

非均匀噪声条件下的互质阵列欠定DOA估计方法

孙兵* 阮怀林 吴晨曦 钟华 吴世龙

(国防科技大学电子对抗学院 合肥 230037)

摘要: 针对基于互质阵列的欠定DOA估计方法在非均匀噪声条件下性能下降的问题, 该文提出一种基于协方差矩阵重构和矩阵填充的鲁棒DOA估计方法。首先, 将接收数据协方差矩阵分解, 得到包含非均匀噪声项的对角阵; 然后, 选取对角线元素中的最小值, 替换其余对角线元素, 进而得到重构后的数据协方差矩阵; 最后, 对重构后的协方差矩阵进行扩展和矩阵填充, 结合子空间方法进行DOA估计。理论分析和仿真结果表明, 相对于现有方法, 该文方法有效地抑制了非均匀噪声的影响, 有更好的DOA估计性能。

关键词: 波达方向估计; 互质阵列; 非均匀噪声

中图分类号: TN911.23

文献标识码: A

文章编号: 1009-5896(2021)12-3687-08

DOI: 10.11999/JEIT210027

Underdetermined Direction of Arrival Estimation for Coprime Array in the Presence of Nonuniform Noise

SUN Bing RUAN Huailin WU Chenxi ZHONG Hua WU Shilong

(College of Electronic Engineering, National University of Defense Technology, Hefei 230037, China)

Abstract: The underdetermined Direction Of Arrival (DOA) estimation method based on the coprime array will degrade in the presence of nonuniform noise. To address this problem, a robust DOA estimation method based on covariance matrix reconstruction and matrix completion is proposed in this paper. Firstly, the covariance matrix of the received data is decomposed to obtain a diagonal matrix containing non-uniform noise terms. Then, the minimum value of the diagonal matrix elements is selected to replace the remaining diagonal matrix elements to obtain the reconstructed data covariance matrix. Finally, based on the matrix completion theory, the reconstructed covariance matrix is extended and filled, and the subspace method is used for DOA estimation. Theoretical analysis and simulation results show that, compared with the existing methods, the proposed method suppresses effectively the influence of nonuniform noise and has better DOA estimation performance.

Key words: Direction Of Arrival (DOA); Coprime array; Nonuniform noise

1 引言

波达方向(Direction Of Arrival, DOA)估计广泛应用于雷达信号处理、目标检测、导航等诸多领域, 是阵列信号处理领域的核心研究内容之一。现代电磁环境信源密集且复杂多变, 往往需要利用有限的阵元实现多信源测向。经典的超分辨算法多是针对均匀线性阵列设计, 自由度受阵元个数限制, 由 N 个阵元组成的均匀阵列的可达到的自由度限制

为 $N - 1$, 难以实现欠定条件下的DOA估计。为解决这一问题, 文献[1]提出互质阵列结构模型, 相较于传统均匀阵列, N 阵元的互质阵列, 其自由度可以达到 $O(N^2)$ 。互质阵列之所以具有这一优势是因为其差联合阵中拥有大小为 $O(N^2)$ 的虚拟均匀线阵部分。故该理论框架一经提出便受到了广泛的关注[2-5]。目前, 基于互质阵列的欠定DOA估计经典算法主要包括空间平滑算法[6]、稀疏算法[7]和数组插值算法[8]。这些算法均假设噪声为高斯白噪声, 当噪声模型不满足高斯白噪声时, 基于互质阵列的DOA估计算法性能会严重下降。在实际应用中, 由于阵元间相互耦合、非理想的接收通道以及阵列未校准等因素, 相关色噪声常常出现, 一般情况下, 相关色噪声结构未知, 但某些情况下, 如阵元稀疏布置, 色噪声可以进一步简化为非均匀噪声[9-11]。

收稿日期: 2021-01-08; 改回日期: 2021-03-30; 网络出版: 2021-04-02

*通信作者: 孙兵 sumbing137210@126.com

基金项目: 国家自然科学基金(61171170), 安徽省自然科学基金(1908085QF280)

Foundation Items: The National Natural Science Foundation of China (61171170), The Anhui Province Natural Science Foundation (1908085QF280)

对于非均匀噪声条件下的DOA估计问题,文献[12]对非均匀噪声进行预白化,进而实现鲁棒的DOA估计,但该方法要求阵元数量至少是信源数量的3倍。文献[13]推导了基于最大似然的DOA估计方法,使用迭代方式估计非均匀噪声参数,具有很高的计算复杂度。文献[14]提出了基于子空间的DOA估计方法,但同样需要迭代过程。文献[15]提出了一种非迭代方法,从而降低了计算复杂度并避免了收敛问题。但是,文献[13–15]提出的方法均要求阵元数大于信源数,无法适用于欠定DOA估计。为此,文献[16]提出一种基于压缩感知的DOA估计算法,该方法适用于互质阵列,并在文献[17]进一步扩展到宽带信号,然而,该方法直接从数据协方差矩阵中删除了对角线元素,导致性能下降。文献[18]提出了一种非均匀噪声条件下的互质阵列DOA估计方法,但该方法仅使用差联合阵中连续的虚拟阵元,舍弃了非连续部分,因此无法获得最佳性能。文献[19]针对非均匀噪声背景下欠定DOA估计,提出了基于全变分范数最小化的估计方法,但该方法同样无法利用非连续虚拟阵元。文献[20]充分利用了所有虚拟阵元,然而,该方法为构造无噪声协方差矩阵,直接移除采样协方差矩阵对角线元素,导致对角线元素中的有用信号成分也被移除,造成了信息损失。

