

高斯白噪声背景下的 LFM 信号的分数阶 Fourier 域信噪比分析

刘建成 刘忠 王雪松 肖顺平 王国玉
(国防科技大学电子科学与工程学院 长沙 410073)

摘要: 目标大机动运动使雷达回波表现为频率和调频率参数均未知的 LFM 信号。未知参数 LFM 信号的检测和估计采用分数阶 Fourier 变换来实现受到越来越多的关注, 为此本文着重分析其分数阶 Fourier 变换的信噪比。首先推导出时限线性调频信号的分数阶 Fourier 变换模平方, 给出了在分数阶 Fourier 域的峰值点与未知参数的关系, 然后研究了附加白噪声 LFM 信号在分数阶 Fourier 域的统计特性, 确定了其信噪比, 并与理想情况(即参数频率和调频率参数已知)下线性相位匹配滤波器的输出信噪比进行了比较。

关键词: LFM 信号; 参数估计; 分数阶 Fourier 变换; 信噪比

中图分类号: TN957.51

文献标识码: A

文章编号: 1009-5896(2007)10-2337-04

SNR Analysis of LFM Signal with Gaussian White Noise in Fractional Fourier Transform Domain

Liu Jian-cheng Liu Zhong Wang Xue-song Xiao Shun-ping Wang Guo-yu
(School of Electronic Science and Engineering, National University of Defense Technology, Changsha 410073, China)

Abstract: Due to the motion of a target, radar return signals are usually LFM signals with unknown frequency and unknown frequency modulated rate. Fractional Fourier transform has recently attracted much attention in detection and parameter estimation of multi-component LFM signals. Fractional Fourier transform of LFM signal of finite duration is derived and a relation between coordinate of the peak and unknown parameters is given. Statistical characteristic of LFM signal with white noise in fractional Fourier domain is studied, a closed form expression is found for Signal-to-Noise Ratio(SNR), and it is compared with matched filter of ideal situation (i.e. parameters of LFM signal are known).

Key words: LFM signal; Parameters estimation; Fractional Fourier transform; Signal-to-Noise Ratio(SNR)

1 引言

Fourier变换无疑是最常用、最有用的信号处理工具之一。作为Fourier变换的广义形式, 分数阶Fourier变换是由Namias在不知前人工作的情况下以纯数学的方式提出的, 并将其用于解偏微分方程^[1]。后来Cariolaro给出了一所有类型信号(包括一维和多维, 连续和离散, 周期和非周期)的分数阶Fourier变换的统一定义^[2]。由于具有很多传统Fourier变换所不具备的性质, 分数阶Fourier变换作为处理时变信号的重要工具被广泛应用在解微分方程、光学系统设计和光学信号处理、量子力学、信号检测、图像处理、模式识别等^[1,3-5]。离散分数阶Fourier变换及其快速算法的出现^[6-8], 尽管还不完善, 但还是加速了其在工程中的应用进程。Almeida分析了分数阶Fourier变换和WVD的关系, 并将其解释为时频平面的旋转因子^[9], 而LFM信号在时频面上对应的是直线, 因此分数阶Fourier变换适合处理未知参数LFM信号。分数阶Fourier变换对多分量未知参数LFM信号的检测和

估计受到越来越多的重视^[10-12]。但是文献对于为何分数阶Fourier变换适于处理LFM信号均是从概念上说明, 没从数学上解释。从信噪比积累的角度考虑FRFT处理未知参数时限LFM信号的统计性能也没有相关论述。本文从时限LFM信号分数阶Fourier变换的幅度特性研究了峰值所在分数阶Fourier域的位置, 及对应的信号参数, 因而在分数阶Fourier域确切说明了分数阶Fourier变换适合处理未知参数LFM信号。通过分析附加白噪声LFM信号的分数阶Fourier变换的统计特性, 从信噪比积累的角度, 统计分析了分数阶Fourier变换在处理未知参数LFM信号时的性能。

本文第2节推导时限线性调频信号的分数阶Fourier变换模平方, 并分析其峰值及其所在位置, 第3节分析附加白噪声LFM信号分数阶Fourier变换模平方的统计特性, 第4节进行信噪比分析, 最后是结束语。

