

DTFT 频谱细化特性分析及其快速算法设计

肖 玮^{*①} 涂亚庆^① 何 丽^②

^①(后勤工程学院 重庆 401311)

^②(陆军预备役高射炮兵师军需科 重庆 400041)

摘 要: 该文介绍了离散时间傅里叶变换 (Discrete Time Fourier Transform, DTFT)的一种等价定义式, 分析了 DTFT 与线性调频 Z 变换(Chirp-Z transform)的联系与区别, 推导出 DTFT 是一种特殊形式的 Chirp-Z 变换, 具有频谱细化特性。设计了 DTFT 的快速算法, 给出了算法实现步骤。算法计算量分析表明: 在相同频率分辨率下, DTFT 快速算法的计算量比 Chirp-Z 变换快速算法小。仿真结果验证了理论推导的正确性和 DTFT 在频率估计方面的优越性。

关键词: 信号处理; 离散时间傅里叶变换; 快速算法; 频谱细化; Chirp-Z变换

中图分类号: TN911.72

文献标识码: A

文章编号: 1009-5896(2011)06-1395-06

DOI: 10.3724/SP.J.1146.2010.01118

Analysis of DTFT's Spectrum Zoom Character and Design of Its Fast Algorithm

Xiao Wei^① Tu Ya-qing^① He Li^②

^①(Logistical Engineering University, Chongqing 401311, China)

^②(Army Reserve Duty Anti-aircraft Fire Artillery Division, Chongqing 400041, China)

Abstract: One equivalent definition of Discrete Time Fourier Transform (DTFT) is introduced in this paper. The relationship and differences between DTFT and Chirp-Z transform are analyzed. It is pointed out that DTFT, with spectrum zoom character, is a special form of Chirp-Z transform. Moreover, one fast algorithm and its detailed process of DTFT are given. Computational complexity analysis shows that fast algorithm of DTFT is less complicated than Chirp-Z with the same frequency resolution. Simulation results prove the validity of the theoretical results and the advantage of DTFT in frequency estimation.

Key words: Signal processing; Discrete Time Fourier Transform (DTFT); Fast algorithm; Spectrum zoom; Chirp-Z transform

1 引言

离散时间傅里叶变换 (Discrete Time Fourier Transform, DTFT)是信号处理中的一个重要理论, 在时间轴上离散取值, 在频率域上连续取值, 因此其频谱是连续的, 能够突破离散傅里叶变换 (Discrete Fourier Transform, DFT)及其快速算法 (Fast Fourier Transform, FFT)中频率分辨率受采样点数的限制, 有效克服DFT(FFT)谱的“栅栏”效应。但由于DTFT计算量较大, 其应用一直受到限制。文献[1]提出滑动DTFT快速算法, 但该方法的实质是通过不断增加计算序列的长度, 来实现指定频率处傅里叶系数的快速计算, 并未从DTFT算

法本身对其进行改进, 因此不能适用当序列长度不能增加的情况, 普适性较差。

DTFT实质是单位圆上的Z变换, Chirp-Z变换由Z变换推导出。本文通过分析DTFT与Chirp-Z变换的联系与区别, 理论推导和仿真验证DTFT是一种特殊形式的Chirp-Z变换, 具有频谱细化特性; 据此, 设计DTFT快速算法, 给出算法的实现步骤和计算量分析; 指出在相同频率分辨率下, DTFT法和Chirp-Z变换频率估计精度相同, 但DTFT快速算法的计算量比Chirp-Z变换快速算法小。

2 DTFT 频谱细化特性分析

2.1 DTFT 的数学定义

在多数数字信号处理的文献中, DTFT 的定义式均是针对离散信号的^[2,3]。然而, 在科学研究和工程实践中处理的信号大多数是模拟信号, 因此无法直接运用上述 DTFT 定义式进行频谱分析, 必须先

