

# 关于轴向磁场的自由电子激光器增益特性\*

应润杰 黄信一

(中国科学院电子学研究所)

## 提 要

本文从流体力学——麦克斯韦方程组出发，用拉氏变换方法求得了考虑轴向磁场的自由电子激光器的增益公式。数值计算和色散关系的分析表明，当迴旋频率 $\Omega$ 接近于入射波频率 $\omega_i$ 与电子等离子体频率 $\omega_p$ 之差 $\omega_i - \omega_p$ 时，增益会大大下降，并且增益与泵浦-信号失配关系曲线的峰值的位置也会由原来的 $\omega_p$ 向低的方向移动。我们可以利用 $\Omega \approx \omega_i - \omega_p$ 时出现增益零点的现象来推算 $\omega_p$ 。

## 一、引 言

利用强电流( $I > 1\text{kA}$ )和低能量( $\gamma < 10$ )的电子束产生自由电子激光的工作原理是基于受激喇曼(Raman)散射。文献[1, 2]曾经从流体力学——麦克斯韦耦合方程组出发，用拉氏变换方法讨论了这个问题，但是没有考虑轴向磁场 $B_{0z}$ 。我们知道，为了使电子束在传播过程中保持好的质量，必须加一个足够强的轴向磁场<sup>[3]</sup>。此外，轴向磁场的存在会使电子作迴旋运动，当迴旋频率接近入射波频率时发生谐振也是提高增益的一个可能途径<sup>[4, 5]</sup>。因此轴向磁场对增益的影响这个问题最近已经引起了很大的注意，发表的理论 and 实验工作已很多<sup>[6-8]</sup>，工作集中在与入射波的谐振和电子的零级轨道有关的两个方面。对于喇曼自由电子激光器，电子等离子体频率 $\omega_p$ 相当高，由三波相互作用所需满足的频率匹配条件知道：散射波的频率与入射波的频率相差会相当大，当迴旋频率接近于散射波频率时，喇曼自由电子激光器的行为如何是一个令人感兴趣的问题。所以有必要对轴向磁场的影响作进一步的分析。

我们在束坐标架中从考虑了轴向磁场的流体力学——麦克斯韦方程组出发，用拉氏变换方法求得了散射电磁场。对增益公式的数值计算和色散关系的仔细分析表明，当迴旋频率接近于 $\omega_i - \omega_p$ 时的主要结果有两个：(1)增益会下降至零，(2)增益与泵浦-信号失配曲线的极值位置会从原来的 $\omega_p$ 向低的方向移动。

## 二、增益公式

考虑一个以 $V_0$ 速度沿 $z$ 轴前进的相对论性电子束，它受到一个均匀的轴向磁场和-

\* 1983年2月9日收到。

个振幅为  $B_{0\perp}$  的右旋横向摆动磁场

$$\mathbf{B} = B_{0z}\hat{e}_z + B_{0\perp}(\cos k_i^L z^L \hat{e}_x + \sin k_i^L z^L \hat{e}_y) \quad (1)$$

上角标“L”表示是实验室坐标架中的量。我们将在束坐标架中讨论。由洛伦兹变换容易得到在束坐标架中电子束所受到的场。此时除了磁场  $\mathbf{B} = B_{0z}\hat{e}_z + \mathbf{B}_{\perp i}$  外,还有一个电场,我们用矩阵写出来是:

$$\mathbf{E}_{\perp i} = \begin{pmatrix} E_{xi} \\ E_{yi} \end{pmatrix} e^{i(\mathbf{k}_i \cdot \mathbf{x} - \omega_i t)} + c.c., \quad (2)$$

*c.c.* 表示第一项的复共轭, 矩阵中的第一行表示  $x$  方向分量, 第二行表示  $y$  方向分量;

$$\mathbf{k}_i = -\gamma_0 k_i^L \hat{e}_z, \quad \omega_i = \gamma_0 k_i^L V_0, \quad \gamma_0 = (1 - \beta_0^2)^{-\frac{1}{2}}, \quad \beta_0 = V_0/c; \quad E_{yi} = iE_{xi} = \frac{1}{2} \beta_0 \gamma_0 B_{0\perp}.$$