2 时限 LFM 信号的分数阶 Fourier 变换模平方特性

考虑单分量 LFM 信号

$$s(t) = A e^{j\omega t + j\frac{c}{2}t^2}, \quad |t| \leq T/2 \quad (1)$$

式中 T 为信号时长, v 和 c 为未知参数, 前者为角频率, 后者为角调频率, 为方便计, 分别简称为频率和调频率。

分数阶 Fourier 变换定义为^[9]

$$F_s(\alpha, u) = \int_{-\infty}^{+\infty} K_\alpha(u, t) s(t) dt \quad (2)$$

式中

$$K_\alpha(u, t) = \begin{cases} \sqrt{\frac{1-j \cot \alpha}{2\pi}} e^{j\frac{t^2+u^2}{2} \cot \alpha - jut \csc \alpha}, & \alpha \neq n\pi \\ \delta(t-u), & \alpha = 2n\pi \\ \delta(t+u), & \alpha = (2n+1)\pi \end{cases} \quad (3)$$

$\cot(\cdot)$ 表示求余切, $\csc(\cdot)$ 表示求余割。

不失一般性, 仅考虑 $0 < \alpha < \pi/2$ 。将式(1)和式(3)代入式(2), 得到

$$F_s(\alpha, u) = A \sqrt{\frac{1-j \cot \alpha}{2\pi}} e^{j\frac{u^2}{2} \cot \alpha} \int_{-T/2}^{T/2} e^{j\frac{c+\cot \alpha}{2} t^2 + j(v-u \csc \alpha)t} dt \quad (4)$$

下面分 4 种情况确定 $|F_s(\alpha, u)|^2$:

(1) 当 $c + \cot \alpha = 0$, 且 $v - u \csc \alpha = 0$ 时

$$|F_s(\alpha, u)|^2 = \frac{A^2 T^2 \csc \alpha}{2\pi} \quad (5)$$

(2) 当 $c + \cot \alpha = 0$, 且 $v - u \csc \alpha \neq 0$ 时

$$|F_s(\alpha, u)|^2 = \frac{A^2 T^2 \csc \alpha}{2\pi} \text{sinc}^2[(v - u \csc \alpha)T/2] \quad (6)$$

(3) 当 $v - u \csc \alpha = 0$, 且 $c + \cot \alpha \neq 0$ 时

$$|F_s(\alpha, u)|^2 = \frac{A^2 T^2 \csc \alpha}{2\pi} \frac{C^2(\theta) + S^2(\theta)}{\theta^2} \quad (7)$$

式中 $\theta = \frac{T}{2} \sqrt{\frac{|c + \cot \alpha|}{\pi}}$, $C(\theta) = \int_0^\theta \cos\left(\frac{\pi}{2} x^2\right) dx$, $S(\theta) = \int_0^\theta \sin\left(\frac{\pi}{2} x^2\right) dx$ 分别表示 Fresnel 余弦函数和 Fresnel 正弦函数。

(4) 当 $v - u \csc \alpha \neq 0$, 且 $c + \cot \alpha \neq 0$ 时

$$|F_s(\alpha, u)|^2 = \frac{A^2 T^2 \csc \alpha}{2\pi} \frac{[C(\xi) - C(\eta)]^2 + [S(\xi) - S(\eta)]^2}{(\xi - \eta)^2} \quad (8)$$

式中 $\xi = \left(\frac{T}{2} + \frac{v - u \csc \alpha}{c + \cot \alpha}\right) \sqrt{\frac{|c + \cot \alpha|}{\pi}}$, $\eta = \left(-\frac{T}{2} + \frac{v - u \csc \alpha}{c + \cot \alpha}\right) \sqrt{\frac{|c + \cot \alpha|}{\pi}}$ 。

图 1 分 3 种情况给出了 $|F_s(\alpha, u)|^2$ 归一化后的主瓣部分在 (α, u) 面上的示意图 ($v = 1000 \text{rad} \cdot \text{s}^{-1}$, $c = 1000 \text{rad} \cdot \text{s}^{-2}$), 图 1(a)~图 1(c) 分别是式(6), 式(7)和式(8)归一化后的示意图。

可以看出, 当 $c + \cot \alpha_0 = 0$, $v - u_0 \csc \alpha_0 = 0$ 时, $|F_s(\alpha, u)|^2$ 达到峰值, 即 $\alpha_0 = -\cot^{-1}(c)$, $u_0 = v \sin \alpha_0$ 为 $|F_s(\alpha, u)|^2$ 的峰值点。由此可根据 α_0 和 u_0 确定 LFM 信号的未知参数 c 和 v 。

