

# 圆形外导体-复杂形状内导体 同轴传输线特性阻抗的计算\*

潘 生 根

(上海科技大学无线电系)

**摘要** 本文由 Melentiev 方法将任意复杂形状的单连通区域的外部变换为单位圆的外部, 利用多项式变换函数的性质和复杂形状内导体边界的等效圆半径变化的一般规律, 给出了具有圆形外导体-复杂形状内导体一类传输线的解。通过与文献中准确值的比较, 证实了本文方法的准确性和实用性。

**关键词** 同轴传输线; Melentiev 方法; 特性阻抗

## 1. 引言

在电磁理论和具有相同数学模型的工程技术领域中, 常出现复杂形状的边界问题<sup>[1-5]</sup>。求解此类问题的一种有效方法是用保角变换, 把边界的形状变为简单形状(例如单位圆), 使问题易于求解。但由于没有普遍适用的方法可用来找到解析的变换函数, 因而保角变换法多半限于一些特种截面问题, 例如半平面、多角形等区域。

本文由 Melentiev 方法将任意复杂形状的单连通区域的外部变换为单位圆的外部, 利用作者在文献 [1] 中给出的复杂形状内导体边界的等效圆变化的一般规则, 求解了圆形外导体-复杂形状内导体同轴传输线问题。

## 2. 单连通区域外部的保角变换

多项式变换函数<sup>[6]</sup>

$$Z = \sum_{n=0}^{\infty} \beta_n \xi^{1-n} \quad (1)$$

式中

$$\beta_n = c_n + id_n \quad (2)$$

是将  $\xi$  平面上的单位圆  $D$  的外部 (图 1(a)) 近似地变换为  $Z$  平面上的单连通区域  $B$  的外部 (图 1(b))。

当单连通区域  $B$  具有  $p$  个对称轴时,  $d_n = 0$ , 则 (1) 式为

$$Z = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \xi^{1-pn} \quad (3)$$

假定  $\xi$  平面上的原点变换到  $Z$  平面上的原点, 对单位圆  $D$ ,  $Z$  平面上相应的  $u$  和  $v$

\* 1986年7月25日收到, 1987年1月26日修改定稿

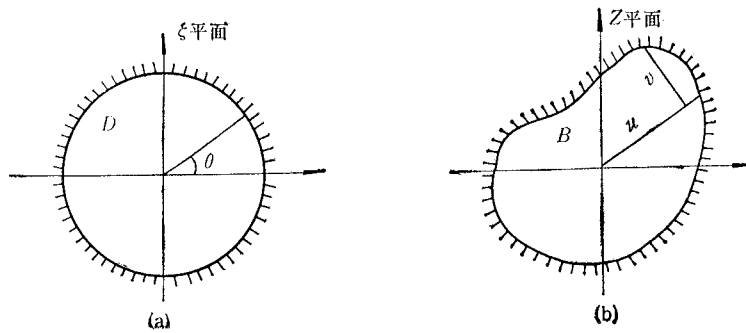


图1 外部区域的保角变换

是<sup>[6]</sup>

$$u = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \cos n\theta + d_n \sin n\theta \quad (4a)$$

$$v = \sum_{n=0}^{\infty} d_n \cos n\theta - c_n \sin n\theta \quad (4b)$$

由 Melentiev 方法,将单位圆 $D$ 分为 $m$ 等分,将 $\theta = 2\pi/m, 4\pi/m, \dots, 2\pi$ 代入(4a),得到有关 $u$ 的求解系数 $c_k$ 和 $d_k$ 的联立方程。求解方程得

$$c_k = \frac{2}{m} \sum_{n=1}^m u_n \cos \frac{2\pi}{m} nk, \quad \left(k = 1, 2, \dots, \frac{m}{2}\right) \quad (5a)$$