针对上述问题,为实现互质阵列在非均匀噪声条件下的鲁棒DOA估计,本文提出一种基于协方差矩阵重构和矩阵填充的DOA估计方法。首先将接收数据协方差矩阵分解,得到包含非均匀噪声项的对角阵。然后选取对角线元素中的最小值替换其余对角线元素得到重构后的协方差矩阵,实现了噪声协方差矩阵预白化,并等效提高了信噪比。最后,为实现欠定DOA估计,对重构后的协方差矩阵进行扩展和矩阵填充,结合子空间方法进行DOA估计。相对于现有方法,该方法充分利用了所有虚拟阵元,有效抑制非均匀噪声的同时不丢失有用信息,提高了估计性能。

2 互质阵列信号模型

互质阵列模型如图1所示,该阵列由两个线性均匀阵列组成,子阵1中包含 N 个阵元,间距为 Md 。子阵2中包含 $2M$ 个阵元,间距为 Nd ,两个子阵共用第1个阵元。其中, M 与 N 是两个互质的整数, $d=\lambda/2$, λ 为入射信号波长。各阵元位置集合可表示为 $\mathbb{P}=\{nMd,0\leq n\leq N-1\}\cup\{mNd,0\leq m\leq 2M-1\}$ 。

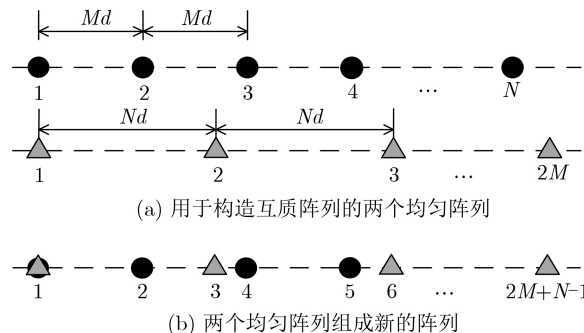


图1 互质阵列示意图

假设有 L 个远场窄带信号分别入射至互质阵列,到达角为: $\theta=[\theta_1,\theta_2,\dots,\theta_L]$,则阵列输出数据可表示为

$$\mathbf{X}(t) = \mathbf{A}\mathbf{S}(t) + \mathbf{N}(t) \quad (1)$$

其中, $\mathbf{X}(t)=[x_1(t),x_2(t),\dots,x_{2M+N-1}(t)]^T$ 为阵列的输出数据, $\mathbf{S}(t)=[s_1(t),s_2(t),\dots,s_L(t)]^T$ 为 L 个入射信号数据矢量, $\mathbf{N}(t)=[n_1(t),n_2(t),\dots,n_{2M+N-1}(t)]^T$ 为噪声矢量, $\mathbf{A}=[\mathbf{a}(\theta_1),\mathbf{a}(\theta_2),\dots,\mathbf{a}(\theta_L)]$ 为流型矩阵, $\mathbf{a}(\theta_i)=[1,e^{-j\frac{2\pi d_1}{\lambda}\sin\theta_i},\dots,e^{-j\frac{2\pi d_{2M+N-1}}{\lambda}\sin\theta_i}]^T$ 为导向矢量, $d_i\in\mathbb{P},i=1,2,\dots,2M+N-1$ 为互质阵列各物理阵元位置,第1个阵元位置 $d_1=0$ 。

假设各入射信号之间是相互独立并且不相关的,可以得到互质阵列接收数据的协方差矩阵

$$\mathbf{R} = \mathbf{E}\{\mathbf{X}(t)\mathbf{X}^H(t)\} = \mathbf{A}\mathbf{R}_S\mathbf{A}^H + \mathbf{Q} \quad (2)$$

其中, $\mathbf{E}\{\cdot\}$ 表示期望运算, $(\cdot)^H$ 表示共轭转置, $\mathbf{R}_S = \mathbf{E}\{\mathbf{S}(t)\mathbf{S}^H(t)\}$ 和 $\mathbf{Q} = \mathbf{E}\{\mathbf{N}(t)\mathbf{N}^H(t)\}$ 分别表示信号协方差矩阵和噪声协方差矩阵。设噪声功率向量为 $\boldsymbol{\sigma}=[\sigma_1^2,\sigma_2^2,\dots,\sigma_{2M+N-1}^2]$,理想条件下,背景噪声为均匀白噪声时, $\sigma_1^2=\sigma_2^2=\dots=\sigma_{2M+N-1}^2=\sigma$,此时 $\mathbf{Q}=\sigma\mathbf{I}$;当背景噪声为非均匀白噪声时,各噪声功率并不相等,噪声协方差矩阵表示为

$$\mathbf{Q} = \text{diag}\{\boldsymbol{\sigma}\} = \text{diag}\{\sigma_1^2,\sigma_2^2,\dots,\sigma_{2M+N-1}^2\} \quad (3)$$

其中, $\text{diag}\{\cdot\}$ 表示对角阵。

实际应用中快拍数 K 有限, \mathbf{R} 由采样协方差矩阵进行等效,即

$$\mathbf{R}_{\text{est}} = \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K \mathbf{X}(t_k)\mathbf{X}^H(t_k) \quad (4)$$