磁场的垂直分量有同样的形式, 矩阵的两个分量是  $B_{xi} = \frac{1}{2} \gamma_0 B_{0\perp}$ ,  $B_{yi} = \frac{i}{2} \gamma_0 B_{0\perp}$ . 散射波  $\mathbf{E}_s = E_{s0}(t) \sin(\mathbf{k}_s \cdot \mathbf{x} - \omega_{s0} t) \hat{e}_x + E_{s0}(t) \cos(\mathbf{k}_s \cdot \mathbf{x} - \omega_{s0} t) \hat{e}_y$ , 写成矩阵形式:

$$\mathbf{E}_s = \begin{pmatrix} E_{xs}(t) \\ E_{ys}(t) \end{pmatrix} e^{-i\mathbf{k}_s \cdot \mathbf{x}} + c.c., \quad (3)$$

其中  $E_{xs} = iE_{ys} = \frac{i}{2} E_{s0}(t) e^{i\omega_{s0} t}$ ; 只考虑向后散射,  $\mathbf{k}_s = k_s \hat{e}_z$ ; 由麦克斯韦方程知  $B_{ys} \simeq E_{xs}$ ,  $B_{xs} \simeq -E_{ys}$ .

对于纵波可以写成  $\phi(\mathbf{x}, t) = \phi(t) e^{i\mathbf{k}_l \cdot \mathbf{x}}$ ,  $\phi(\mathbf{x}, t)$  是与纵波相联系的物理量, 例如密度  $n$ , 速度  $\mathbf{v}_e$ , 电场  $\mathbf{E}_l$  等. 在本文中我们将泵浦波按零级处理, 散射波和纵波按一级处理, 于是体系物理量可写成:

$$\left. \begin{aligned} n &= n_0 + n_l, \\ \mathbf{v} &= \mathbf{v}_i + \mathbf{v}_s + \mathbf{v}_l, \\ \mathbf{E} &= \mathbf{E}_i + \mathbf{E}_s + \mathbf{E}_l, \\ \mathbf{B} &= B_{0z}\hat{e}_z + \mathbf{B}_i + \mathbf{B}_s. \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

其中  $n_0$  为未扰动时的电子束密度; 下角标“ $l$ ”、“ $s$ ”、“ $i$ ”分别表示是与纵波、散射波、入射泵浦波相联系的量. 由于横波不能引起密度的压缩, 所以密度扰动只有  $l$  成份. 略去二级小量我们得入射波引起的速度  $\mathbf{v}_i$  所满足的方程:

$$\begin{pmatrix} i\omega_i & -\Omega \\ \Omega & i\omega_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_{xi} \\ v_{yi} \end{pmatrix} = \frac{e}{m} \begin{pmatrix} E_{xi} \\ E_{yi} \end{pmatrix}, \quad (5)$$

其中  $\Omega = eB_{0z}/m_e c$ , 即电子回旋频率, 这里我们没有考虑  $\mathbf{v}_i$  引起的相对论修正, 这对于喇曼自由电子激光器来说, 一般是合理的, 由(5)式解得

$$\begin{pmatrix} v_{xi} \\ v_{yi} \end{pmatrix} = \frac{e\beta_0 \gamma_0 B_{0\perp}}{2m_e(\Omega - \omega_i)} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}, \quad (6)$$

在这里我们看到当回旋频率与入射波频率接近时, 会使抖动速度加大, 从而使散射过程的增长率增加.

对于纵波, 密度、速度和电场满足方程:

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} n_l \\ n_0 \end{pmatrix} = i(k_i + k_s) v_l, \quad (7)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_l}{\partial t} = & -\frac{e}{m_e} E_e + \frac{e}{m_e c} (E_{xi} E_{yi}) \begin{pmatrix} v_{xs} \\ v_{ys} \end{pmatrix} e^{-i\omega_l t} \\ & - \frac{e^2}{m_e^2 c} \frac{1}{-\omega_i^2 + \Omega^2} (E_{xi} E_{yi}) \begin{pmatrix} i\omega_i & -\Omega \\ \Omega & i\omega_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_{xs} \\ E_{ys} \end{pmatrix} e^{-i\omega_l t}, \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 E_l}{\partial t^2} = & -\omega_p^2 E_l + \frac{\omega_p^2}{c} (E_{xi} E_{yi}) \begin{pmatrix} v_{xs} \\ v_{ys} \end{pmatrix} e^{-i\omega_l t} \\ & - \frac{\omega_p^2 e}{m_e c} \frac{1}{-\omega_i^2 + \Omega^2} (E_{xi} E_{yi}) \begin{pmatrix} i\omega_i & -\Omega \\ \Omega & i\omega_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_{xs} \\ E_{ys} \end{pmatrix} e^{-i\omega_l t}, \end{aligned} \quad (9)$$