$$c_0 = \frac{1}{m} \sum_{n=1}^m u_n \quad (5b)$$

和

$$d_k = \frac{2}{m} \sum_{n=1}^m u_n \sin \frac{2\pi}{m} nk, \quad \left(k = 1, 2, \dots, \frac{m}{2} - 1\right) \quad (6a)$$

$$d_0 = - \sum_{k=1}^{m/2} d_k \quad (6b)$$

显然,当 $m$ 足够大, $d_{m/2} \approx 0$ 。同样,如将 $\theta = 2\pi/m, \frac{4\pi}{m}, \dots, 2\pi$ 代入(4b)式,可得到有关 $v$ 的求解系数 $c_k$ 和 $d_k$ 的联立方程。

如区域 $B$ 具有 $p$ 个对称轴,则将单位圆的 $\pi/p$ 区域分解为 $m$ 等分,将 $\theta = 0, \pi/pm, \dots, (m-1)\pi/pm$ 代入(4a)式,解联立方程得

$$c_0 = \frac{1}{2m} (u_0 + u_m) + \frac{1}{m} \sum_{n=1}^{m-1} u_n \quad (7a)$$

$$c_m = \frac{1}{2m} [u_0 + (-1)^m u_m] + \frac{1}{m} \sum_{n=1}^{m-1} u_n \quad (7b)$$

$$c_k = \frac{1}{m} [u_0 + (-1)^k u_m] + \frac{2}{m} \sum_{n=1}^m u_n \cos \frac{\pi}{m} nk \quad (7c)$$

式中 $1 \leq k \leq m-1$ 。

作为举例,下面给出将 $\xi$ 平面上单位圆的外部近似地变换到 $Z$ 平面上正 $n$ 边形的外

部的多项式变换函数。对正三角形,求得的近似变换函数是

$$Z = 1.4609\xi - 0.4889\xi^{-2} + 0.0353\xi^{-5} - 0.0107\xi^{-8} + \dots \quad (8)$$

对正四边形,多项式变换函数是

$$Z = 1.1803\xi - 0.1969\xi^{-3} + 0.0216\xi^{-7} - 0.0071\xi^{-11} + \dots \quad (9)$$

对正五边形,多项式变换函数是

$$Z = 1.0986\xi - 0.1098\xi^{-4} + 0.0148\xi^{-9} - 0.0053\xi^{-14} + \dots \quad (10)$$

对正六边形,多项式变换函数是

$$Z = 1.0626\xi - 0.0709\xi^{-5} + 0.0108\xi^{-11} - 0.0040\xi^{-17} + \dots \quad (11)$$

### 3. 圆形外导体-复杂形状内导体同轴传输线的特性阻抗的计算

对图 2(a) 所示的圆形外导体-复杂形状内导体同轴传输线,如用多项式变换式(1)式或(3)式将复杂形状内导体变换为单位圆,但变换后的圆形外导体则往往不再是圆,问题的精确求解仍非常困难。

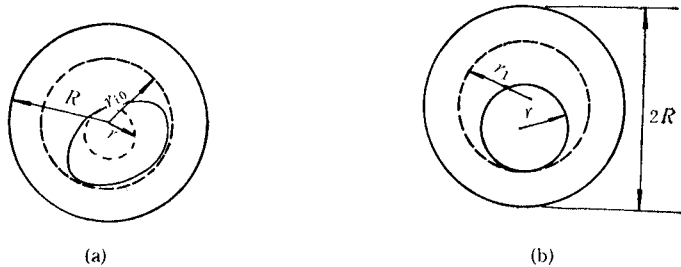


图 2 圆形外导体-复杂形状内导体同轴传输线截面图

当传输线直径比  $r/R \approx 0$  (接近于 0) 时,  $|\xi| \gg 1$ , 多项式(1)式或(3)式中的高阶项是可忽略的,这时外导体边界的变换是线性变换,具有几何图形的不变性,则圆形外导体的等效半径是

$$R_{e0} = \frac{R}{|\beta_0|} \quad (12)$$

由圆形同轴传输线特性阻抗的计算公式,得当  $r/R \approx 0$  时,圆形外导体-复杂形状内导体同轴传输线的特性阻抗值是

$$Z = 59.952 \ln \left( \frac{R}{|\beta_0| r} \right) \quad (13)$$

因为复杂形状内导体的等效圆的归一化半径  $r_{ei}$  是传输线内、外导体直径比  $r/R$  的单调增函数<sup>[4]</sup>,所以可用图 2(b) 所示的偏心同轴传输线来近似等效图 2(a) 的复杂截面传输线,从而得到问题的解。