3 非均匀噪声条件下的互质阵列DOA估计方法

3.1 差联合阵列的数据预处理

为了直观分析互质阵列,给出差联合阵列概念,定义集合 \mathbb{S} 为

$$\mathbb{S} = \{p_i - p_j\}, p_i, p_j \in \mathbb{P} \quad (5)$$

其中, \mathbb{P} 为互质阵列各阵元位置集合, p_i 和 p_j 分别表示第 i 和第 j 个阵元位置。 \mathbb{S} 为各阵元位置差构成的集合, \mathbb{S} 中存在相同元素值, 将 \mathbb{S} 中所有不同元素值 p_x 构成的集合定义为 \mathbb{S}_x , p_x 在 \mathbb{S} 中重复出现的

$$\begin{aligned} \mathbf{R} &= \begin{bmatrix} \sum_{l=1}^L s_l^2 & \sum_{l=1}^L s_l^2 e^{-jB} & \cdots & \sum_{l=1}^L s_l^2 e^{-jF} \\ \sum_{l=1}^L s_l^2 e^{jG} & \sum_{l=1}^L s_l^2 & \cdots & \sum_{l=1}^L s_l^2 e^{-jG} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{l=1}^L s_l^2 e^{jP} & \sum_{l=1}^L s_l^2 e^{jQ} & \cdots & \sum_{l=1}^L s_l^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & & & \\ & \sigma_2^2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \sigma_{2M+N-1}^2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} R(0) & R(-M) & \cdots & R(-(2M-1)N) \\ R(M) & R(0) & \cdots & R(M-(2M-1)N) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ R((2M-1)N) & R((2M-1)N-M) & \cdots & R(0) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & & & \\ & \sigma_2^2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \sigma_{2M+N-1}^2 \end{bmatrix} \quad (6) \end{aligned}$$

其中, s_l^2 表示第 l 个入射信号功率, $B=\pi M \sin \theta_l$, $F=\pi(2M-1)N \sin \theta_l$, $G=\pi((2M-1)N-M) \sin \theta_l$, $\{R(p_x) | p_x = -(2M-1)Nd, \dots, (2M-1)Nd\}$ 表示不同波程差对应的协方差矩阵元素。

由式(5)可得各阵元位置之差

$$\begin{aligned} \mathbb{S} &= \{\pm(Mnd - Nmd)\}, \\ 0 \leq n \leq N-1, 0 \leq m \leq 2M-1 \quad (7) \end{aligned}$$

去除重复位置差得到集合 \mathbb{S}_x

$$\mathbb{S}_x = \{-(2M-1)Nd, -2MNd, \dots, (2M-1)Nd\} \quad (8)$$

由式(6)和式(8)可知, 差联合阵虚拟阵元位置与接收数据协方差矩阵 \mathbf{R} 中各元素存在对应关系。由于背景噪声的影响, 同一虚拟阵元对应的多个协方差矩阵元素并不相等, 因此进行平均运算

$$\bar{R}(p_x) = \frac{1}{\omega(p_x)} \sum_{i=1}^{\omega(p_x)} R_i(p_x) \quad (9)$$

其中, $R_i(p_x)$ 表示同一波程差对应的 \mathbf{R} 中第 i 个协方差矩阵元素。

3.2 基于协方差矩阵重构和矩阵填充的DOA估计方法

为了减少非均匀噪声影响, 先对数据协方差矩阵进行重构, 将 \mathbf{R} 分解为如下两个矩阵之和

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}_1 + \mathbf{R}_2 \quad (10)$$

其中, \mathbf{R}_1 和 \mathbf{R}_2 具体表示为

次数定义为 $\omega(p_x)$ 。由互质阵列性质, 集合 \mathbb{S}_x 中各元素值即差联合阵列的虚拟阵元位置, 其中非负元素数为阵列自由度, 直接决定了互质阵列的最大可估计信号数。

由式(2)可得互质阵列接收数据协方差矩阵

$$[\mathbf{R}_1]_{i,j} = \begin{cases} [\mathbf{R}]_{i,j}, & i \neq j \\ 0, & i = j \end{cases} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_2 &= \text{diag} \{ [\mathbf{R}]_{1,1}, [\mathbf{R}]_{2,2}, \dots, [\mathbf{R}]_{2M+N-1, 2M+N-1} \} \\ &= \text{diag} \left\{ \sum_{l=1}^L s_l^2 + \sigma_1^2, \sum_{l=1}^L s_l^2 + \sigma_2^2, \dots, \sum_{l=1}^L s_l^2 + \sigma_{2M+N-1}^2 \right\} \quad (12) \end{aligned}$$

由式(12)可以看出, 非均匀噪声主要影响协方差矩阵对角线元素, 并且对角线元素均为实数, 为了减少非均匀噪声影响, 选取 \mathbf{R}_2 中最小对角线元素记为 $[\mathbf{R}_2]_{\min}$, 显然 $[\mathbf{R}_2]_{\min}$ 是各信号噪声功率之和 $\sum_{l=1}^L s_l^2$ 与最小噪声功率 σ_{\min}^2 的叠加。用 $[\mathbf{R}_2]_{\min}$ 替换 \mathbf{R}_2 所有对角线元素可得

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{R}}_2 &= \text{diag} \{ [\mathbf{R}_2]_{\min}, [\mathbf{R}_2]_{\min}, \dots, [\mathbf{R}_2]_{\min} \} \\ &= \text{diag} \left\{ \sum_{l=1}^L s_l^2 + \sigma_{\min}^2, \sum_{l=1}^L s_l^2 + \sigma_{\min}^2, \dots, \sum_{l=1}^L s_l^2 + \sigma_{\min}^2 \right\} \quad (13) \end{aligned}$$

