

非正交 FD-TD 法在二维涂敷导体 TM 散射问题中的应用¹

张玉胜 方 静 汪文秉

(西安交通大学信息与控制工程系 西安 710049)

摘 要 本文全面介绍了非正交 FD-TD 方法的基本原理, 推导出了其稳定条件和数值色散方程, 并对其数值色散特性进行了详细分析研究。用非正交 FD-TD 方法在正弦波激励下对无限长三角形导体柱 TM 散射电流进行了计算, 与矩量法 (MM) 结果基本吻合, 证明了其有效性。在此基础上对涂敷多边形导体柱的 TM 散射问题进行了计算, 得出远区单站 RCS 结果, 同时为了比较给出了分别用非正交 FD-TD 法和等效源法计算涂敷方形导体柱的散射场分布的结果。

关键词 电磁散射, 时域有限差分, 导体柱

中图分类号 O441

1 引 言

在隐身和反隐身技术问题中, 经常遇到金属导体涂敷介质材料的情况, 由于介质材料很难做到宽频带内都具有好的吸波特性的, 分析涂敷金属目标的时域散射特性可在宽的频带内获得目标散射特性或获得其冲击响应, 因此是非常必要的和具有实际意义的。时域有限差分 (FD-TD) 法用于此类问题的分析和研究, 通常是在直角坐标系下将计算区域划分为许多矩形网格, 用台阶逼近的方式来拟合散射体边界如图 1(a) 所示。但一般吸波涂敷材料层很薄, 而且边界不规则, 如果仍用台阶逼近的方式来拟合边界, 则必然要加密网格剖分, 增加计算区域内的网格数量, 同时为了算法的稳定, 时间步长必然要相应的缩小, 从而使得迭代次数大量增加, 所用计算机 CPU 时间加长。非正交 FD-TD 法在网格剖分拟合

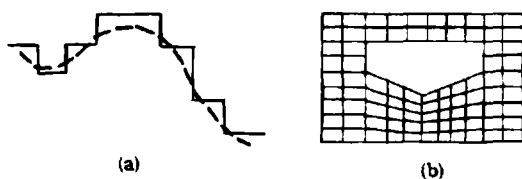


图 1 矩形网格剖分和非正交网格剖分拟合边界示意图

散射体边界方面具有独特的优越性, 在网格部分不太密的情况下能更好地逼近散射体边界, 已成功地应用于二维理想导体或介质的散射问题分析、波导不连续性分析等^[1]。本文主要用非正交 FD-TD 方法分析研究涂敷导体的散射问题。

2 非正交 FD-TD 法基本原理^[2-4]

非正交 FD-TD 法是在非正交坐标系下将麦氏方程用差分方程近似, 把计算区域剖分为许多非矩形网格, 如图 1(b) 所示。与直角坐标系下的 FD-TD 法相比, 在拟合散射体边

¹ 1994-01-20 收到, 1994-07-29 定稿

界时显然更精确, 图 2 为二维情况下某一个网格的示意图。在网格点 (I, J) 上定义矢量 $\mathbf{A}_i(I, J)$, ($i = 1, 2$), 大小为网格边长的长度, 由于只考虑二维问题, 可定义第三个矢量 \mathbf{A}_3 垂直纸面向外, 即 $\mathbf{A}_3 = \hat{z}$, 对偶矢量定义为

$$\mathbf{A}^1(I, J) = \mathbf{A}_2(I, J) \times \hat{z} / \sqrt{g(I, J)}, \quad (1a)$$

$$\mathbf{A}^2(I, J) = \hat{z} \times \mathbf{A}_1(I, J) / \sqrt{g(I, J)}, \quad (1b)$$

$$\mathbf{A}^3(I, J) = \hat{z}. \quad (1c)$$

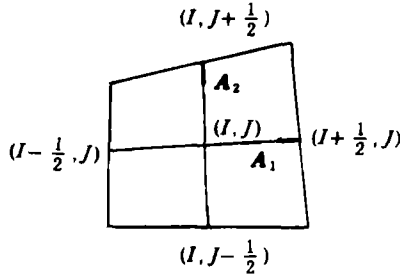


图 2 推导非正交 FD-TD 迭代公式用图

它们有如下关系:

$$\mathbf{A}_i(I, J) = \sum_{j=1}^3 g_{i,j} \mathbf{A}^j(I, J), \quad (i = 1, 2, 3), \quad (2a)$$

$$\mathbf{A}^i(I, J) = \sum_{j=1}^3 g^{i,j} \mathbf{A}_j(I, J), \quad (i = 1, 2, 3), \quad (2b)$$

$$\mathbf{A}_i(I, J) \mathbf{A}^j(I, J) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j; \\ 0, & i \neq j, \quad i, j = 1, 2, 3; \end{cases} \quad (2c)$$

其中 $g_{i,j} = \mathbf{A}_i(I, J) \cdot \mathbf{A}_j(I, J)$, $g^{i,j} = \mathbf{A}^i(I, J) \cdot \mathbf{A}^j(I, J)$, $i, j = 1, 2, 3$, $\sqrt{g(i, j)} = \mathbf{A}_1(I, J) \times \mathbf{A}_2(I, J) \cdot \mathbf{A}_3(I, J)$ 。