2010-10-18 收到, 2011-03-04 改回

国家自然科学基金和重庆市重点基金资助课题

*通信作者: 肖玮 wzry@163.com

将其转换为离散信号。下面, 针对模拟信号介绍 DTFT 的另一种等价定义式^[4]。

对任一在 $(-\infty, +\infty)$ 上绝对可积的连续时间信号 $x_a(t)$, 其傅里叶变换存在, 定义为

$$X(e^{j\Omega}) = \int_{-\infty}^{\infty} x_a(t)e^{-j\Omega t} dt \quad (1)$$

其中 $\Omega = 2\pi F$ 为模拟角频率, 单位为 rad/s; F 为模拟频率, 单位为 Hz。

利用连续信号采样的数学模型, 用一个采样序列 $\delta(t)$ 与 $x_a(t)$ 相乘将其离散化, 即

$$\delta(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_s) \quad (2)$$

$$x_a(nT_s) = x(n) = x_a(t)\delta(t) = x_a(t) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_s) \quad (3)$$

T_s 为两个连续样本之间的时间间隔, 即采样周期; 其倒数 $1/T_s = f_s$, 为采样频率; $\delta(t - nT_s)$ 是一个 Dirac δ 函数, 对于任一连续函数 $y(t)$, 有

$$\int_{-\infty}^{\infty} y(t)\delta(t - nT)dt = y(nT) \quad (4)$$

将式(3)和式(4)代入式(1)有

$$\begin{aligned} X(e^{j\Omega T_s}) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j\Omega T_s n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j2\pi n F / f_s} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j\omega n} \end{aligned} \quad (5)$$

在实际工程中, 一般仅考虑 $n = 0, 1, 2, \dots, N-1$ 的有限长序列, 故工程中 DTFT 定义为

$$\begin{aligned} X(e^{j\Omega T_s}) &= \sum_{n=0}^{N-1} x(n)e^{-j\Omega T_s n} = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)e^{-j2\pi n F / f_s} \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} x(n)e^{-j\omega n} \end{aligned} \quad (6)$$

2.2 DTFT 与 Chirp-Z 变换的区别与联系

Chirp-Z 变换是一种常用的频谱细化方法, 由 Rabiner 等人^[5]提出, 能够识别频谱的细微结构, 从而得到比常规频谱分析, 如 FFT 更加详尽的频谱信息, 现已广泛应用于窄带信号分析^[6]、图像处理^[7]、故障诊断^[8]、雷达信号处理^[9]、语音处理^[10]、通信^[11]等诸多领域。Chirp-Z 变换的实质是计算沿 Z 平面上一段螺旋线周线做等角度间隔取样的 R 个采样点处的 Z 变换值, 推导过程可以理解为将 Z 变换中的 z 替换成了 $z_r = AW^{-r}$, R 点 Chirp-Z 变换的定义如下:

$$\begin{aligned} X(z_r) &= \text{CZT}[x(n)] = \sum_{n=0}^{\infty} x(n)z_r^{-n} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} x(n)A^{-n}W^{nr}, \quad r = 0, 1, \dots, R-1 \end{aligned} \quad (7)$$

式(7)中, $x(n)$ 为无限长序列, 在实际工程中, 一般仅考虑 $n = 0, 1, 2, \dots, N-1$ 的情况; $A = A_0 e^{j\theta_0}$, $W =$

$W_0 e^{-j\varphi_0}$, A_0, W_0 为任意的正实数, A_0 和 θ_0 表示第 1 个采样点的半径和相角, W_0 表示采样点半径的伸展趋势, φ_0 为相邻采样点间的角度间隔。

计算 R 点 Chirp-Z 变换的步骤一般为: (1)根据先验知识确定信号频率成分的粗略范围 $(f_{\min}, f_{\max})$ 与采样频率 f_s ; (2)根据需要确定频率分辨率 Δf ; (3)根据(1), (2)中确定的参数按式(8)-式(10)计算 R , θ_0 和 φ_0 ; (4)将相应参数代入式(7)进行计算, 得到 R 点 Chirp-Z 变换。

$$R = (f_{\max} - f_{\min}) / \Delta f \quad (8)$$

$$\theta_0 = 2\pi f_{\min} / f_s \quad (9)$$

$$\varphi_0 = 2\pi \Delta f / f_s \quad (10)$$

若令 Chirp-Z 变换中 $A_0 = 1$, $W_0 = 1$, 将式(9)和式(10)代入式(7), 有

$$\begin{aligned} X(z_r) &= \text{CZT}[x(n)] = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)z_r^{-n} = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)A^{-n}W^{nr} \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} x(n)e^{-jn(2\pi f_{\min} / f_s + 2\pi \Delta f r / f_s)}, \\ r &= 0, 1, \dots, R-1 \end{aligned} \quad (11)$$