由式(12)和式(13)可以看出, 重构 \mathbf{R}_2 本质上是对协方差矩阵进行白化处理, 可以有效抑制非均匀噪声的影响。同时, 用最小对角线元素 $[\mathbf{R}_2]_{\min}$ 替换其余对角线元素, 即用最小噪声功率 σ_{\min}^2 替换其他较大噪声功率, 等效提高了信噪比。

得到 $\hat{\mathbf{R}}_2$ 后, 进一步得到重构后的协方差矩阵 $\hat{\mathbf{R}}$

$$\hat{\mathbf{R}} = \mathbf{R}_1 + \hat{\mathbf{R}}_2 \quad (14)$$

得到重构矩阵 $\hat{\mathbf{R}}$ 后, 式(9)进一步变换为

$$\bar{R}(p_x) = \frac{1}{\omega(p_x)} \sum_{i=1}^{\omega(p_x)} \hat{R}_i(p_x) \quad (15)$$

协方差矩阵 $\hat{\mathbf{R}}$ 是 $(2M+N-1) \times (2M+N-1)$ 的矩阵。式(8)得到的差联合阵中存在空洞^[21], 传统方法仅利用连续虚拟阵元构成的均匀阵列, 舍弃非均匀部分, 为了提高虚拟阵元利用率, 对重构后的协方差矩阵 $\hat{\mathbf{R}}$ 进行扩展和填充, 将 $\hat{\mathbf{R}}$ 扩展为 $(2MN-N+1) \times (2MN-N+1)$ 的Toeplitz矩阵 \mathbf{R}_E , 其元素为

$$R_E(i, j) = \begin{cases} \bar{R}((i-j)d), & (i-j)d \in \mathbb{S}_x \\ 0, & (i-j)d \notin \mathbb{S}_x \end{cases} \quad (16)$$

式(14)扩展得到的 \mathbf{R}_E 某些位置元素为零。 \mathbf{R}_E 中的零元素与差联合阵的空洞是一一对应的关系。对 \mathbf{R}_E 中的零元素进行矩阵填充, 即实现了对差联合阵空洞的填充。在一定约束条件下, 由文献[22], 矩阵填充问题可以用如下秩函数最小化模型来描述

$$\begin{cases} \min & \text{rank}(\mathbf{R}_V) \\ \text{s.t.} & \mathbf{P} \cdot \mathbf{R}_V = \mathbf{P} \cdot \mathbf{R}_E \end{cases} \quad (17)$$

其中, \mathbf{R}_V 表示待填充的目标矩阵, $\text{rank}(\mathbf{R}_V)$ 表示 \mathbf{R}_V 的秩。 \mathbf{P} 是投影映射矩阵, 一旦差联合阵确定, 则投影映射矩阵随之确定。具体表示为

$$P(i, j) = \begin{cases} 1, & (i-j)d \in \mathbb{S}_x \\ 0, & (i-j)d \notin \mathbb{S}_x \end{cases} \quad (18)$$

然而矩阵秩函数是一个非凸函数, 所以该问题是一个NP-hard问题, 而矩阵核范数是秩函数的近似, 可以对模型式(17)进行适当的凸松弛

$$\begin{cases} \min & \|\mathbf{R}_V\|_* \\ \text{s.t.} & \mathbf{P} \cdot \mathbf{R}_V = \mathbf{P} \cdot \mathbf{R}_E \end{cases} \quad (19)$$

其中, $\|\mathbf{R}_V\|_*$ 表示 \mathbf{R}_V 的核范数, 核范数最小化可以理解为严格意义上的矩阵填充问题, 直接求解效率不高, 文献[23]提出的奇异值阈值算法(Singular Value Thresholding algorithm, SVT)可以有效求解核范数凸优化问题, 基于SVT算法, 将式(19)转化为一个近似问题

$$\begin{cases} \min & \mu \|\mathbf{R}_V\|_* + \frac{1}{2} \|\mathbf{R}_V\|_F^2 \\ \text{s.t.} & \mathbf{P} \cdot \mathbf{R}_V = \mathbf{P} \cdot \mathbf{R}_E \end{cases} \quad (20)$$

当 $\mu \rightarrow \infty$ 时, 式(20)的最优解逼近式(19)的解。因而通过选取一个较大的 μ 值, 便可以实现凸

松弛。对于式(20)所示的优化问题, SVT算法的求解如下

$$\left. \begin{cases} \mathbf{R}_V^k = D_\mu(\mathbf{Y}^{k-1}), \\ \mathbf{Y}^k = \mathbf{Y}^{k-1} + \delta_k \mathbf{P} \cdot (\mathbf{R}_E - \mathbf{R}_V^k) \end{cases} \right\} \quad (21)$$

其中, \mathbf{Y} 是过渡矩阵。 δ_k 为迭代步长, 如果 $0 < \delta_k < 2$, 则可以保证式(21)的矩阵填充问题收敛。但这一选择过于保守, 收敛速度很慢, 为简单起见, 选择一个与迭代次数无关的参数 $\delta = 1.2 \frac{n^2}{L}$, 其中 n 为方阵 \mathbf{R}_V 的维数, L 为采样数。 D_μ 为奇异值收缩算子。其定义为

$$D_\mu(\mathbf{Y}) \triangleq \mathbf{U} D_\mu(\boldsymbol{\Sigma}) \mathbf{V}^*, D_\mu(\boldsymbol{\Sigma}) = \text{diag}(\{(\sigma_i - \mu)_+\}) \quad (22)$$