其中电子等离子体频率  $\omega_p^2 = 4\pi n_0 e^2 / m_e$ 。在推导中已利用了三波相互作用的 Manley-Rowe 关系  $k_l = k_i - k_s$ 。

对于散射波,速度和电场满足方程:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial t} & \Omega \\ -\Omega & \frac{\partial}{\partial t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_{xs} \\ v_{ys} \end{pmatrix} = -\frac{e}{m_e} \begin{pmatrix} E_{xs} \\ E_{ys} \end{pmatrix}, \quad (10)$$

$$\begin{aligned} \left( c^2 k_s^2 + \omega_p^2 + \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \begin{pmatrix} E_{xs} \\ E_{ys} \end{pmatrix} = & 4\pi n_0 e \begin{pmatrix} 0 & -\Omega \\ \Omega & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_{xs} \\ v_{ys} \end{pmatrix} \\ & + \frac{\omega_p^2}{-\omega_i^2 + \Omega^2} \begin{pmatrix} i\omega_i & \Omega \\ -\Omega & -i\omega_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -E_{xi} \\ E_{yi} \end{pmatrix} \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{n_1}{n_0} e^{i\omega_l t} \right). \end{aligned} \quad (11)$$

这里顺便指出,在推导(10)式时,已利用  $\mathbf{v}_l \cdot \nabla \mathbf{v}_l = -\frac{e}{m_e c} \mathbf{v}_l \times \mathbf{B}_l$ , 将洛伦兹力消去。对(7)–(11)式作拉氏变换,假设除散射波的初值不为零外,其余量的初值都为零,经过一些代数运算,便得:

$$\begin{pmatrix} E_{xs}(p) \\ E_{ys}(p) \end{pmatrix} = (p + i\omega_{s0}) E_{s0}(0) \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \frac{i}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad (12)$$

其中  $p$  是拉氏变换参数,  $\omega_{s0}$  为初始散射波频率,它应满足关系

$$\omega_{s0}^2 = c^2 k_s^2 + \omega_p^2 + \frac{\omega_p^2 \Omega}{\omega_{s0} - \Omega};$$

矩阵元的表达式是:

$$\begin{aligned} A_{11} = & c^2 k_s^2 + \omega_p^2 + p^2 - \frac{\omega_p^2 \Omega}{p^2 + \Omega^2} + \frac{ic(k_i + k_s)\omega_p^2 PM(2\Omega - \omega_i + ip)}{[\omega_p^2 + (p - i\omega_i)^2](\Omega - \omega_i)^2(ip + \Omega)}, \\ A_{12} = & -\frac{\omega_p^2 \Omega p}{p^2 - \Omega^2} - \frac{\omega_p^2 c(k_i + k_s)PM(2\Omega - \omega_i + ip)}{(\Omega - \omega_i)^2[\omega_p^2 + (p - i\omega_i)^2](ip + \Omega)}, \\ A_{22} = & A_{11}, \quad A_{12} = -A_{21}, \quad M = \frac{e^2 \beta_0^2 \gamma_0^2 B_{0\perp}^2}{4m_e^2 c^2}. \end{aligned}$$

作拉氏反演,便得:

$$\begin{pmatrix} E_{x_s}(t) \\ E_{y_s}(t) \end{pmatrix} = \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} \frac{(ip + \Omega)[(p - i\omega_i)^2 + \omega_p^2](p + i\omega_{s0})E_{s0}(0)e^{pt} dp}{F(p)} \begin{pmatrix} \frac{i}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad (13)$$

式中

$$F(p) = (p^2 + \omega_p^2 + c^2 k_s^2)(ip + \Omega)[(p - i\omega_i)^2 + \omega_p^2] - \omega_p^2 \Omega [(p - i\omega_i)^2 + \omega_p^2] + \frac{2ic(k_i + k_s)\omega_p^2 PM(2\Omega + ip - \omega_i)}{(\Omega - \omega_i)^2}.$$

