0)}(i)$，$k=1,2,\cdots,n$。$X^{(1)}$ 的紧邻均值生成序列 $Z^{(1)}=\{z^{(1)}(2),z^{(1)}(3),\cdots,z^{(1)}(n)\}$，式中 $z^{(1)}(k)=[x^{(k)}+x^{(1)}(k-1)]/2$，$k=2,3,\cdots,n$。

GM(1,1)模型 $x^{(0)}+az^{(1)}=b$ 对应的白化微分方程为

$$\frac{dx^{(1)}}{dt}+ax^{(1)}=b \tag{1}$$

记式(1)中 a,b 为参数向量 $\boldsymbol{\partial}$ 的元素，即 $\boldsymbol{\partial}=[a,b]^{\mathrm{T}}$。构造累加矩阵 $\boldsymbol{B}$ 与常数项向量 $\boldsymbol{Y_n}$ 即

$$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}-z^{(1)}(2) & -z^{(1)}(3) & \cdots & -z^{(1)}(n)\\ 1 & 1 & \cdots & 1\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{Y_n}=[x^{(0)}(2)\ \ x^{(0)}(3)\ \ \cdots\ \ x^{(0)}(n)]^{\mathrm{T}}$$

，则 $\boldsymbol{Y_n}=\boldsymbol{B}\partial$。模型白化方程时间响应函数为

$$\hat{x}^{(1)}(k)=\left(x^{(0)}(1)-\frac{b}{a}\right)e^{-a(k-1)}+\frac{b}{a},\quad k=2,3,\cdots,n \tag{2}$$

对式(2)求导还原得到

$$\hat{x}^{(0)}(k)=-a\left(x^{(0)}(1)-\frac{b}{a}\right)e^{-a(k-1)},\quad k=2,3,\cdots,n \tag{3}$$

当检验达到标准后，可用 GM(1,1)模型进行预测。

$\hat{X}^{(0)}=\{\hat{x}^{(0)}(1),\hat{x}^{(0)}(2),\cdots,\hat{x}^{(0)}(n),\hat{x}^{(0)}(n+1),\cdots,\hat{x}^{(0)}(n+m)\}$，式中，$n$ 为已知数据个数，m 为预测步数。

3 GM(1,1)模型改进

GM(1,1)模型的建模方法存在着偏差，模型不满足协调性条件，背景值及灰度值不具有变换一致性，通过累计生成建模时，原始序列第 1 点没有起到加强精度预测作用等问题，而文献[10]中改进的模型，虽然提高了建模的精度，但是在发展系数的绝对值较大时，模型的误差较大。究其原因，是由于背景值并没有与模型灰度值协调一致，文章优化了背景值，而未优化灰度值，造成了预测误差。本文利用文献[10]中提到的优化方法，将背景值优化为 $z^{(1)}(k)=(x^{(1)}(k)-x^{(1)}(k-1))/(\ln x^{(1)}(k)-\ln x^{(1)}(k-1))$，其中 $x^{(1)}(k)=x^{(1)}(k-1)$ 时，$z^{(1)}(k)=x^{(1)}(k-1)$，$k=2,3,\cdots,n$，根据白化方程式(1)可得式(4)：

$$\left.\frac{dz^{(1)}}{dt}\right|_{t=k}=\frac{C\cdot A-x^{(0)}(k)\cdot\left[\dfrac{B(k)}{x^{(1)}(k)}-\dfrac{B(k-1)}{x^{(1)}(k-1)}\right]}{A^2} \tag{4}$$

其中 $A=\ln x^{(1)}(k)-\ln x^{(1)}(k-1)$，$B(k)=\left.\frac{dx^{(1)}}{dt}\right|_{t=k}$，$C=B(k)-B(k-1)$。

假设 $X^{(1)}=\{x^{(1)}(1),x^{(1)}(2),\cdots,x^{(1)}(n)\}$ 是某条指数曲线 $y=x^{(1)}(t)$ 的离散点列，由拉格朗日中值定理知，存在一点 $\delta\in(k-1,k)$，使得 $\frac{x^{(1)}(k)-x^{(1)}(k-1)}{k-(k-1)}=\left.\frac{dx^{(1)}}{dt}\right|_{t=\delta}$，因此在指数曲线 $x^{(1)}(t)$ 上不妨取 3 点 $(k-1,x^{(1)}(k-1))$，$(k,x^{(1)}(k))$，$(k+1,x^{(1)}(k+1))$，则当 $X^{(1)}$ 为凹时，

$$\left.\frac{dx^{(1)}}{dt}\right|_{t=k}=\lambda\left[x^{(1)}(k)-x^{(1)}(k-1)\right]+(1-\lambda)\cdot\left[x^{(1)}(k+1)-x^{(1)}(k)\right] \tag{5}$$