其中, $(\sigma_i - \mu)_+ = \max(0, \sigma_i - \mu)$, σ_i 表示 \mathbf{Y} 的奇异值。

式(21)第 k 次迭代中, \mathbf{Y}^{k-1} 的奇异值数目 z_k 计算过程为

$$r_k = \text{rank}(\mathbf{Y}^{k-1}), z_k = r_{k-1} + 1 \quad (23)$$

如果计算的奇异值已经小于 μ , 则说明 z_k 选择正确。否则, 需要重新定义一个增量 h , 增加 z_k 直到奇异值低于 μ 。

在循环迭代时, 如果满足如下条件, 则迭代停止, 输出迭代结果。

$$\frac{\|\mathbf{P} \cdot (\mathbf{R}_V^k - \mathbf{R}_E)\|_F}{\|\mathbf{P} \cdot (\mathbf{R}_E)\|_F} \leq \varepsilon \quad (24)$$

其中, ε 是停止迭代阈值, 例如 10^{-4} 。

K 次快拍接收数据通过式(4)运算等效得到 \mathbf{R} , \mathbf{R} 通过重构、扩展和填充后得到目标矩阵 \mathbf{R}_V , \mathbf{R}_V 包含了 K 次快拍的数据信息, 直接对 \mathbf{R}_V 进行特征分解

$$\mathbf{R}_V = \mathbf{U}_S \boldsymbol{\Sigma}_S \mathbf{U}_S^H + \mathbf{U}_n \boldsymbol{\Sigma}_n \mathbf{U}_n^H \quad (25)$$

其中, \mathbf{U}_S 和 \mathbf{U}_n 其列分别张成信号子空间和噪声子空间。采用MUSIC算法搜索信号谱峰

$$P(\theta_l) = \frac{1}{\mathbf{a}^H(\theta_l) \mathbf{U}_n \mathbf{U}_n^H \mathbf{a}(\theta_l)} \quad (26)$$

根据 $P(\theta_l)$ 中谱峰位置可得波达方向估计值。

综上, 非均匀噪声条件下的互质阵列DOA估计方法步骤如下。

步骤 1 利用式(4), 对 K 快拍的接收数据 $\mathbf{X}(t)$ 进行协方差矩阵运算, 得到协方差矩阵 \mathbf{R} 。

步骤 2 根据式(10)—式(12), 将协方差矩阵 \mathbf{R} 分解为两个协方差矩阵 \mathbf{R}_1 和 \mathbf{R}_2 。

步骤 3 选取 \mathbf{R}_2 中最小对角线元素 $[\mathbf{R}_2]_{\min}$, 并用 $[\mathbf{R}_2]_{\min}$ 替换 \mathbf{R}_2 各对角线元素得到 $\hat{\mathbf{R}}_2$ 。

步骤 4 通过式(14)，进一步得到重构后的协方差矩阵 $\hat{\mathbf{R}}$ 。

步骤 5 通过式(16)将 $\hat{\mathbf{R}}$ 扩展成维数为 $(2MN - N + 1) \times (2MN - N + 1)$ 的Toeplitz矩阵 \mathbf{R}_E 。

步骤 6 将 \mathbf{R}_E 的矩阵填充问题转化为式(17)秩函数最小化模型，再利用式(19)核范数最小化对式(17)进行凸松弛，最后基于奇异值阈值算法实现矩阵填充，得到目标矩阵 \mathbf{R}_V 。结合MUSIC算法进行DOA估计。

4 仿真实验

本节进行仿真实验验证所提算法的有效性。选用 $M = 3, N = 5$ 的互质阵列，阵元数目为 $2M + N - 1 = 10$ 。信噪比定义为

$$SNR = 10 \lg \frac{\text{trace}(\mathbf{R}_S)}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \dots + \sigma_{2M+N-1}^2} \quad (27)$$

均方根误差RMSE定义为

$$RMSE = \sqrt{\frac{1}{JL} \sum_{j=1}^J \sum_{l=1}^L (\hat{\theta}_l(j) - \theta_l)^2} \quad (28)$$

其中， J 为蒙特卡罗实验次数， L 为信号数目， θ_l 为第 l 个入射信号真实角度， $\hat{\theta}_l(j)$ 为 θ_l 的第 j 次估计值。

4.1 可行性分析

将所提算法的性能与3种经典互质阵列DOA估

算法进行比较，包括SS-MUSIC算法^[6]，CO-Lasso算法^[7]和Interpolation算法^[8]。设置MUSIC算法的角度搜索间隔为 0.1° ，CO-Lasso算法的完备字典间隔设置为 0.1° 。设有16个均匀分布于 $-42^\circ \sim 48^\circ$ 方向的远场窄带信号，信噪比 $SNR = 0$ dB，快拍数 $L = 300$ 。非均匀噪声协方差矩阵 $\mathbf{Q} = \text{diag} \{31, 20, 5, 13, 16, 37, 1, 27, 9, 13\}$ 。4种算法的实验结果如图2所示。

由图2可以看出，3种经典互质阵列DOA估计算法效果均不理想，其中SS-MUSIC算法只能对少数信源实现DOA估计，CO-Lasso算法和Interpolation算法对于部分信源估计误差较大，而本文算法可以对全部信源进行较准确的DOA估计。这是因为3种经典算法的基本假设是均匀白噪声背景下，而在非均匀噪声情况下，估计性能下降，本文通过对接收数据协方差进行矩阵重构和填充，有效地抑制了非均匀噪声。