由优选法,选择复杂形状内导体外接圆半径  $r_{i0}$  和等效圆半径  $r_{ei}$  之间的 0.3105 处,作为等效偏心同轴线内导体的外接圆的半径  $r_1$ ,即

$$r_1 = r_{i0} - (r_{i0} - r_{ei}) \times 0.3105 = \alpha r \quad (14)$$

式中

$$r_{ei} = |\beta_0| r \quad (15)$$

则等效偏心同轴线的内、外导体直径比是

$$\frac{d}{2R} = (1 - E)r_1/R = (1 - E)\alpha r/R \quad (16)$$

式中  $E$  是偏心同轴线的的偏心率。

利用偏心同轴线特性阻抗的计算公式,得

$$Z = 59.952 \ln(G + \sqrt{G^2 - 1}) \quad (17)$$

式中

$$G = \frac{1}{2} \left\{ \frac{d}{2R} + \frac{4R}{d} (1 - E) [1 - (1 - E)/2] \right\} \quad (18)$$

式中等效偏心同轴线的偏心率  $E$  可由  $r/R \approx 0$  时, (17) 式算出的特性阻抗值与 (13) 式小线近似的结果相等的条件求出。如果  $E$  值确定, 我们就确定了等效偏心同轴传输线等效的几何参数 ( $d, R, E$ ), 即得到相应的复杂形状外导体-圆形内导体同轴传输线的特性阻抗计算公式。下面选用圆形外导体-正三、四边形内导体同轴传输线 (图 3) 为例, 验证本文方法的准确性

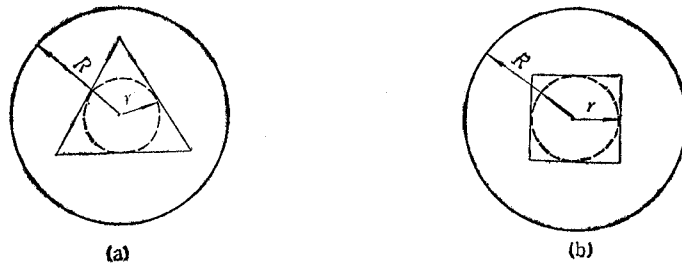


图 3 圆形外导体-正三、四边形内导体同轴传输线截面图

对圆形外导体-方形内导体同轴传输线问题 (图 3(b)), 将 (9) 式中的  $c_0$  代入 (13) 式, 求出  $r/R = 0.05$  时该种传输线的特性阻抗值, 从而解得等效偏心同轴传输线的偏心率  $E = 0.13693$ , 将  $E$  值代入 (17)、(18) 式, 得圆形外导体-方形内导体同轴传输线的特性阻抗的计算公式

表 1 本文方法和文献中的圆形外导体-方形内导体同轴传输线特性阻抗值的比较

$r/R$	$Z_0$ (本文(21)式)	$Z_0$ (保角变换—— 算术平均法 <sup>[43]</sup> )	$Z_0$ (保角变换—— 几何平均法 <sup>[43]</sup> )	$Z_0$ (保角变换—— 点匹配法 <sup>[43]</sup> )	$Z_0$ (本征函数展开 法 <sup>[43]</sup> )
0.05	169.67	169.67	169.67	169.59	169.59
0.1	128.10	128.11	128.11	128.05	127.95
0.2	86.50	86.55	86.55	86.51	86.33
0.3	62.10	62.24	62.22	62.21	61.99
0.4	44.69	44.98	44.97	44.93	44.70
0.5	31.02	31.52	31.49	31.40	31.20
0.6	19.54	20.20	20.03	19.67	19.76
0.65	14.20				14.08
0.7	8.71	8.85	6.28	4.23	

$$Z_0 = 59.952 \ln [0.57895r/R + 0.42372R/r + \sqrt{(0.57895r/R + 0.42372R/r)^2 - 1}] \quad (19)$$