同理, 若在 DTFT 中, 根据需要确定信号频率成分的粗略范围 $(f_{\min}, f_{\max})$ 、频率分辨率 Δf 和输出点数 $M = (f_{\max} - f_{\min}) / \Delta f$, 代入式(6)有

$$\begin{aligned} X(e^{j\Omega T_s}) &= \sum_{n=0}^{N-1} x(n)e^{-j\Omega T_s n} \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} x(n)e^{-jn(2\pi f_{\min} / f_s + 2\pi \Delta f m / f_s)}, \\ m &= 0, 1, \dots, M-1 \end{aligned} \quad (12)$$

由以上分析可知, 式(11)和式(12)具有相同的数学解析式, 且式中参数具有相同的意义, 故可得出如下结论: (1)DTFT 是一种特殊的 Chirp-Z 变换, 当且仅当 $A_0 = 1, W_0 = 1$ 时, DTFT 与 Chirp-Z 变换完全等价。(2)DTFT 中频率分辨率 Δf 不受信号采样点数 N 的制约, 可以根据实际需要任意选定。(3)DTFT 输出点数 M 与信号采样点数 N 完全无关, 仅和频率分辨率 Δf 有关。当 $M = N$ 时, M 点 DTFT 谱的频率分辨率和 N 点 DFT(FFT)谱的频率分辨率相同, 为 f_s / N ; 当 $M > N$ 时, M 点 DTFT 谱的频率分辨率 f_s / M , 从而获得了较 N 点 DFT(FFT)谱更精确的频谱, 即达到了频域细化的效果。(由于 DTFT 能对任意感兴趣的频率区间进行分析, 而 DFT(FFT)只能对整个频带进行分析, 为方便比较, 在此令 $f_{\min} = 0, f_{\max} = f_s$)。

3 DTFT 快速算法

3.1 DTFT 快速算法设计

按式(12)计算 M 点 DTFT, 其计算量为 $N \times M$

次复数乘法。若 N 和 M 取值较大, 其计算量将更大, 因此很不利于推广应用。而 Chirp-Z 变换利用布鲁斯坦(Bulestein)所提出的式(13)设计快速算法^[2,3]。

$$ab = \frac{1}{2}[a^2 + b^2 - (a - b)^2] \quad (13)$$

由上文推导可知, 当 $A_0 = 1, W_0 = 1$ 时, DTFT 与 Chirp-Z 变换完全等价, 因此可以利用式(13)为 DTFT 设计快速算法, 则式(12)可以表示为

$$X(e^{j\Omega T_s}) = e^{-j\pi m^2 \Delta f / f_s} \sum_{n=0}^{N-1} g(n)h(m-n), \quad m = 0, \dots, M-1 \quad (14)$$

其中

$$g(n) = x(n)e^{-j2\pi n(f_{\min} + 0.5n\Delta f) / f_s}, \quad n = 0, 1, \dots, N-1 \quad (15)$$

$$h(n) = e^{j\pi n^2 \Delta f / f_s} \quad (16)$$

由式(14)可知, 计算 M 点 DTFT 可以通过计算序列 $g(n)$ 和 $h(n)$ 的线性卷积与表达式 $e^{-j\pi m^2 \Delta f / f_s}$ 的乘积获得。由于 $g(n)$ 为长度为 N 的序列, $h(n)$ 为一无穷长的序列。为计算 $g(n)$ 和 $h(n)$ 的线性卷积, 只需取 $h(n)$ 在 $-N+1 \leq n \leq M-1$ 内的值即可, 因此可以把 $h(n)$ 看成是长度为 $L = M + N - 1$ 的有限长序列。因为在时域计算线性卷积效率很低, 而当循环卷积的循环长度大于或等于 $L + N - 1$ 时, 计算循环卷积和线性卷积的结果相同, 且计算循环卷积可以利用 FFT 算法^[2,3], 因此可将 $g(n)$ 和 $h(n)$ 的线性卷积转换为循环卷积。由于计算 M 点 DTFT 只需要输出 $0, 1, \dots, M-1$ 共 M 个点的卷积值, 即使后面 $N-1$ 个点发生混叠也不会影响前面的值, 因此可将循环卷积的周期缩短为 L 。