4.2 估计精度分析

将本文所提算法的性能与3种非均匀噪声条件下互质阵列的DOA估计算法进行比较，包括CCVS^[18]算法，TVNM^[19]算法和CMRCS^[20]算法。设有12个均匀分布于 $-42^\circ \sim 35^\circ$ 方向的远场窄带信号。图3和图4分别为均方根误差随信噪比和快拍数的变化关系。图3中，设置快拍数为600，信噪比变化范围为 $-15 \sim 15$ dB，进行300次蒙特卡罗实验。图4中，设置信噪比 SNR 为5 dB，快拍数变化范围

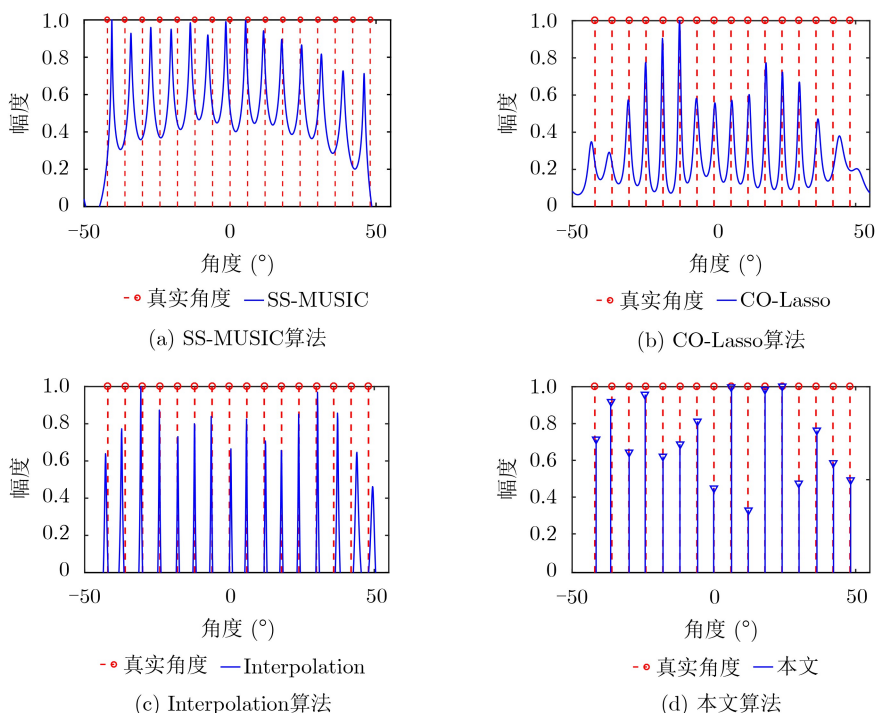


图2 幅相误差条件下的归一化空间谱

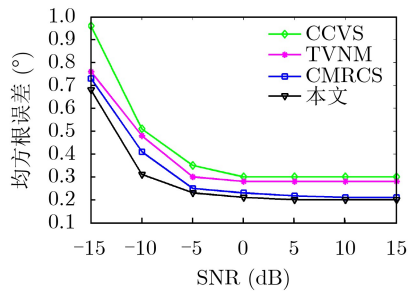


图3 均方根误差随信噪比变化

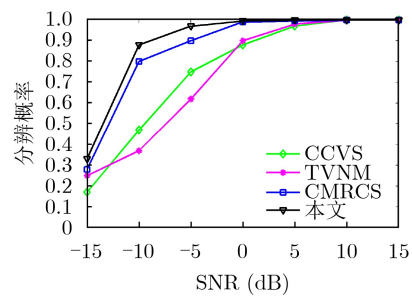


图5 分辨概率随信噪比变化

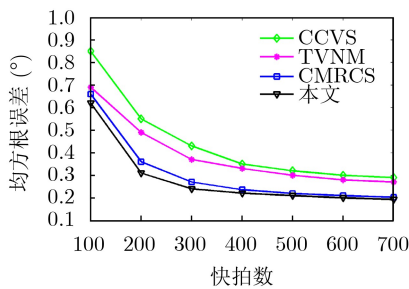


图4 均方根误差随快拍数变化

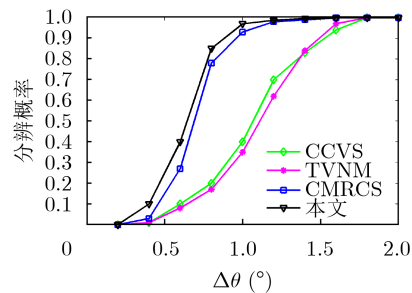


图6 分辨概率随角度间隔变化

为100~700, 进行300次蒙特卡罗实验, 快拍数变化对DOA估计均方根误差的影响。假设非均匀噪声协方差矩阵 \mathbf{Q} 各对角线元素为 $\sigma_m^2, m \in [1, 10]$, 在每次实验中, 从 $[1, 30]$ 范围随机选择各对角线元素 σ_m^2 。

由图3和图4可知, 在相同条件下, 提高信噪比或增加快拍数, 4种算法的角度估计精度均逐步提高, 在设置较高信噪比和快拍数情况下, CCVS算法和TVNM算法估计精度明显低于CMRCS算法和本文算法。这是因为CCVS算法和TVNM算法仅利用了差联合阵列中连续的虚拟阵元, 舍弃了非连续部分, 导致损失了部分有用信息; 并且, 这两种算法本质上是通过对角线元素来实现噪声协方差矩阵白化, 对噪声抑制效果有限。CMRCS算法和本文算法均充分利用了所有的虚拟阵元, 其中, CMRCS算法通过移除采样协方差矩阵对角线元素来构造无噪声协方差矩阵, 移除噪声协方差矩阵对角线元素的同时, 也移除了信号协方差矩阵对角线元素, 造成了信息损失。本文算法则通过选取对角线元素中的最小值替换其余元素, 抑制非均匀噪声的同时保留了有用信息, 因而估计效果更好。