为了方便起见,引入无量纲量  $\delta = i(p - i\omega_{s0})t$ ,  $\delta_p = \omega_p t$ ,  $\delta_\Omega = \Omega t$ ,  $\delta_s = \omega_{s0} t$ ,  $\delta_i = \omega_i t$ , 以及泵浦-信号失配  $\delta_0 = (\omega_i - \omega_{s0})t$ , 并作近似  $(p^2 + \omega_{s0}^2) \simeq 2i\omega_{s0}(p - i\omega_{s0})$ ,  $c(k_i + k_s) \simeq \omega_i + \omega_s$ , (13) 式便可写成:

$$\begin{pmatrix} E_{x_s}(t) \\ E_{y_s}(t) \end{pmatrix} = \frac{-1}{2\pi i} E_{s0}(0) e^{i\omega_{s0} t} \begin{pmatrix} \frac{i}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{[\delta - (\delta_s - \delta_\Omega)][\delta + (\delta_0 + \delta_p)][\delta + (\delta_0 - \delta_p)] e^{-i\delta} d\delta}{F(\delta)}, \quad (14)$$

式中

$$F(\delta) = \delta[\delta - (\delta_s - \delta_\Omega)][\delta + (\delta_0 + \delta_p)][\delta + (\delta_0 - \delta)] - \frac{\delta_p^2 \delta_\Omega \delta}{2\delta_s(\delta_s - \delta_\Omega)} [\delta + (\delta_0 + \delta_p)][\delta + (\delta_0 - \delta_p)] + \frac{(\delta_i + \delta_s)\delta_p^2 M t^2}{(\delta_\Omega - \delta_i)^2} (\delta - \delta_s - \delta_i + 2\delta_\Omega).$$

用留数定理可以求得  $t$  时刻的散射波:

$$\mathbf{E}_s(t) = Q(t) E_{s0}(0) e^{i\omega_{s0} t} \begin{pmatrix} \frac{i}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad (15)$$

$$Q(t) = \left\{ \frac{G(\delta_1) e^{-i\delta_1}}{\delta_1(\delta_1 - \delta_2)(\delta_1 - \delta_3)(\delta_1 - \delta_4)} + \delta_1 \text{ 与 } \delta_2, \delta_3, \delta_4 \text{ 互换} \right\}, \quad (16)$$

$$G(\delta) = \frac{\delta_p^2 \delta_\Omega \delta}{2\delta_s(\delta_s - \delta_\Omega)} [\delta + (\delta_0 + \delta_p)][\delta + (\delta_0 - \delta_p)] - \frac{(\delta_i + \delta_s)\delta_p^2 M t^2 [\delta - \delta_s - \delta_i + 2\delta_\Omega]}{(\delta_\Omega - \delta_i)^2}, \quad (17)$$

其中  $\delta_1, \delta_2, \delta_3, \delta_4$  是  $F(\delta) = 0$  的四个根. 增益的定义是:

$$\text{增益} = \frac{E_{s0}^*(t) E_{s0}(t) - E_{s0}^*(0) E_{s0}(0)}{E_{s0}^*(0) E_{s0}(0)} = Q^* Q - 1. \quad (18)$$

式中“\*”表示复共轭.

### 三、色散关系分析

$F(p) = 0$  是散射波所需满足的非线性色散关系. 如果令  $p = i\omega_s$ ,  $\omega_i = \omega_i - \omega_s$ , 上述关系又可写成:

$$\left(c^2 k^2 - \omega_s^2 + \omega_p^2 \frac{\omega_s}{\omega_s - \Omega}\right) \left(1 - \frac{\omega_l^2}{\omega_p^2}\right) = \frac{(k_l + k_r) \omega_s e^2 \beta_0^2 \gamma_0^2 B_{0\perp}^2 (2\Omega - \omega_i - \omega_s)}{2cm_e^2 (\Omega - \omega_i)^2 (\Omega - \omega_s)}. \quad (19)$$

可近似认为  $(2\Omega - \omega_i - \omega_s) \approx 2(\Omega - \omega_s)$ ,  $\omega_s = k_s c$ , 并注意到  $k_l = k_i + k_r \approx 2k_s$ , 设耦合系数为  $\frac{1}{2} k_l^2 \frac{e^2 \beta_0^2 \gamma_0^2 B_{0\perp}^2}{(\Omega - \omega_i)^2 m_e^2} \equiv \Lambda$ . 这个结果与文献 [4, 5] 一致, 但是他们对它没有作仔细的分析.