3.2 DTFT 快速算法的实现

由以上分析可知, DTFT 快速算法的基本思想如图 1 所示。

具体实现步骤如下:

步骤 1 确定 $g(n)$ 和 $h(n)$ 循环卷积的周期 L , $L \geq M + N - 1$, 且 L 为 2 的整数次幂;

步骤 2 将 $h(n)$ 按式(17)转化为一个长度为 L 点的新序列:

$$h_L(n) = \begin{cases} h(n), & 0 \leq n \leq M-1 \\ 0, & M \leq n \leq L-N \\ h(L-n), & L-N+1 < n < L-1 \end{cases} \quad (17)$$

步骤 3 根据已知参数按式(15)计算出序列 $g(n)$;

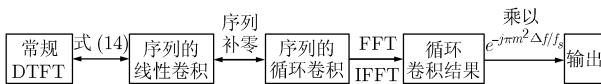


图 1 DTFT 快速算法的基本思想

步骤 4 将 $g(n)$ 进行补零处理, 使之成为长度为 L 的序列 $g_1(n)$, 利用 FFT 算法计算 $g_1(n)$ 的 L 点 DFT, 记为 $G(l)$;

步骤 5 利用 FFT 算法计算 $h_L(n)$ 的 L 点的 DFT, 记为 $H(l)$;

步骤 6 将 $G(l)$ 与 $H(l)$ 相乘, 得到 $g(n)$ 和 $h(n)$ 的循环卷积, 记为 $Y(l)$, 并对其进行 L 点快速傅里叶逆变换(Inverse Fast Fourier Transform, IFFT)得到序列 $y(n)$, 只取 $y(n)$ 在 $0 \leq n \leq M-1$ 范围内的值, 即为 $g(n)$ 和 $h(n)$ 的线性卷积, 记为 $y_1(n)$;

步骤 7 将 $y_1(n)$ 与表达式 $e^{-j\pi m^2 \Delta f / f_s}$ 相乘, 得到 M 点 DTFT 的值。

3.3 计算量分析与比较

3.3.1 计算量分析 在 DTFT 快速算法中:

(1)在计算 $g(n)$ 过程中, 计算 $e^{-j\pi n^2 \Delta f / f_s}$ 需要 $2N$ 次实数乘法, 计算 $e^{-j2\pi n f_{\min} / f_s}$ 需要 N 次实数乘法, 故计算 $g(n)$ 共需要 $2N$ 次复数乘法和 $3N$ 次实数乘法;

(2)3 次计算 L 点 FFT 过程中(步骤 3、步骤 5 和步骤 6), 共需要 $1.5L \log_2 L$ 次复数乘法和 $3L \log_2 L$ 次复数加法;

(3)计算 $g(n)$ 和 $h(n)$ 的循环卷积 $Y(l)$ 时, 需 L 次复数乘法;

(4)形成序列 $h(n)$ 时, 需要 $2N$ 次实数乘法;

(5)计算 $e^{-j\pi m^2 \Delta f / f_s}$ 需要 $2M$ 次实数乘法, 计算 $y_1(n)$ 与 $e^{-j\pi m^2 \Delta f / f_s}$ 的乘积, 需要 M 次复数乘法。

由于计算 1 次复数乘法需要 4 次实数乘法和 2 次实数加法, 计算 1 次复数加法需 2 次实数加法, 故 M 点 DTFT 快速算法总的运算量为 $S_{\text{DTFT}\times}$ 次实数乘法和 $S_{\text{DTFT}+}$ 次实数加法:

$$S_{\text{DTFT}\times} = 6L \log_2 L + 4L + 13N + 6M \quad (18)$$

$$S_{\text{DTFT}+} = 9L \log_2 L + 2L + 4N + 2M \quad (19)$$

而直接 M 点 DTFT 需要 $M \times N$ 次复数乘法, 即 $4MN$ 次实数乘法和 $2MN$ 次实数加法。因此, 当 M, N 取值较大时, DTFT 快速算法的计算量远小于常规 DTFT 算法。