当 $X^{(1)}$ 为凸时，

$$\left.\frac{dx^{(1)}}{dt}\right|_{t=k}=(1-\lambda)\left[x^{(1)}(k)-x^{(1)}(k-1)\right]+\lambda\left[x^{(1)}(k+1)-x^{(1)}(k)\right],\ k=2,3,\cdots,n-1 \tag{6}$$

定理 1 若 $x^{(1)}(t)$ 满足微分方程式(1)，即 $x^{(1)}(k)=ce^{-ak}+b/a$，当 $x^{(1)}(k)$ 是凹的，则存在 $\lambda=\frac{-ae^a+e^a-1}{2e^a-e^{2a}-1}$，当 $x^{(1)}(k)$ 是凸的，则存在 $\lambda=\frac{(a-e^a+1)\cdot e^a}{2e^a-e^{2a}-1}$，使得

$$\lambda\left[x^{(1)}(k)-x^{(1)}(k-1)\right]+(1-\lambda)\left[x^{(1)}(k+1)-x^{(1)}(k)\right]+ax^{(1)}(k)=b,\quad k=2,3,\cdots,n-1$$

由式(4)-式(6)及定理 1 可求得 $\left.\frac{dz^{(1)}(k)}{dt}\right|_{t=k}$，改进的 GM(1,1) 模型相应的微分方程为 $\frac{dz^{(1)}}{dt}+az^{(1)}=b$。对应的累加矩阵 $\boldsymbol{B}$ 与常数项向量 $\boldsymbol{Y_n}$ 为

$$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}-z^{(1)}(3) & -z^{(1)}(4) & \cdots & -z^{(1)}(n-1)\\ 1 & 1 & \cdots & 1\end{bmatrix}^{\mathrm{T}},$$

$$\boldsymbol{Y}_n=\begin{bmatrix}\left.\dfrac{dz^{(1)}}{dt}\right|_{t=3} & \left.\dfrac{dz^{(1)}}{dt}\right|_{t=4} & \cdots & \left.\dfrac{dz^{(1)}}{dt}\right|_{t=n-1}\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$$

文献[1]和文献[10]模型有一个共同的局限性：认为拟合曲线经过历史数据中的某一点，并将历史数据中的第 1 个数据作为初始条件，事实上根据灰色系统理论的新信息优先原理(该原理认为新信息对认知的作用大于旧信息)，因此在GM(1,1)建模时，

赋予新信息较大的权重可以提高灰色建模的功效。越新的数据对预测值的影响越大，本文通过将 $x^{(1)}(n)$ 作为灰色微分模型的初始条件。由式(3)得

$$x^{(0)}(n)=e^{-(n-1)a}\cdot x^{(0)}(1) \tag{7}$$

由式(3)，式(7)可以得到本文改进 GM(1,1) 预测模型的时间相应函数为

$$\hat{x}^{(1)}(k)=\left[x^{(1)}(n)-\frac{b}{a}\right]\cdot e^{-a(k-n)}+\frac{b}{a}\ ,\ k=1,2,\cdots,n$$

$$\hat{x}^{(0)}(k)=\hat{x}^{(1)}(k)-\hat{x}^{(1)}(k-1),\ k=2,3,\cdots,n$$

且 $\hat{x}^{(0)}(1)=\hat{x}^{(1)}(1)$

4　应用实例及结论

4.1　模拟数据建模比较

为了同其他改进算法进行比较，本文取文献[10]中实例 $x^{(0)}(k+1)=e^{-ak}$，发展系数 $-a=0.5$，1.0，1.5，2.0 进行模拟分析。为叙述方便起见，记文献[2]中的模型为 $\mathrm{GM}(1,1)^1$，文献[10]中优化了白化背景值的 GM(1,1) 的模型为 $\mathrm{GM}(1,1)^2$，记本文中新 GM(1,1) 模型为 $\mathrm{GM}(1,1)^3$。取 $k=1,2,\cdots,7$，可得 $X_i^{(0)}=\{x_i^{(0)}(1),x_i^{(0)}(2),\cdots,x_i^{(0)}(8)\}$ 的原始序列值，见表 1。模型检验是在 $k=2-n$ 之间计算 $\hat{x}^{(0)}(k)$ 与 $x^{(0)}(k)$ 的残差 $e^{(0)}(k)$，相对残差 $q(k)$ 及精度 p。一般要求 $q(k)<20\%$，$p>80\%$，最好 $q(k)<10\%$，$p>90\%$[2]。其公式为：$e^{(0)}(k)=x^{(0)}(k)-\hat{x}^{(0)}(k)$，$q(k)=|e^{(0)}(k)/x^{(0)}(k)|$，$p=1-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}q(i)$。3 类模型的模拟值预测结果及相对残差比较图见表 2，平均残差及预测精度比较见表 3。