令 $c_x = -\cot \alpha$, $v_x = u \csc \alpha$, 图 2 给出了 $|F_s(v_x, c_x)|^2$ 归

一化后的主瓣部分在信号参数 (v_x, c_x) 面上的示意图 ($v = 1000 \text{rad} \cdot \text{s}^{-1}$, $c = 1000 \text{rad} \cdot \text{s}^{-2}$)。

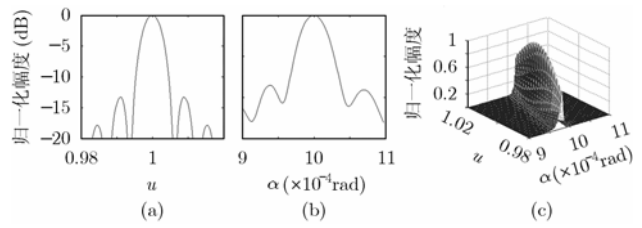


图 1 时限 LFM 信号分数阶 Fourier 变换的模平方主瓣部分 (α, u) 面上的示意图

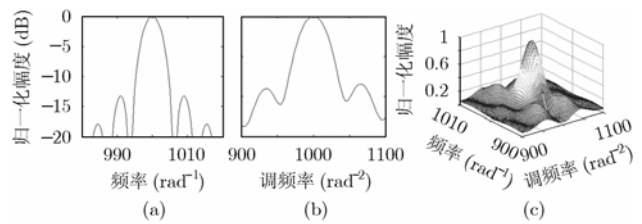


图 2 时限 LFM 信号分数阶 Fourier 变换的模平方主瓣部分 (v_x, c_x) 面上示意图

对于实际雷达信号, 满足 $|c| \gg 1$, 所以 $\sin \alpha_0 \approx \alpha_0$, 则

$$u_0 = v \sin \alpha_0 \approx v \alpha_0 \quad (9)$$

即 $|F_s(\alpha, u)|^2$ 的峰值点会出现在 (α, u) 面的直线 $u = v \alpha$ 上。虽然 $|F_s(\alpha, u)|^2$ 在 $\alpha_0 = -\cot^{-1}(c)$, $u_0 = \frac{v}{\sqrt{1+c^2}}$ 点达到峰值, 但 $|F_s(\alpha, u)|^2$ 从峰值点开始沿这条直线衰减没有沿 α 和 u 方向衰减的快, 且在峰值点既不关于 α 对称, 也不关于 u 对称。从图 1(c) 可看出, 在 α 轴上, 3 dB 主瓣宽度约为 0.7 rad, 远大于图 1(a) 的主瓣宽度。在 u 轴上, 3 dB 主瓣宽度约 0.04, 也远大于图 1(b) 的主瓣宽度。而 $|F_s(v_x, c_x)|^2$ 在峰值点可近似认为既关于 v_x 对称, 也关于 c_x 对称。

$|F_s(\alpha, u)|^2$ 的峰值为

$$|F_s(\alpha_0, u_0)|^2 = \frac{A^2 T^2 \sqrt{1+c^2}}{2\pi} \quad (10)$$

同样由于 $|c| \gg 1$, 则 $\sqrt{1+c^2} \approx c$ 。 $|F_s(\alpha, u)|^2$ 峰值可近似为

$$|F_s(\alpha_0, u_0)|^2 = \frac{A^2 T^2 c}{2\pi} \quad (11)$$

从式(11)可以看出, $|F_s(\alpha, u)|^2$ 的峰值与信号幅度平方、时长平方和信号调频率 c 成正比。信号幅度越大, 峰值越大, 信号幅度越小, 峰值越小。调频率越大, 峰值越大。调频率越小, 峰值越小。如果仅从信号的角度看, 调频率大的信号比调频率小的信号更容易检测, 然而事实上并不是如此。

3 高斯白噪声背景下的 LFM 信号的分数阶 Fourier 变换的模平方的统计特性

考虑附加白噪声 LFM 信号

$$r(t) = s(t) + n(t), \quad |t| \leq T/2 \quad (12)$$

式中 $s(t)$ 如式(1), $n(t)$ 为零均值复高斯白噪声, 且噪声方差为 $\sigma_n^2 = N_0$ 。 T 为信号时长。其分数阶 Fourier 变换的模平方为

$$|F_r(\alpha, u)|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} K_{\alpha}(u, t_1) K_{\alpha}^*(u, t_2) [s(t_1) + n(t_1)] \cdot [s^*(t_2) + n^*(t_2)] dt_1 dt_2$$