3.3.2 计算量比较 在 Chirp-Z 变换快速算法中, 由于一般情况下 $A_0 \neq 1, W_0 \neq 1$ (当 $A_0 = 1, W_0 = 1$ 时, Chirp-Z 变换即为 DTFT), 生成序列 $g(n)$ 时, 需计算 A_0^{-n} 和 $W_0^{0.5n^2}$; 生成序列 $h(n)$ 时, 需计算 $W_0^{-0.5n^2}$ 。因此在输出点数相同(即具有相同频率分辨率)的情况下, DTFT 快速算法较 Chirp-Z 变换快速算法少 $5N$ 次实数乘法, M 点 Chirp-Z 变换快速算法的总运算量约为 $S_{\text{CZT}\times}$ 次实数乘法和 $S_{\text{CZT}+}$ 次实数加法:

$$S_{\text{CZT}\times} = 6L \log_2 L + 4L + 18N + 6M \quad (20)$$

$$S_{\text{CZT}+} = 9L \log_2 L + 2L + 4N + 2M \quad (21)$$

4 仿真验证

为验证上述理论推导,以包含两个频率分量的多频信号 y_1 为例在MATLAB中进行如下仿真验证,

$$y_1 = \cos(2\pi \times n \times f_1 / f_s) + \cos(2\pi \times n \times f_2 / f_s + \theta) \quad (22)$$

其中 $f_1 = 68.5$ Hz, $f_2 = 70.2$ Hz, $n = 1:600$, $f_s = 5120$ Hz, 相位 θ 为幅度 2π 的高斯分布的随机值。

4.1 DTFT 与 Chirp-Z 变换的等价性仿真验证

4.1.1 无噪声情况下的仿真验证

(1) 基于信号 y_1 , 调用MATLAB中固有函数 CZT 计算 R 点 Chirp-Z 变换, MATLAB 中代码如下:

$$\begin{aligned} w &= \exp(-j \cdot 2 \cdot \pi \cdot i^* (f_{\max} - f_{\min}) / (R \cdot f_s)) \\ a &= \exp(j \cdot 2 \cdot \pi \cdot i^* f_{\min} / f_s) \\ z &= \text{CZT}(y_1, R, w, a) \end{aligned}$$

(2) 由于 MATLAB 中没有专门的函数计算形如式(6)的 DTFT, 自编函数 NEWDTFT 计算信号 y_1 的 M 点 DTFT, MATLAB 中代码如下:

$$\begin{aligned} \text{function}[X] &= \text{NEWDTFT}(y_1, n, f_s, f_{\min}, f_{\max}, M) \\ f &= \text{linspace}(f_{\min}, f_{\max}, M) \\ X &= y_1 * (\exp(-j \cdot n^* (2 \cdot \pi \cdot f / f_s))) \end{aligned}$$

其中 M 、 R 分别表示 DTFT 和 Chirp-Z 变换的输出点数, $R = M = 2048$, 仿真结果如图2(a)所示。

4.1.2 高斯白噪声下的仿真验证 为验证在噪声背景下 DTFT 和 Chirp-Z 变换的等价性, 在上述正弦采样信号 y_1 中加入信噪比 $\text{SNR} = -10$ dB 的高斯白噪声, 随机进行 1000 次 Monte Carlo 仿真实验, 基于 DTFT 和 Chirp-Z 变换, f_1 和 f_2 的频率估计均方根误差均分别为 1.01 Hz 和 0.87 Hz。图2(b)为一次随机仿真实验的结果。

从图2所示的仿真结果知, 虽然实现 Chirp-Z 变换和 DTFT 的函数不同, 但输出结果是相同的(图2(b)中频率估计值的细微差别源于单次随机实验中噪声的随机性), 故与上述理论分析所得结论一致: 当且仅当 $A_0 = 1, W_0 = 1$ 时, DTFT 与 Chirp-Z 变换完全等价。