表 1　原始序列值

$-a$	i	$x_i^{(0)}(1)$	$x_i^{(0)}(2)$	$x_i^{(0)}(3)$	$x_i^{(0)}(4)$	$x_i^{(0)}(5)$	$x_i^{(0)}(6)$	$x_i^{(0)}(7)$	$x_i^{(0)}(8)$
0.5	1	1.0000	1.6487	2.7183	4.4817	7.3891	12.182	20.086	33.115
1.0	2	1.0000	2.7183	7.3891	20.086	54.598	148.41	403.43	1096.6
1.5	3	1.0000	4.4817	20.086	90.017	403.43	1808.0	8103.1	36316
2.0	4	1.0000	7.3891	54.598	403.43	2981.0	22026	162755	1202604

表 2　3 类模型模拟值及相对残差比较

$-a$	模型		$x_i^{(0)}(1)$	$x_i^{(0)}(2)$	$x_i^{(0)}(3)$	$x_i^{(0)}(4)$	$x_i^{(0)}(5)$	$x_i^{(0)}(6)$	$x_i^{(0)}(7)$	$x_i^{(0)}(8)$
0.5	$\mathrm{GM}(1,1)^1$	模拟值	1.0000	1.6064	2.6216	4.2787	6.9830	11.397	18.600	30.356
		相对残差(%)	0.0000	2.5698	3.5549	4.5301	5.4954	6.4509	7.3968	8.3332
	$\mathrm{GM}(1,1)^2$	模拟值	1.0000	1.6792	2.7680	4.5631	7.5221	12.400	20.441	33.696
		相对残差(%)	0.0000	1.8460	1.8308	1.8155	1.8003	1.7851	1.7698	1.7546
	$\mathrm{GM}(1,1)^3$	模拟值	0.9498	1.6524	2.7234	4.4886	7.3979	12.193	20.096	33.121
		相对残差(%)	5.0203	0.2226	0.1881	0.1537	0.1192	0.0848	0.0504	0.0160
1.0	$\mathrm{GM}(1,1)^1$	模拟值	1.0000	2.4045	6.0592	15.269	38.476	96.958	244.33	615.69
		相对残差(%)	0.0000	11.543	17.998	23.981	29.528	34.670	39.437	43.856
	$\mathrm{GM}(1,1)^2$	模拟值	1.0000	1.6792	2.7680	4.5631	7.5221	12.400	20.441	33.696
		相对残差(%)	0.0000	1.8460	1.8308	1.8155	1.8003	1.7851	1.7698	1.7546
	$\mathrm{GM}(1,1)^3$	模拟值	0.9450	2.7186	7.3898	20.087	54.602	148.42	403.44	1096.7
		相对残差(%)	5.4959	0.0114	0.0099	0.0083	0.0068	0.0053	0.0038	0.0023
1.5	$\mathrm{GM}(1,1)^1$	模拟值	1.0000	3.2977	11.746	41.839	149.03	530.82	1890.7	6734.7
		相对残差(%)	0.0000	26.418	41.519	53.521	63.060	70.641	76.666	81.455
	$\mathrm{GM}(1,1)^2$	模拟值	1.0000	4.6906	21.022	94.213	422.23	1892.3	8480.8	38008
		相对残差(%)	0.0000	4.6613	4.6613	4.6612	4.6612	4.6612	4.6612	4.6612
	$\mathrm{GM}(1,1)^3$	模拟值	0.9407	4.4817	20.086	90.017	403.43	1808.0	8103.1	36316
		相对残差(%)	5.9296	0.0004	0.0003	0.0003	0.0002	0.0002	0.0002	0.0001
2.0	$\mathrm{GM}(1,1)^1$	模拟值	1.0000	4.1482	19.027	87.274	400.31	1836.2	8422.2	38631
		相对残差(%)	0.0000	43.860	65.150	78.367	86.571	91.664	94.825	96.788
	$\mathrm{GM}(1,1)^2$	模拟值	1.0000	7.7757	57.455	424.54	3136.9	23179	171271	1265532
		相对残差(%)	0.0000	5.2327	5.2327	5.2327	5.2327	5.2327	5.2327	5.2327
	$\mathrm{GM}(1,1)^3$	模拟值	0.9400	7.3891	54.598	403.43	2981.0	22026	162755	1202604
		相对残差(%)	5.9989	9.84e-6	8.89e-6	7.95e-6	7.00e-6	6.06e-6	5.11e-6	4.17e-6