4.3 分辨概率分析

假设两个入射信号真实角度分别为 θ_1 和 θ_2 , 其估计值分别为 $\hat{\theta}_1$ 和 $\hat{\theta}_2$, 如果 $|\hat{\theta}_1 - \theta_1|$ 和 $|\hat{\theta}_2 - \theta_2|$ 均小于 $|\theta_1 - \theta_2|/2$, 则认为两个信号被成功分辨。图5和图6分别为分辨概率随信噪比和角度间隔的变化关

系。图5中, 分别设置 $\theta_1=25^\circ$ 和 $\theta_2=26.5^\circ$, 信噪比变化范围由 $-15 \sim 15$ dB, 进行300次蒙特卡罗实验。图6中, 分别设置 $\theta_1=10^\circ$ 和 $\theta_2 = \theta_1 + \Delta\theta$, 其中角度间隔 $\Delta\theta$ 的变化范围是 $0.2^\circ \sim 2.0^\circ$, 信噪比为0 dB, 快拍数为500, 进行300次蒙特卡罗实验。噪声协方差矩阵 \mathbf{Q} 设置与实验2中相同。

由图5可知, 本文算法角度分辨概率最高, 在信噪比增加至0 dB时, 本文算法和CMRCS算法角度分辨概率均趋于100%, 而CCVS算法和TVNM算法分辨概率相对较低。由图6可知, 在角度间隔增加至 1.4° 时, 本文算法和CMRCS算法分辨概率趋近100%, 且本文算法分辨概率最高, 相比于CCVS算法和TVNM算法有明显的分辨优势。因此, 本文算法在不同信噪比和不同角度间隔情况下均具有明显的高分辨优势。

5 结束语

为了解决互质阵列欠定DOA估计方法在非均匀噪声条件下性能下降的问题, 本文提出一种基于协方差矩阵重构和矩阵填充的DOA估计方法。通过重构接收数据协方差矩阵, 有效抑制了非均匀噪声, 并将重构后的协方差矩阵进行扩展和填充, 实现欠定DOA估计。理论分析和仿真实验表明, 在非均匀噪声条件下, 该方法保证了互质阵列欠定DOA估计的鲁棒性。相对于现有方法, 该方法充分利用了所有虚拟阵元, 有效抑制非均匀噪声的同时不丢失有用信息, 提高了估计性能。