引入由于非线性相互作用引起的增量  $\theta$ , 其实部是频移, 虚部是增长率(或阻尼率). 于是有  $\omega_i = \omega_{i0} + \theta$ ,  $\omega_s = \omega_{s0} - \theta$ ,  $\omega_{l0} = \omega_i - \omega_{s0}$  为泵浦-信号失配. 一般可合理地假设  $\theta \ll \omega_{s0}$ ,  $\theta$  与  $\omega_p$  相比是否能够略去, 要视泵浦的强弱而定, 若能略去我们称弱泵浦情况, 反之我们称强泵浦情况.

先讨论强泵浦情况, 利用  $\theta \ll \omega_{s0}$  可将 (19) 式化成:

$$\left[2\omega_{s0}\theta + \frac{\theta\omega_p^2\Omega}{(\omega_{s0} - \Omega - \theta)(\omega_{s0} - \Omega)}\right] (\theta + \omega_{l0} - \omega_p)(\theta + \omega_{l0} + \omega_p) = -\omega_p^2\Lambda. \quad (20)$$

(1) 当  $|\omega_{s0} - \Omega| \gg \theta$  时, 则 (20) 式化成:

$$\theta(\theta + \omega_{l0} - \omega_p)(\theta + \omega_{l0} + \omega_p) = \frac{-\Lambda\omega_p^2}{2\omega_{s0} + \frac{\omega_p^2\Omega}{(\omega_{s0} - \Omega)^2}}. \quad (21)$$

这个色散关系形式上与无磁场情况完全相同. 我们看到, 磁场的效应是在  $\Omega$  接近  $\omega_i$  时使泵浦显著增强, 但在  $\Omega$  接近  $\omega_{s0}$  时使泵浦减弱. 方程 (21) 的形式与文献 [1] 的结果完全相同, 因此可以类似地进行讨论, 只是在结果中要考虑磁场的影响. 例如当

$$\omega_{l0} - \omega_p \gg \omega_p \quad \text{和} \quad \frac{\Lambda}{2\omega_{s0} + \frac{\omega_p^2\Omega}{(\omega_{s0} - \Omega)^2}} \gg \omega_p$$

时, 有振幅按指数增长的振荡双流不稳类型的解, 增长率是:

$$\Gamma = \frac{\sqrt{3}}{2} \left[ \frac{\Lambda\omega_p^2}{2\omega_{s0} + \frac{\omega_p^2\Omega}{(\omega_{s0} - \Omega)^2}} \right]^{1/2}. \quad (22)$$

当  $\frac{\Lambda\omega_p^2}{2\omega_{s0} + \frac{\omega_p^2\Omega}{(\omega_{s0} - \Omega)^2}} \ll 1$  和  $\omega_p \rightarrow 0$  时, 同样有类似于文献 [6] 的单粒子增益公式, 只是现在包括了磁场的效应:

$$\text{增益} = \left[ \frac{\omega_{s0}}{2\omega_{s0} + \frac{\omega_p^2\Omega}{(\omega_{s0} - \Omega)^2}} \right]^2 \left\{ 1 - \frac{4\Lambda\omega_p^2}{2\omega_{s0} + \frac{\omega_p^2\Omega}{(\omega_{s0} - \Omega)^2}} \frac{d}{d\omega_{l0}} \left( \frac{\sin\left(\frac{\omega_{l0}t}{2}\right)}{\omega_{l0}t} \right)^2 \right\} - 1. \quad (23)$$

(2) 当  $\theta \gg |\omega_{s0} - \Omega|$  时, 则 (20) 式可化成:

$$\left(2\omega_{s0}\theta - \frac{\omega_p^2\Omega}{\omega_{s0} - \Omega}\right) (\theta + \omega_{l0} - \omega_p)(\theta + \omega_{l0} + \omega_p) = -\Lambda\omega_p^2. \quad (24)$$

作变换  $\theta' = \theta - \frac{\omega_p^2\Omega}{2\omega_{s0}(\omega_{s0} - \Omega)}$ , (24) 式可改写成:

$$\begin{aligned} & \theta' \left[ \theta' + \omega_{l0} - \left( \omega_p - \frac{\omega_p^2 \Omega}{2\omega_{s0}(\omega_{s0} - \Omega)} \right) \right] \left[ \theta' + \omega_{l0} + \omega_p + \frac{\omega_p^2 \Omega}{2\omega_{s0}(\omega_{s0} - \Omega)} \right] \\ & = - \frac{\Lambda \omega_p^2}{2\omega_{s0}}. \end{aligned} \quad (25)$$