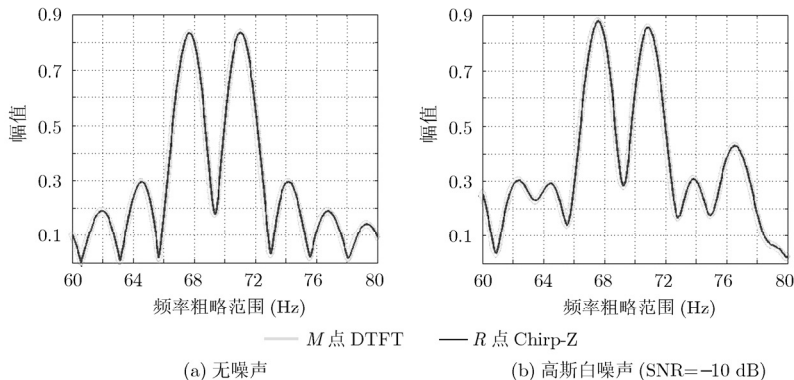


图2 基于 Chirp-Z 变换和 DTFT 的频谱图

4.2 DTFT 频谱细化特性仿真验证

为验证 DTFT 的频谱细化特性, 调用自编函数 NEWDTFT 函数进行如下仿真实验, 仅改变输出点数 M 的大小 ($M = 10, 100, 1000$), 其余实验参数设置同上, 实验结果如图3所示。当 $M = 10$ 时, DTFT 谱根本无法分辨出信号 y_1 中的两个频率分量; 随着输出点数 M 的不断增大, DTFT 频谱越平滑, 频谱的局部特征越清晰; 当 $M \geq 100$ 时, 能够清楚地分辨出 y_1 中的两个频率分量, 从而充分体现了 DTFT 的频谱细化特性。

4.3 DTFT 应用性能仿真

4.3.1 单频信号的频率估计 为说明 DTFT 在单频信号频率估计等方面的优越性, 用 MATLAB 生成包含单个频率成分的正弦采样信号 y_2 ,

$$y_2 = \cos(2\pi \times n \times f_3 / f_s + \pi i / 4) \quad (23)$$

其中 $n = 2048$ 为采样点数, $f_s = 5120$ Hz 为采样频率, $f_3 = 68.5$ Hz 为信号频率。

在无噪声情况下和高斯白噪声情况下 ($\text{SNR} = -5$ dB, -10 dB, -15 dB) 分别采用 FFT 法, DTFT 法和 Chirp-Z 法对 y_2 进行频率估计, 随机进行 1000 次 Monte Carlo 仿真实验, 结果如表1所示。由于 DTFT 法和 Chirp-Z 法能对任意感兴趣的频段进行分析, 在此设其频率分析范围为 $60 \sim 80$ Hz。

由表1所知, 无论是在无噪声的理想情况下, 还是在高斯白噪声 ($\text{SNR} = -5$ dB, -10 dB, -15 dB) 情况下, 在单频信号的频率估计中, DTFT 法和 Chirp-Z 法的频率估计精度均较 FFT 法高, 均方根误差大约分别是 FFT 法的 $1/167$, $1/39$, $1/22$ 和 $1/11$ 。且在相同频率分辨率的情况下, DTFT 法和 Chirp-Z 法的估计精度完全相同, 再次验证了 DTFT 法和 Chirp-Z 法的等价性。

4.3.2 多频信号的频率估计 为说明 DTFT 在多频信号频率估计方面的优越性, 对包含两个密集频率

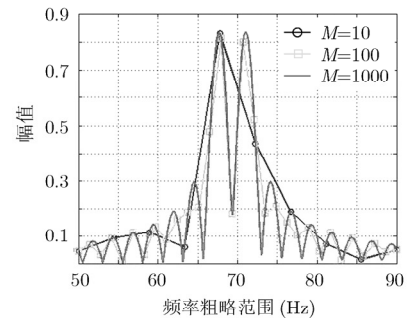


图3 不同输出点数时基于 DTFT 的频谱图

表 1 基于 FFT/DTFT/Chirp-Z 的单频信号频率估计仿真结果

估计方法	f_3 的均方根误差(Hz)			
	SNR = -15 dB	SNR = -10 dB	SNR = -5 dB	无噪声
FFT 法	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
DTFT 法	0.0910	0.0460	0.0254	0.0059
Chirp-Z 法	0.0910	0.0460	0.0254	0.0059

成分的正弦采样信号 y_1 进行了如下仿真实验。DTFT 法和 Chirp-Z 法的频率分析范围设置同 4.3.1 节。在无噪声情况下和高斯白噪声 (SNR = -15 dB, -10 dB, -5 dB) 情况下分别采用 FFT 法、DTFT 法和 Chirp-Z 法对 y_1 进行频率估计, 随机进行 1000 次 Monte Carlo 仿真实验, 仿真结果如表 2 所示。图 4 为随机一次实验的示意图。