网格点上的电场或磁场可表示为这两种形式中的任一种, 如电场 \mathbf{E} 可表示为

$$\mathbf{E}(I, J) = \sum_{i=1}^3 E^i(I, J) \mathbf{A}_i(I, J), \quad (3a)$$

$$\mathbf{E}(I, J) = \sum_{i=1}^3 E_i(I, J) \mathbf{A}^i(I, J), \quad (3b)$$

其中 $E_i(I, J)$, $E^i(I, J)$ 的物理意义可由下面两式看出:

$$\mathbf{E}(I, J) \cdot \mathbf{A}_i(I, J) = \left(\sum_{j=1}^3 E_j(I, J) \mathbf{A}^j(I, J) \right) \cdot \mathbf{A}_i(I, J) = E_i(I, J), \quad (4a)$$

$$\mathbf{E}(I, J) \cdot \mathbf{A}^i(I, J) = \left(\sum_{j=1}^3 E_j(I, J) \mathbf{A}_j(I, J) \right) \cdot \mathbf{A}^i(I, J) = E^i(I, J), \quad (4b)$$

(4a) 式表明 $E_i(I, J)$ 为电场 \mathbf{E} 沿网格边缘 $\mathbf{A}_i(I, J)$ 的流量, (4b) 式表明 $E^i(I, J)$ 为电场 \mathbf{E} 通过由 \mathbf{A}_j 与 \mathbf{A}_k (i, j, k 循环取值 1, 2, 3) 构成的面的总通量除以 $\sqrt{g(I, J)}$, 这使我们离散近似麦氏方程带来很大方便。在无源、均匀、各向同性媒质 (ϵ, μ, σ) 中麦氏方程的积分形式为

$$-\frac{\partial}{\partial t} \int_S \mu \mathbf{H} \cdot d\bar{\mathbf{S}} = \oint_C \mathbf{E} \cdot d\bar{\mathbf{l}} \quad (5a)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_S \epsilon \mathbf{E} \cdot d\bar{\mathbf{S}} + \int_S \sigma \mathbf{E} \cdot d\bar{\mathbf{S}} = \oint_C \mathbf{H} \cdot d\bar{\mathbf{l}} \quad (5b)$$

左边表示电场或磁场通过表面 S 的电通量或磁通量的时间变化率, 右边表示电场或磁场沿边界 C 的流量, 对二维 TM 散射问题 (电场只有 \hat{z} 分量), 在网格点 (I, J) 上应用二阶线性差分方程近似可得

$$E^3(I, J)^{n+1} = AM \times E^3(I, J)^n + BM \times [H_2(I + 1/2, J) - H_2(I - 1/2, J) - H_1(I, J + 1/2) + H_1(I, J - 1/2)]^{n+1/2}, \quad (6a)$$

$$H^1(I, J + 1/2)^{n+1/2} = H^1(I, J + 1/2)^{n-1/2} - \Delta t / \mu \sqrt{g(I, J + 1/2)} [E_3(I, J + 1) - E_3(I, J)]^n, \quad (6b)$$

$$H^2(I + 1/2, J)^{n+1/2} = H^2(I + 1/2, J)^{n-1/2} + \Delta t / \mu \sqrt{g(I + 1/2, J)} [E_3(I + 1, J) - E_3(I, J)]^n, \quad (6c)$$

其中

$$AM = (2.0\epsilon - \sigma\Delta t) / (2.0\epsilon + \sigma\Delta t),$$

$$BM = 2.0\Delta t / [(2.0\epsilon + \sigma\Delta t) \cdot \sqrt{g(I, J)}].$$

上两式完全类似直角坐标系 FD-TD 方法的迭代公式, 只是增加一次转换过程, 例如

$$H_1(I, J + 1/2) = g_{11}H^1(I, J + 1/2) + g_{12}H^2(I, J + 1/2), \quad (7a)$$

$$H_2(I, J + 1/2) = g_{21}H^1(I, J + 1/2) + g_{22}H^2(I, J + 1/2), \quad (7b)$$

$$H^1(I, J + 1/2) = g^{11}H_1(I, J + 1/2) + g^{12}H_2(I, J + 1/2), \quad (8a)$$

$$H^2(I, J + 1/2) = g^{21}H_1(I, J + 1/2) + g^{22}H_2(I, J + 1/2). \quad (8b)$$

虽然这样增加了一次转换计算, 但是采用非正交 FD-TD 法减少了网格数目, 从而总的计算时间节省了。对于涂敷金属目标的远区散射计算, 首先用非正交 FD-TD 法计算近区场值, 然后再根据惠更斯原理计算远区场。

3 非正交的 FD-TD 法的稳定性和色散特性

在推导二维非正交 FD-TD 方法的稳定条件过程中, 不失一般性, 假设计算区域为真空, 则在非正交坐标系 (u^1, u^2) 下的 Helmholtz 方程为

$$\nabla^2 \Phi - (1/c^2) \partial^2 \Phi / \partial t^2 = 0, \quad (9)$$

其中 $c = 1/\sqrt{\mu_0\epsilon_0}$, Φ 为电、磁场任一分量,

$$\nabla = \mathbf{A}^1 \partial / \partial u^1 + \mathbf{A}^2 \partial / \partial u^2. \quad (10)$$