由这个式子我们看到增益与泵浦-信号失配曲线的峰值位置现在在

$$\omega_{l0} = \omega_p - \frac{\omega_p^2 \Omega}{2\omega_{s0}(\omega_{s0} - \Omega)}$$

处,所以峰值位置  $\omega_{l0}$  随  $B_0$  增加而小于  $\omega_p$ , 一般说这个现象不管泵浦强弱都能发生,但在强泵浦情况下,由于  $\theta \gg |\omega_{s0} - \Omega|$  的条件容易满足,因而更易发生. 这时候文献[4, 5]中所用的近似  $\omega_{l0} \simeq \omega_p$  不再适用.

对于弱泵浦情况有条件  $\theta \ll \omega_p$ , 于是(19)式可以写成:

$$\left( 2\omega_{s0}\theta + \frac{\theta\omega_p^2\Omega}{(\omega_{s0} - \Omega - \theta)(\omega_{s0} - \Omega)} \right) (\theta + \omega_{l0} - \omega_p) = - \frac{\Lambda\omega_p^2}{\omega_{l0} + \omega_p}. \quad (26)$$

(1) 当  $|\omega_{s0} - \Omega| \gg \theta$  时, (26) 式变成:

$$\theta^2 + (\omega_{l0} - \omega_p)\theta + \frac{\Lambda\omega_p^2}{\left[ 2\omega_{s0} + \frac{\omega_p^2\Omega}{(\omega_{s0} - \Omega)^2} \right] (\omega_{l0} + \omega_p)} = 0. \quad (27)$$

解此二次方程得:

$$\theta = - \frac{1}{2} (\omega_{l0} - \omega_p) \pm \frac{1}{2} \left\{ (\omega_{l0} - \omega_p)^2 - \frac{4\Lambda\omega_p^2}{\left[ 2\omega_{s0} + \frac{\omega_p^2\Omega}{(\omega_{s0} - \Omega)^2} \right] (\omega_{l0} + \omega_p)} \right\}^{1/2}. \quad (28)$$

由(28)式可见,当  $\omega_{l0} = \omega_p$  时散射波的增长率达到极大值,当  $|\omega_{l0} - \omega_p|$  等于这个值的两倍时增长率为零,因此频谱的宽度等于极大增长率的四倍. 令  $\omega_{l0} = \omega_p$ , 且略去分母方括号中的第二项  $\frac{\omega_p^2\Omega}{(\omega_{s0} - \Omega)^2}$  便得文献[4, 5]的结果. 这一项的存在相当于泵浦场变弱;如果  $\omega_p$  足够高,由  $\omega_{s0} = \omega_i - \omega_p$  得知,  $\omega_{s0}$  比较低;再考虑到这一项有个  $\omega_p^2$  因子,因此有可能在不大的  $\Omega$  值处,增长率就有较大的下降. 在下节我们将给出一个具体的例子.

(2) 当  $\theta \gg |\omega_{s0} - \Omega|$  时, (26) 式可写成:

$$2\omega_{s0}\theta^2 + \left[ 2\omega_{s0}(\omega_{l0} - \omega_p) - \frac{\omega_p^2\Omega}{\omega_{s0} - \Omega} \right] \theta - \frac{\omega_p^2\Omega(\omega_{l0} - \omega_p)}{\omega_{s0} - \Omega} = \frac{-\omega_p^2\Lambda}{\omega_{l0} + \omega_p}. \quad (29)$$

解此二次方程得:

$$\begin{aligned} \theta = & - \frac{1}{2} \left[ (\omega_{l0} - \omega_p) - \frac{\omega_p^2\Omega}{2\omega_{s0}(\omega_{s0} - \Omega)} \right] \pm \frac{1}{2} \left\{ \left[ (\omega_{l0} - \omega_p) - \frac{\omega_p^2\Omega}{2\omega_{s0}(\omega_{s0} - \Omega)} \right]^2 \right. \\ & \left. - \frac{2}{\omega_{s0}} \left[ \frac{\Lambda\omega_p^2}{\omega_{l0} + \omega_p} - \frac{\omega_p^2\Omega(\omega_{l0} - \omega_p)}{\omega_{s0} - \Omega} \right] \right\}^{1/2}. \end{aligned} \quad (30)$$

由(30)式我们看到,当  $\Omega$  接近  $\omega_{s0}$  时,同样使增长率下降,增益与泵浦-信号失配曲线的峰值位置也向低  $\omega_p$  的方向移动.