由于 y_1 中两个频率成分间隔为 (70.2 - 68.5) Hz = 1.7 Hz < 5120/2048 Hz = 2.5 Hz (FFT 的频率分辨率), 因此即使在无噪声的理想情况下 FFT 法也不能较准确地分辨出 y_2 中的两个频率成分 (图 4(a)); 在信噪比分别为 SNR = -15 dB, -10 dB, -5 dB 的高斯白噪声情况下, 第 1 频率分量能较准确的识别出来, 估计值的均方根误差均为 1 Hz, 但第 2 频率分量估计值的均方根误差分别为

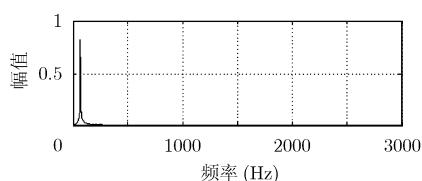
1432.1 Hz, 1316.9 Hz, 599.32 Hz, 根本无法识别 (见表 2)。

由上文分析知, DTFT 法和 Chirp-Z 法均具有频谱细化特性, 因此在 60 ~ 80 Hz 频率分析范围内进行 2048 条谱线的细化后, 频率分辨率由原来的 2.5 Hz 提高到接近 0.01 Hz, 因此即使在信噪比为 -15 dB 的情况下, 仍能够较准确的分辨出 y_1 中两个密集频率成分 f_1 和 f_2 (图 4(b)), 且精度较高, f_1 和 f_2 估计值的均方根误差分别为 0.3440 Hz, 2.1360 Hz (见表 2)。且在相同频率分辨率下, 基于 DTFT 法和 Chirp-Z 法的频率估计结果完全相同, 再次验证了 DTFT 法和 Chirp-Z 法的等价性。

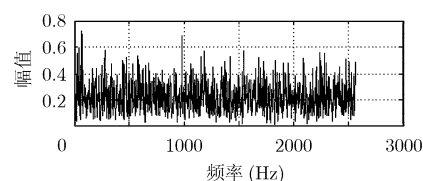
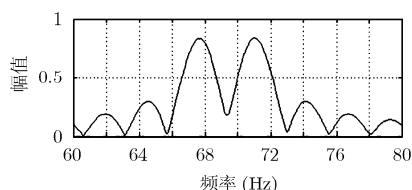
由上述仿真可知, 无论是在单频信号还是多频信号的频率估计中, DTFT 法都具有明显优势, 其精度远远高于 FFT 法, 特别是在多频信号的频率估

表 2 基于 FFT/DTFT/ Chirp-Z 的多频信号频率估计仿真结果

估计方法	f_1 的均方根 误差(Hz)	f_2 的均方根 差(Hz)	f_1 的均方根 误差(Hz)	f_2 的均方根 差(Hz)	f_1 的均方根 误差(Hz)	f_2 的均方根 误差(Hz)	f_1 的均方根 误差(Hz)	f_2 的均方根 误差(Hz)
	SNR = -15 dB	SNR = -15 dB	SNR = -10 dB	SNR = -10 dB	SNR = -5 dB	SNR = -5 dB	无噪声	无噪声
FFT 法	1.0000	1432.1	1.0000	1316.9	1.0000	599.32	1.0000	24.800
DTFT 法	0.3440	2.1360	0.3200	1.8856	0.3208	1.5719	0.3164	0.5906
Chirp-Z 法	0.3440	2.1360	0.3200	1.8856	0.2969	1.5719	0.3164	0.5906

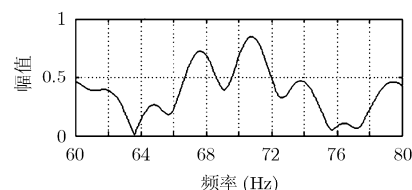


(a1) 基于 FFT 法的多频信号频率估计

(b1) 基于 FFT 法的多频信号
频率估计 (SNR=-15 dB)

(a2) 基于 Chirp-Z/DTFT 法的多频信号频率估计

(a) 无噪声

(b2) 基于 Chirp-Z/DTFT 法的多
频信号频率估计 (SNR=-15 dB)

(b) 高斯白噪声

图 4 基于 FFT/Chirp-Z/DTFT 的多频信号频谱图

计中, 能够将 FFT 根本无法分辨出的两个密集频率成分准确地估计出来。另一方面, 在相同条件下, DTFT 法的与 Chirp-Z 法的频率估计精度一样, 但根据式(18)-式(21)的分析可知, DTFT 快速算法的计算量却远小于 Chirp-Z 快速算法。