将(19)式算出的特性阻抗值与文献中的准确值的比较结果,列于表1。从表1可知,本文的数值与文献[4]的三种方法和文献[5]用本征函数展开法得到的结果相符。

对图3(a)所示的圆形外导体-正三角形内导体同轴传输线,将(8)式中的 $c_0$ 值代入(13)式,求出 $r/R = 0.05$ 时该种传输线的特性阻抗值,从而解得等效偏心同轴传输线的偏心率 $E = 0.25487$ ,将 $E$ 值代入(17)、(18)式,得圆形外导体-正三角形内导体同轴传输线的计算公式

$$Z_0 = 59.952 \ln [0.68279r/R + 0.34237R/r + \sqrt{(0.68279r/R + 0.34237R/r)^2 - 1}] \quad (20)$$

表2给出了用(20)式算出的特性阻抗值。由表2可知,本文方法计算的该种传输线特性阻抗值与文献[5]和[7]的结果基本一致。

表2 本文方法和文献中的圆形外导体-正三角形内导体同轴传输线特性阻抗值的比较

$r/R$	0.05	0.1	0.2	0.3	0.4	0.45
$Z_0(\Omega)$ (本文(22)式)	156.87	115.25	73.42	48.54	30.12	22.00
$Z_0(\Omega)$ [7]	—	115.76	73.69	48.85	31.00	23.59
$Z_0(\Omega)$ [5]	155.20	113.58	71.95	47.40	28.86	—

#### 4. 结论

本文利用多项式保角变换函数,由图形近似等效的概念,得到了圆形外导体-复杂形状内导体同轴传输线特性阻抗的计算公式,通过具体的数值比较,证实其是准确可用的。本文方法的进一步应用将另文给出<sup>[8]</sup>。

#### 参 考 文 献

- [1] 潘生根, 中国科学, A 辑, 1986 年第 9 期, 第 999 页.
- [2] 林为干, 微波理论与技术, 科学出版社, 1979 年.
- [3] P. Laura, L. Luisoni, *IEEE Trans. on MTT*, **MTT-25**(1977), 160.
- [4] W. Lin (林为干), *IEEE Trans. on MTT*, **MTT-29**(1981), 1981.
- [5] T. Seshadri, K. Rajaiah, *Proc. IEEE*, **70**(1982), 82.
- [6] L. Kantorokitch, V. Krylov, *Approximate Methods of Higher Analysis*, Interscience Publishers, Inc., 1958.
- [7] K. Tsuruta and R. Terakado, *IEEE Trans. on MTT*, **MTT-28** (1980), 147.
- [8] S. G. Pan (潘生根), *IEEE Trans. on MTT*, **MTT-35**(1987), 61.

---

## THE CHARACTERISTIC IMPEDANCE OF THE COAXIAL SYSTEM CONSISTING OF A CIRCULAR OUTER CONDUCTOR AND AN IRREGULAR INNER CONDUCTOR

Pan Shenggen

*(Department of Radio Electronics, Shanghai University of Science and Technology)*

**ABSTRACT** In this paper, the transformation of an exterior of a simply-connected region into an exterior of a unit circle is made by Melentiev's method and a formula is presented for determining the characteristic impedance of a coaxial transmission line consisting of a circular outer conductor and an irregular inner conductor. The validity of the formula is confirmed by numerical results.

**KEY WORDS** Coaxial transmission line; Melentiv's method; Characteristic impedance