参 考 文 献

- [1] VAIDYANATHAN P P and PAL P. Sparse sensing with co-prime samplers and arrays[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2011, 59(2): 573–586. doi: [10.1109/TSP.2010.2089682](https://doi.org/10.1109/TSP.2010.2089682).
- [2] QIN Si, ZHANG Y D, and AMIN M G. Generalized coprime array configurations for direction-of-arrival estimation[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2015, 63(6): 1377–1390. doi: [10.1109/TSP.2015.2393838](https://doi.org/10.1109/TSP.2015.2393838).
- [3] WANG Xiaomeng and WANG Xin. Hole identification and filling in k -times extended co-prime arrays for highly efficient DOA estimation[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2019, 67(10): 2693–2706. doi: [10.1109/TSP.2019.2899292](https://doi.org/10.1109/TSP.2019.2899292).
- [4] SUN Bing, WU Chenxi, and RUAN Huailin. Array diagnosis and DOA estimation for coprime array under sensor failures[J]. *Sensors*, 2020, 20(9): 2735. doi: [10.3390/s20092735](https://doi.org/10.3390/s20092735).
- [5] RAZA A, LIU Wei, and SHEN Qing. Thinned coprime array for second-order difference co-array generation with reduced mutual coupling[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2019, 67(8): 2052–2065. doi: [10.1109/TSP.2019.2901380](https://doi.org/10.1109/TSP.2019.2901380).
- [6] PAL P and VAIDYANATHAN P P. Coprime sampling and the music algorithm[C]. 2011 Digital Signal Processing and Signal Processing Education Meeting, Sedona, USA, 2011: 289–294. doi: [10.1109/DSP-SPE.2011.5739227](https://doi.org/10.1109/DSP-SPE.2011.5739227).
- [7] ZHANG Y D, AMIN M G, and HIMED B. Sparsity-based DOA estimation using co-prime arrays[C]. 2013 IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing, Vancouver, Canada, 2013: 3967–3971. doi: [10.1109/ICASSP.2013.6638403](https://doi.org/10.1109/ICASSP.2013.6638403).
- [8] ZHOU Chengwei, GU Yujie, FAN Xing, *et al.* Direction-of-arrival estimation for coprime array via virtual array interpolation[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2018, 66(22): 5956–5971. doi: [10.1109/TSP.2018.2872012](https://doi.org/10.1109/TSP.2018.2872012).
- [9] MATVEYEV A L, GERSHMAN A B, and BÖHME J F. On the direction estimation Cramér-Rao bounds in the presence of uncorrelated unknown noise[J]. *Circuits, Systems and Signal Processing*, 1999, 18(5): 479–487. doi: [10.1007/BF01387467](https://doi.org/10.1007/BF01387467).
- [10] GERSHMAN A B, MATVEYEV A L, and BOHME J F. Maximum likelihood estimation of signal power in sensor array in the presence of unknown noise field[J]. *IEE Proceedings - Radar, Sonar and Navigation*, 1995, 142(5): 218–224. doi: [10.1049/ip-rsn:19952141](https://doi.org/10.1049/ip-rsn:19952141).
- [11] PESAVENTO M and GERSHMAN A B. Maximum-likelihood direction-of-arrival estimation in the presence of unknown nonuniform noise[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2001, 49(7): 1310–1324. doi: [10.1109/78.928686](https://doi.org/10.1109/78.928686).
- [12] WU Y, HOU C, LIAO G, *et al.* Direction-of-arrival estimation in the presence of unknown nonuniform noise fields[J]. *IEEE Journal of Oceanic Engineering*, 2006, 31(2): 504–510. doi: [10.1109/JOE.2006.875270](https://doi.org/10.1109/JOE.2006.875270).
- [13] CHEN C E, LORENZELLI F, HUDSON R E, *et al.* Stochastic maximum-likelihood DOA estimation in the presence of unknown nonuniform noise[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2008, 56(7): 3038–3044. doi: [10.1109/TSP.2008.917364](https://doi.org/10.1109/TSP.2008.917364).
- [14] LIAO Bin, CHAN S C, HUANG Lei, *et al.* Iterative methods for subspace and DOA estimation in nonuniform noise[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2016, 64(12): 3008–3020. doi: [10.1109/TSP.2016.2537265](https://doi.org/10.1109/TSP.2016.2537265).
- [15] ESFANDIARI M, VOROBYOV S A, ALIBANI S, *et al.* Non-iterative subspace-based DOA estimation in the presence of nonuniform noise[J]. *IEEE Signal Processing Letters*, 2019, 26(6): 848–852. doi: [10.1109/LSP.2019.2909587](https://doi.org/10.1109/LSP.2019.2909587).
- [16] HE Zhenqing, SHI Zhiping, and HUANG Lei. Covariance sparsity-aware DOA estimation for nonuniform noise[J]. *Digital Signal Processing*, 2014, 28: 75–81. doi: [10.1016/j.dsp.2014.02.013](https://doi.org/10.1016/j.dsp.2014.02.013).
- [17] HE Zhenqing, SHI Zhiping, HUANG Lei, *et al.* Underdetermined DOA estimation for wideband signals using robust sparse covariance fitting[J]. *IEEE Signal Processing Letters*, 2015, 22(4): 435–439. doi: [10.1109/LSP.2014.2358084](https://doi.org/10.1109/LSP.2014.2358084).
- [18] TIAN Ye, SHI Hongyin, and XU He. DOA estimation in the presence of unknown non-uniform noise with coprime array[J]. *Electronics Letters*, 2017, 53(2): 113–115. doi: [10.1049/el.2016.3944](https://doi.org/10.1049/el.2016.3944).
- [19] 吴晨曦, 张旻, 王可人. 非均匀噪声背景下的欠定DOA估计方法[J]. *系统工程与电子技术*, 2018, 40(3): 498–503. doi: [10.3969/j.issn.1001-506X.2018.03.02](https://doi.org/10.3969/j.issn.1001-506X.2018.03.02).
WU Chenxi, ZHANG Min, and WANG Keren. Underdetermined direction of arrival estimation with nonuniform noise[J]. *Systems Engineering and Electronics*, 2018, 40(3): 498–503. doi: [10.3969/j.issn.1001-506X.2018.03.02](https://doi.org/10.3969/j.issn.1001-506X.2018.03.02).
- [20] LIU Ke and ZHANG Y D. Coprime array-based DOA estimation in unknown nonuniform noise environment[J]. *Digital Signal Processing*, 2018, 79: 66–74. doi:

- [10.1016/j.dsp.2018.04.003](https://doi.org/10.1016/j.dsp.2018.04.003).
- [21] 孙兵, 阮怀林, 吴晨曦, 等. 基于Toeplitz协方差矩阵重构的互质阵列DOA估计方法[J]. 电子与信息学报, 2019, 41(8): 1924–1930. doi: [10.11999/JEIT181041](https://doi.org/10.11999/JEIT181041).
SUN Bing, RUAN Huailin, WU Chenxi, *et al.* Direction of arrival estimation with coprime array based on toeplitz covariance matrix reconstruction[J]. *Journal of Electronics & Information Technology*, 2019, 41(8): 1924–1930. doi: [10.11999/JEIT181041](https://doi.org/10.11999/JEIT181041).
- [22] CANDÈS E J and RECHT B. Exact matrix completion via convex optimization[J]. *Foundations of Computational Mathematics*, 2009, 9(6): 717–772. doi: [10.1007/s10208-009-9045-5](https://doi.org/10.1007/s10208-009-9045-5).
- [23] CAI Jianfeng, CANDÈS E J, and SHEN Zuowei. A singular value thresholding algorithm for matrix completion[J]. *SIAM Journal on Optimization*, 2010, 20(4): 1956–1982. doi: [10.1137/080738970](https://doi.org/10.1137/080738970).
- 孙 兵: 男, 1991年生, 博士生, 研究方向为空间信息处理、雷达及雷达对抗理论与技术.
- 阮怀林: 男, 1964年生, 教授, 博士生导师, 研究方向为空间信息处理、雷达及雷达对抗理论与技术、压缩感知理论.
- 吴晨曦: 男, 1988年生, 博士, 讲师, 研究方向为阵列信号处理、稀疏重构技术.
- 钟 华: 男, 1991年生, 博士生, 研究方向为空间信息处理、定位理论与技术.
- 吴世龙: 男, 1978年生, 副教授, 主要研究方向为空间信息处理、定位理论与技术.

责任编辑: 马秀强