5 结束语

本文通过分析 DTFT 与 Chirp-Z 变换的联系与区别, 理论推导与仿真验证了 DTFT 是一种特殊的 Chirp-Z 变换, 具有频谱细化特性; 设计了 DTFT 的快速算法, 给出了详细的实现步骤。算法计算量分析与仿真实验表明: 在相同频率分辨率下, DTFT 快速算法与 Chirp-Z 法的频率估计精度相同, 但其计算量小于 Chirp-Z 快速算法。DTFT 的应用仿真结果表明, 无论是在单频信号还是多频信号的频率估计中, DTFT 法的频率估计精度高于 FFT 法数 10 倍以上, 特别是在多频信号的频率估计中, 能够将 FFT 法根本无法分辨出的频率分量准确地估计出来。本文研究结果为信号频率估计和频谱细化提供了一种新思路和方法, 在不增加硬件成本的前提下有效提高频率估计精度, 能够广泛应用于窄带信号分析、图像处理、故障诊断等诸多领域, 具有重要的理论意义和实用价值。

参 考 文 献

- [1] 张海涛, 涂亚庆. 计及负频率影响的科里奥利质量流量计信号处理方法[J]. 仪器仪表学报, 2007, 28(3): 539-544.
Zhang Hai-tao and Tu Ya-qing. New signal processing method with negative frequency contribution for Coriolismass flowmeter[J]. *Chinese Journal of Scientific Instrument*, 2007, 28(3): 539-544.
- [2] 胡广书. 数字信号处理——理论、算法与实现[M]. 北京: 清华大学出版社, 2003: 100-115, 192-195.
Hu Guang-shu. Digital Signal Processing — Theory, Algorithm and Realization [M]. Beijing: Tsinghua University Press, 2003: 100-115, 192-195.
- [3] Prioakis J G and Manolakis D G. Digital Signal Processing: Principle, Algorithms, and Application [M]. New Jersey: Prentice Hall, 2006: 200-215, 403-407.
- [4] 周谋炎. 反卷积与信号复原[M]. 北京: 国防工业出版社, 2001: 19-20.
Zhou Mou-yan. Deconvolution and Signal Recovery[M]. Beijing: China National Defense Industry Press, 2001: 19-20.
- [5] Rabiner L R and Schafer R W. The Chirp-Z transform algorithm [J]. *IEEE Transactions on Audio and Electroacoustics*, 1969, 17(2): 86-92.
- [6] Granados-Lieberman D, Romero-Troncoso R J, and Cabal-Yepez E, et al. A real-time smart sensor for high-resolution frequency estimation in power systems[J]. *Sensors*, 2009, 9(9): 7412-7429.
- [7] Tang Yu, Xing Meng-dao, and Bao Zheng. The polar format imaging algorithm based on double Chirp-Z transforms[J]. *IEEE Geosciences and Remote Sensing Letters*, 2008, 5(4): 610-614.
- [8] Wu Yu, Liu Zhen-xing, and Li Ru-yun. Fault diagnosis way based on subsection spectrum zoom analysis by CZT for squirrel cage induction motors[C]. 2008 International Conference on Condition Monitoring and Diagnosis, Beijing, China, April 21-24, 2008: 208-211.
- [9] Liang Yi, Wang Hong-xian, and Zhang Long. An approach to forward looking FMCW radar imaging based on two-dimensional Chirp-Z transform[J]. *Science China-Information Sciences*, 2010, 53(8): 1653-1665.
- [10] Drugman T, Bozkurt B, and Dutoit T. Chirp decomposition of speech signals for glottal source estimation[C]. ISCA Workshop on Non-Linear Speech Processing, Barcelona, 2009: June 27-27, 1345-1353.
- [11] Tan S and Hirose A. Low-calculation-cost fading channel prediction using chirp Z-transform[J]. *Electronics Letters*, 2009, 45(8): 418-420.

肖 玮: 女, 1982 年生, 博士生, 从事数字信号处理研究。
涂亚庆: 男, 1963 年生, 博士, 教授, 博士生导师, 从事仪器仪表与信号处理、智能控制与自动化研究。
何 丽: 女, 1984 年生, 硕士, 从事信号处理研究。