## 四、数值计算

色散关系  $F(\delta) = 0$  的一般解和增益公式 (18) 的精确计算要靠数值解。我们用文

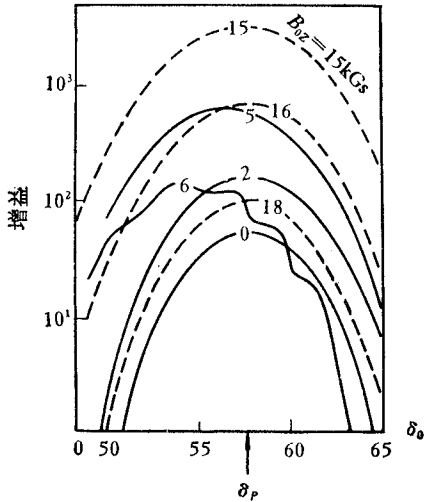


图1 增益与泵浦-信号失配之间的关系,以  $B_{0z}$  作为参量。

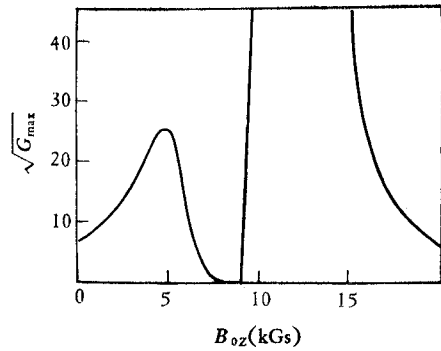


图2 增益曲线的峰值随  $B_{0z}$  的变化

献 [7] 的参数作了一些计算。电子束的能量是 1MeV; 电流是 6kA; 密度  $n = 1.18 \times 10^{14}$  个/cm<sup>3</sup>; 摆动器的长度是 80cm, 周期是 2.8cm, 振幅是 140Gs。于是在束坐标架中, 电子束与摆动器场相互作用的时间是  $t = 0.94\text{ns}$ ; 入射波频率  $\omega_0 = 176.94\text{t}^{-1}$ ; 电子等离子体频率  $\omega_p = 57.77\text{t}^{-1}$ , 这里我们看到  $\omega_p$  是相当高的。色散关系中的参量  $Mt^2 = 10.8$ 。图 1 是以不同的轴向磁场值为参数所作的增益与泵浦-信号失配的关系曲线。我们看到, 考虑了轴向磁场  $B_{0z}$  以后, 曲线的形状基本不变, 峰值发生在  $\omega_{i0} = \omega_p$  处, 在各参数变化的很大范围内, 磁场的效应是使峰值增高, 变宽。对于  $B_{0z} = 7-9\text{kGs}$  增益为零, 对于  $B_{0z} = 10-14\text{kGs}$ , 由于与入射波谐振, 增益变得很大, 未在图中画出。值得注意的是  $B_{0z} = 6\text{kGs}$  的曲线, 此时由于回旋频率接近散射波频率, 增益显著下降, 极值也向小于  $\delta_p$  的方向移动。图 2 是增益曲线的峰值随  $B_{0z}$  的变化。开始峰值随  $B_{0z}$  的增大而增大, 当回旋频率  $\Omega$  接近散射波频率  $\omega_i - \omega_p$  时, (在我们的例子中是  $B_{0z} = 7.17\text{kGs}$  时), 增益下降至零, 当  $\Omega \sim \omega_i$  时 (即  $B_{0z} = 10.64\text{kGs}$  时), 发生谐振, 此时增益很大。以后增益又随  $B_{0z}$  的增大而减小。上述这些数值计算结果与上节色散关系在弱泵浦区的定性分析是一致的。

图 3 是泵浦振幅增加  $\sqrt{8}$  倍以后的增益曲线的峰值及其位置随  $B_{0z}$  的变化。特点是增益为零的区域变窄, 我们仅算得  $B_{0z} = 9\text{kGs}$  一点增益为零。另外增益曲线的峰值位置  $\delta_0$  在回旋频率接近于  $\omega_i - \omega_p$  时迅速变得小于  $\delta_p$ , 这一点与上节强泵浦区的定性分析是一致的。