表 3 3 类模型平均残差及预测精度比较

模型	$-a$	0.5	1.0	1.5	2.0
$GM(1,1)^1$	平均残差(%)	4.7914	25.127	51.660	69.653
	精度(%)	95.209	74.873	48.340	30.347
$GM(1,1)^2$	平均残差(%)	1.7984	1.5753	4.0786	4.5786
	精度%	98.202	98.425	95.921	95.421
$GM(1,1)^3$	平均残差(%)	0.7319	0.6930	0.7414	0.7625
	精度(%)	99.268	99.307	99.259	99.238

从表 1，表 2，表 3 可以看到，在发展系数较小时，3 类模型的预测精度很接近，主要因为原始数据是一个低增长序列。当发展系数增大后，$GM(1,1)^1$ 模型失效，$GM(1,1)^2$，$GM(1,1)^3$ 模型保持了很好的预测精度。尤其是 $GM(1,1)^3$ 模型，预测精度非常高，如果根据 $GM(1,1)^1$ 检验标准除去序列中 $x_i^{(0)}(1)$ 的相对残差值求平均残差，则预测精度甚至达到 99.9%。同时可以看出，新模型预测精度具有随着发展系数的增大有减小的预测优势。

4.2 实例应用比较

对文献[11]例 2 中出现的实际观测数据运用 3 类模型进行比较分析。原始数据序列 $x^{(0)}(k)=\{2.718，7.389，20.086，54.598，148.41，403.43，1096.6\}$。这是一个高增长数据序列。计算结果见表 4。表 4 的结果表明，由于原始数据序列是高增长序列，数据变化急剧，因此用 $GM(1,1)^1$ 模型得到的结果误差很大，模型已经不能使用，而本文提出的 $GM(1,1)^3$ 模型模拟的精度很高，远远高于 $GM(1,1)^1$，$GM(1,1)^2$ 模型的精度。

5 结束语

(1)通过重构背景值的计算公式，优化了对应的灰度值及初始值，保持了原模型的建模简单，计算简便及易于应用的优点。(2)发展系数较低情况下，3 种模型的建模精度较高。发展系数较高的情况下，$GM(1,1)^1$ 失去可信度，$GM(1,1)^2$，$GM(1,1)^3$ 预测精度较高，都保持在 90%以上，$GM(1,1)^3$ 高达 99%。由此说明，$GM(1,1)^3$ 模型既适用发展系数绝对值较小的序列建模，也适用于发展系数绝对值较大的序列建模，其模型精度始终保持在 99%以上，而且新模型相对残差随着发展系数增大而减小，具有较高的理论意义和较高的应用价值。(3)文中虽优化了模型的背景值，相应的灰度值及初始值，但仍然利用最小二乘法求解模型参数，而理论分析和实践表明，传统的最小二乘法求解模型参数在数据“异常”时会失真较大，因此找到更优参数求解方法，有待进一步探讨。

表 4 实例应用计算结果

模拟值	$GM(1,1)^1$		$GM(1,1)^2$		$GM(1,1)^3$	
	模拟值	相对残差(%)	模拟值	相对残差(%)	模拟值	相对残差(%)
$x^{(0)}(1)$	2.7180	0.0000	2.7180	0.0000	2.5650	5.6298
$x^{(0)}(2)$	6.5385	11.511	7.654	3.5859	7.3913	0.0311
$x^{(0)}(3)$	16.476	17.971	20.805	3.5791	20.091	0.0228
$x^{(0)}(4)$	41.519	23.955	56.552	3.5781	54.609	0.0200
$x^{(0)}(5)$	104.62	29.504	153.72	3.5763	148.43	0.0166
$x^{(0)}(6)$	263.64	34.650	417.83	3.5701	403.47	0.0088
$x^{(0)}(7)$	664.35	39.417	1135.7	3.5699	1096.7	0.0068
最大相对残差(%)	39.417		3.5791		5.6298	
平均残差(%)	22.430		3.0656		0.8194	
精度(%)	77.570		96.934		99.181	

参 考 文 献

[1] 邓聚龙.灰色控制系统[M]. 武汉: 华中科技大学出版社, 1985: 13–75.
Deng J L. Grey Control System[M]. Wuhan: Huazhong University of Science & Technology Press, 1985: 13–75.