确定其均值为

$$E[|F_r(\alpha, u)|^2] = |F_s(\alpha, u)|^2 + \frac{T\sigma_n^2 \csc \alpha}{2\pi} \quad (13)$$

上式由两部分组成, 第 1 项是信号项, 第 2 项是由噪声引起。只有白噪声时, 其分数阶 Fourier 变换的模平方才是第 2 项。噪声项引起的均值大小与 $\csc \alpha$ 成正比。在信号峰值点, $\csc \alpha_0 = \sqrt{1+c^2} \approx c$, 即噪声项引起的均值大小近似与调频率成正比。

再确定

$$E[|F_r(\alpha, u)|^4] = |F_s(\alpha, u)|^4 + 4|F_s(\alpha, u)|^2 \frac{T\sigma_n^2 \csc \alpha}{2\pi} + 2\left(\frac{T\sigma_n^2 \csc \alpha}{2\pi}\right)^2 \quad (14)$$

则得到附加噪声 LFM 信号分数阶 Fourier 变换的模平方的方差为

$$\text{VAR}[|F_r(\alpha, u)|^2] = \frac{T^2 \csc^2 \alpha}{4\pi^2} [2A^2 T \sigma_n^2 + \sigma_n^4] \quad (15)$$

从上式可看出, 方差与 $\csc^2 \alpha$ 成正比。在信号峰值点, 即满足 $c + \cot \alpha_0 = 0$ 时,

$$\text{VAR}[|F_r(\alpha_0, u_0)|^2] = \frac{T^2(1+c^2)}{4\pi^2} [2A^2 T \sigma_n^2 + \sigma_n^4] \quad (16)$$

当 $|c| \gg 1$ 时

$$\text{VAR}[|F_r(\alpha_0, u_0)|^2] \approx \frac{T^2 c^2}{4\pi^2} [2A^2 T \sigma_n^2 + \sigma_n^4] \quad (17)$$

此时, 方差近似与调频率的平方成正比, 即峰值点的噪声功率与调频率的平方成正比。

4 信噪比分析

由于分数阶 Fourier 变换具有在二维分数阶 Fourier 变换域聚集信号而分散噪声的性质, 传统的信噪比定义, 即平均信号功率与平均噪声功率的比, 已不再适合。文献[13]提出把二维变换域上的信号峰值平方作为信号功率, 该处的噪声方差作为噪声功率, 则基于分数阶 Fourier 变换的输出信噪比为

$$\text{SNR}_{\text{out}} = \frac{|F_s(\alpha_0, u_0)|^4}{\text{VAR}[|F_r(\alpha_0, u_0)|^2]} \quad (18)$$

式中 $\text{VAR}\{X\}$ 表示随机信号 X 的方差。

把式(11)和式(17)代入上式, 得到

$$\text{SNR}_{\text{out}} = \frac{A^4 T^2}{2A^2 T \sigma_n^2 + \sigma_n^4} \quad (19)$$

从式(19)可以看出, 输出信噪比与 c 无关。这是因为峰值处的信号功率和噪声功率均与调频率成正比, 而信噪比是两者的比, 故抵消了调频率的影响, 因此调频率大的信号并不比调频率小的信号更容易检测。

如果用 $\overline{\text{SNR}}_{\text{out}}$ 表示理想情况(即参数频率和调频率参数已知)下线性相位匹配滤波器的输出信噪比, 则

$$\overline{\text{SNR}}_{\text{out}} = \frac{A^2 T}{\sigma_n^2} \quad (20)$$

把上式代入式(19)得到

$$\text{SNR}_{\text{out}} = \frac{\overline{\text{SNR}}_{\text{out}}^2}{2\overline{\text{SNR}}_{\text{out}} + 1} \quad (21)$$

当 $\overline{\text{SNR}}_{\text{out}} \gg 1$ 时, 分数阶 Fourier 变换的输出信噪比为

$$\text{SNR}_{\text{out}} = \frac{\overline{\text{SNR}}_{\text{out}}}{2} \quad (22)$$

即分数阶 Fourier 变换的输出信噪比比理想情况低 3dB。

当 $\overline{\text{SNR}}_{\text{out}} \ll 1$ 时, 分数阶 Fourier 变换的输出信噪比为

$$\text{SNR}_{\text{out}} = \frac{\overline{\text{SNR}}_{\text{out}}^2}{2} \quad (23)$$