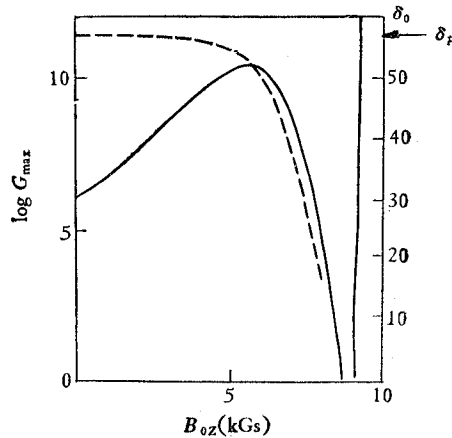


图3  $B_{0L}$  增加  $\sqrt{8}$  倍以后的增益曲线的峰值(实线)及其位置  $\delta_0$  (虚线)随  $B_{0z}$  的变化

## 五、结 论

我们在束坐标架中从流体力学——麦克斯韦方程组出发，用拉氏变换方法讨论了自由电子激光器中的受激喇曼散射过程。结果表明，在参数变化的很大范围内，轴向磁场的效应只是使峰值增高和变宽。这是由于轴向磁场的存在，使泵浦场引起的横向抖动速度多一个因子  $\frac{1}{\omega_i - \Omega}$  的缘故。特别当  $\Omega \sim \omega_i$  时，它使得增益十分大，这时考虑非线性效应是十分必要的。轴向磁场的另一个影响是，由于它的存在使得散射电磁波需满足回旋波的色散关系。对于  $\omega_{s0} \sim \Omega$  的散射电磁波，由于它不能满足色散关系，所以不存在。数值计算和色散关系分析的确表明，当  $\Omega \sim \omega_i - \omega_p$  时，增益会下降至零。利用这一现象我们可以反推出  $\omega_p$ 。从色散关系我们看到，密度愈高这个效应愈显著。在  $\Omega$  接近  $\omega_i - \omega_p$  时的另一个现象是增益与泵浦-信号失配曲线的峰值位置会向低  $\omega_p$  的方向移动。这个现象在强泵浦情况下更为突出。

最后应该指出，我们并没有考虑电子束沿  $z$  轴方向的速度  $V_0$  由  $B_{0z}$  以及辐射电磁波引起的变化，但我们认为，即使考虑这个因素，定性地说也不会改变我们的结论。

本文的初稿曾请李芳同志阅读并进行了有益的讨论，在此表示感谢。

## 参 考 文 献

- [1] T. C. Marshall, S. P. Schlesinger and D. M. McDermott, *Advances in Electronics and Electron Physics*, Academic Press, INC Vol. 53(1980), p. 47.
- [2] D. B. McDermott and T. C. Marshall, *Physics of Quantum Electronics*, 7(1980), 509.
- [3] P. K. Parker et al., *Phys. Rev. Lett.*, 48(1982), 238.
- [4] P. Sprangle and V. L. Granatstein, *Appl. Phys. Lett.*, 25(1974), 377.
- [5] 尹元昭, *电子学通讯*, 4(1982), 312.
- [6] L. Friedland and J. L. Hirshfield, *Phys. Rev. Lett.*, 44(1980), 1456.
- [7] H. P. Freund et al., *Phys. Rev.*, A26(1982), 2004.



- [ 8 ] R. H. Jackson et al., *IEEE J. Quantum Electron*, **QE-19**(1983), 346.  
[ 9 ] W. B. Colson, *Physics of Quantum Electronics*, **5**(1978), 157.  
[10] A. N. Didenko et al., *IEEE Trans. on NS*, **NS-28**(1981), 3169.

## ON THE GAIN CHARACTERS OF FREE ELECTRON LASER WITH AN AXIAL MAGNETIC FIELD

Yin Runjie, Huang Xinyi

(*Institute of Electronics, Academia Sinica*)

Starting from fluid mechanics-Maxwell coupled equations, a gain formula of free electron laser with an axial magnetic field is obtained by use of Laplace transform. The numerical calculations and the analyses of the dispersion relation indicate that when the electron cyclotron frequency  $\Omega$  approaches to  $\omega_i - \omega_p$  ( $\omega_i$  is the frequency of the incident pump wave and  $\omega_p$  is the electron plasma frequency), there is a marked drop in the gain and the position of the peak of gain-pump signal mismatch curve shifts downwards from  $\omega_p$ . We can use the phenomenon of zero-gain to calculate  $\omega_p$ .