[2] 邓聚龙. 灰预测与灰决策[M]. 武汉: 华中科技大学出版社, 2002: 62–80.
Deng J L. Estimate and Decision of Grey System[M]. Wuhan: Huazhong University of Science & Technology Press, 2002: 62–80.

[3] 刘思峰, 郭天榜, 党耀国, 等. 灰色系统理论及其应用[M]. 北京: 科学出版社, 1999: 44–63.
Li S F, Guo T B, and Dang Y G. Grey System Theory and Its Application[M]. Beijing: Science Press, 1999: 44–63.

[4] 柯宏发, 陈永光, 吴金亮. 一种新的基于 GM(1,1)模型的粗大

误差判别模型[J]. 系统工程与电子技术，2008, 30(10): 2003–2006.

Ke H F, Chen Y G, and Wu J L. Mew distinguishing model for gross error based on GM(1,1) model[J]. *Systems Engineering and Electronics*, 2008, 30(10): 2003–2006.

[5] Li H, Su L D, and Butterworth J. Grey forecasting model for active vibration control systems[J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2009, 322(4–5): 690–706.

[6] Wei L S, Fei M R, and Zhao W Q. Analysis of grey prediction based iterative learning control[C]. Prceedings of the 2008 IEEE International Conterence on Information and Automation, Hubei, 2008: 1096–1100.

[7] 张怡, 魏勇, 熊常伟. 灰色模型 GM(1,1)的一种新优化方法[J]. 系统工程理论与实践, 2007, 4(4): 141–146.

Zhang Y, Wei Y, and Xiong C W. One new optimized method of GM(1,1) Model[J]. *Systerms Engineering-Theory & Practice*, 2007, 4(4): 141–146.

[8] 穆勇. 无偏灰色GM(1,1)模型的直接建模法[J]. 系统工程与电子技术, 2003, 25(9): 1094–1097.

Mu Y. The directly modeling method of no deviation grey GM(1,1)[J]. *Systems Engineering and Electronics*, 2003, 25(9): 1094–1097.

[9] Lin Y H, Lee P C, and Chang T P. Adaptive and high-precision grey forecasting model[J]. *Expert Systems with Applications*, 2009, 36(6): 9658–9662.

[10] 罗党, 刘思峰, 党耀国. 灰色模型 GM(1,1)优化[J]. 中国工程科学, 2003, 15(18): 50–54.

Luo D, Liu S F, and Dang y G, Optimizes grey derivative of GM(1,1)[J]. *Engineering Science*, 2003, 15(18): 50–54.

[11] 李玻, 魏勇. 优化灰导数后的新 GM(1,1)模型[J]. 系统工程理论与实践, 2009, 29(2): 100–105.

Li B and Wei Y. Optimizes grey derivative of GM(1,1)[J]. *Systerms Engineering-Theory & Practice*, 2009, 29(2): 100–105.

[12] 王义闹, 刘开第, 李应川. 优化灰导数白化值的 GM(1,1)建模法[J]. 系统工程理论与实践, 2001, 21(5): 124–128.

Wang Y N, Liu K D, and Li Y C. The GM(1,1) modeling method of optimizing grey derivative white value[J]. *Systerms Engineering-Theory & Practice*, 2001, 21(5): 124–128.

[13] 王义闹, 李万庆, 王本玉, 陈绵云. 一种逐步优化灰导数白化值的 GM(1,1)建模方法[J]. 系统工程理论与实践, 2009, 2(9): 128–131.

Wang Y N, Li W Q, Wang B Y, and Chen M Y. The modeling method of GM(1,1) with a step by step optimum grey derivative background values[J]. *Systems Engineering –Theory & Practice*, 2009, 2(9): 128–131.

[14] 党耀国, 刘思峰, 刘斌. 以 $x^{(1)}(n)$ 为初始条件的 GM 模型[J]. 中国管理科学, 2005, (1): 132–134.

Dang Y G, Liu S F, and Liu B. The GM models that $x^{(1)}(n)$ be taken as initial value[J]. *Chinese Journal of Management Scinece*, 2005, (1): 132–134.

尚军亮：　男，1984年生，硕士生，研究方向为数据挖掘与知识发现.

方　敏：　女，1965年生，教授，硕士生导师，研究方向为网络与智能信息处理.