即分数阶 Fourier 变换的输出信噪比是理想情况的 $\frac{\overline{\text{SNR}}_{\text{out}}}{2}$ 倍。

5 结束语

本文研究了分数阶 Fourier 变换检测未知参数 LFM 信号中的信噪比问题。首先从数学上解释了分数阶 Fourier 变换适于处理未知参数 LFM 信号, 然后研究了附加白噪声 LFM 信号在分数阶 Fourier 域的统计特性, 噪声均值在峰值点处近似与调频率成正比, 噪声方差近似与调频率的平方成正比。最后确定了分数阶 Fourier 变换处理未知参数 LFM 信号的输出信噪比。在高信噪比条件下, 与理想情况(即参数已知)下的匹配滤波的输出信噪比比较, 前者仅比后者低 3dB。

参考文献

- [1] Namias V. The fractional order Fourier transform and its applications to quantum mechanics[J]. *Journal of Institute Applied Math*, 1980, 25(3): 241-265.
- [2] Gianfranco Cariolaro. A unified framework for the fractional Fourier transform[J]. *IEEE Trans. on Signal Processing*, 1998, 46(12): 3206-3219.
- [3] Ozaktas H M and B Barshan, et al.. Convolution, filtering and multiplexing in fractional domains and their relation to chirp and wavelet transforms[J]. *Journal of Optical Society America (A)*, 1993, 11(2): 547-559.

- [4] 孙晓兵, 保铮. 分数阶 Fourier 变换及其应用[J]. 电子学报, 1996, 24(12): 60-65.
Xun Xiao-bing and Bao Zheng. Fractional Fourier transform and its application[J]. *Acta Electronica Sinica*, 1996, 24(12): 60-65.
- [5] 陶然, 齐林, 等. 分数阶 Fourier 变换的原理与应用[M]. 北京: 清华大学出版社, 2004: 1-6.
Tao Ran and Qi Lin, *et al.*. Theory and Applications of the fractional Fourier Transform[M]. Beijing: Tsinghua University Press, 2004: 1-6.
- [6] Ozaktas H M and Arikan Orhan, *et al.*. Digital computation of the fractional Fourier transform[J]. *IEEE Trans. on Signal Processing*, 1996, 44(9): 2141-2150.
- [7] Pei Soo-Chang and Yeh Min-Hung, *et al.*. Discrete fractional Fourier transform based on orthogonal projections[J]. *IEEE Trans. On Signal Processing*, 1999, 47(5): 1335-1348.
- [8] Candan C and Kutay M A, *et al.*. The discrete fractional Fourier transform[J]. *IEEE Trans. on Signal Processing*, 2000, 48(5): 1329-1337.
- [9] Almeida L B. The fractional Fourier transform and time-frequency representations[J]. *IEEE Trans. on Signal Processing*, 1994, 42(11): 3084-3091.
- [10] 董永强, 陶然, 等. 基于分数阶 Fourier 变换的 SAR 运动目标检测与成像[J]. 兵工学报, 1999, 20(2):132-136.
Dong Yong-qiang and Tao Ran, *et al.*. SAR moving target detection and imaging based on fractional Fourier transform[J]. *Acta Rmamentarii*, 1999, 20(2): 132-136.
- [11] Sun Hong-Bo and Liu Guo-Sui, *et al.*. Application of the fractional Fourier transform to moving target detection in airborne SAR[J]. *IEEE Trans. on Aerospace and Electronics Systems*, 2002, 38(4): 1416-1424.
- [12] 齐林, 陶然, 等. 基于分数阶 Fourier 变换的多分量 LFM 信号的检测和参数估计[J]. 中国科学, E 辑, 2003,33(8):749-759.
Qi Lin and Tao Ran, *et al.*. Multicomponent LFM signal detection and parameter estimation based on fractional Fourier transform[J]. *Science in China, Series E*, 2003, 33(8): 749-759.
- [13] Barbarossa S. Analysis of multicomponent LFM signals by a combined Wigner-Hough transform[J]. *IEEE Trans. on Signal Processing*, 1995, 43(6): 1511-1515.
- 刘建成: 男, 1976 年生, 博士生, 研究方向为雷达信号处理、雷达与电子战仿真与评估。
- 刘 忠: 男, 1968 年生, 副教授, 在职博士生, 研究方向为雷达信号处理与电子对抗。
- 王雪松: 男, 1972 年生, 教授, 研究方向为雷达信号处理与目标识别、综合电子战、雷达系统仿真。