由于任一电磁波皆可分解为平面波之和, 如果非正交 FD-TD 方法对任一平面波是稳定的, 则此方法是稳定的。设在非正交坐标系下沿 \hat{k} 方向传播的平面波为

$$\mathbf{E} = E^3(u^1, u^2, t) \hat{z} = \exp[j(\omega t - \hat{k} \cdot \hat{r})] = \exp[j(\omega t - k_1 u^1 + k_2 u^2)], \quad (11a)$$

$$\mathbf{H} = H^1 \mathbf{A}_1 + H^2 \mathbf{A}_2 = H_0^1 \exp[j(\omega t - \hat{k} \cdot \hat{r})] \mathbf{A}_1 + H_0^2 \exp[j(\omega t - \hat{k} \cdot \hat{r})] \mathbf{A}_2, \quad (11b)$$

其中 $\hat{r} = \mathbf{A}_1 u^1 + \mathbf{A}_2 u^2$, $k_1 = \hat{k} \cdot \mathbf{A}_1$, $k_2 = \hat{k} \cdot \mathbf{A}_2$ 。将 (10) 式中的算子作用于上式, 用中心差分格式近似空间变量的导数项, 并利用

$$\nabla = -2j \sum_{i=1}^2 [\mathbf{A}^i \sin \Delta(k u^i) / 2], \quad (12)$$

根据 (9), (12) 式得

$$-4 \left[\sum_{i=1}^2 [\mathbf{A}^i \sin \Delta(k_i u^i) / 2] \cdot \sum_{j=1}^2 [\mathbf{A}^j \sin \Delta(k_j u^j) / 2] \right] E_z = [(\lambda^2 - 2\lambda + 1) / (\lambda c^2 \Delta t^2)] \cdot E_z / c^2, \quad (13)$$

其中 $\lambda = E_z^{n+1} / E_z^n$, 解出上式的 λ 得

$$\lambda = (1 - 2s^2 \Delta t^2) \pm 2s \Delta t \sqrt{s^2 \Delta t^2 - 1}, \quad (14)$$

其中 $s^2 = c^2 \sum_{i,j=1}^2 [\mathbf{A}^i \cdot \mathbf{A}^j \sin(\Delta(k_i u^i) / 2) \cdot \sin(\Delta(k_j u^j) / 2)]$ 。当且仅当 $|\lambda| \leq 1$ 方法稳定, 即只有在 $(s \Delta t)^2 \leq 1$ 条件下才稳定, 因此要使算法对任一平面波都是稳定的, 则必须保证

$$\left(c^2 \sum_{i,j=1}^2 [\mathbf{A}^i \cdot \mathbf{A}^j] \right) \cdot \Delta t^2 \leq 1. \quad (15)$$

由此得到稳定条件:

$$\Delta t \leq \frac{1}{c} \sqrt{\sum_{i,j=1}^2 [\mathbf{A}^i \cdot \mathbf{A}^j]} = \frac{1}{c} \sqrt{(g_{11} + g_{22} + 2g_{12})}. \quad (16)$$

由于上式右边的值对不同的网格点有不同的值, 为了保证算法在整个计算区域内稳定, 上式右端的最小值应为时间步长的上限取值。

将平面波表达式 (11) 式代入 (6) 式并结合 (7) 式可得数值色散方程:

$$\begin{aligned} [\sin(\omega \Delta t / 2) / (\Delta t / 2)]^2 &= 1 / (\varepsilon \mu) \{ \sin^2(k_1 \Delta u^1 / 2) / [\Delta u^1 \sin(\alpha / 2)]^2 \\ &+ \sin^2(k_2 \Delta u^2 / 2) / [\Delta u^2 \sin(\alpha / 2)]^2 - 2 \sin(k_1 \Delta u^1 / 2) / [\Delta u^1 \sin(\alpha / 2)] \\ &\cdot \sin(k_2 \Delta u^2 / 2) / [\Delta u^2 \sin(\alpha / 2)] \cos \alpha \} \end{aligned} \quad (18)$$

当 $\mathbf{A}_1 \perp \mathbf{A}_2$ 时, 上式变为直角坐标系下 FD-TD 数值色散方程; 当 $\Delta u_1 \rightarrow 0$, $\Delta u_2 \rightarrow 0$ 时, 有 $\Delta t \rightarrow 0$ (由稳定条件决定), 色散方程变为自由空间中无色散的情况, 即 $(\omega \sqrt{\mu \varepsilon})^2 = k_0^2$ 。

显然数值色散是由差分方程近似代替麦氏方程而引起的，在分析研究时域电磁问题时，使得带宽受到一定的限制。以上的推导过程只是涉及到均匀网格的情况，在实际应用非正交 FD-TD 方法时，由于网格的剖分自由度很大，每个网格的形状和边长不同，数值色散程度也不一样，整个算法的色散应综合考虑。

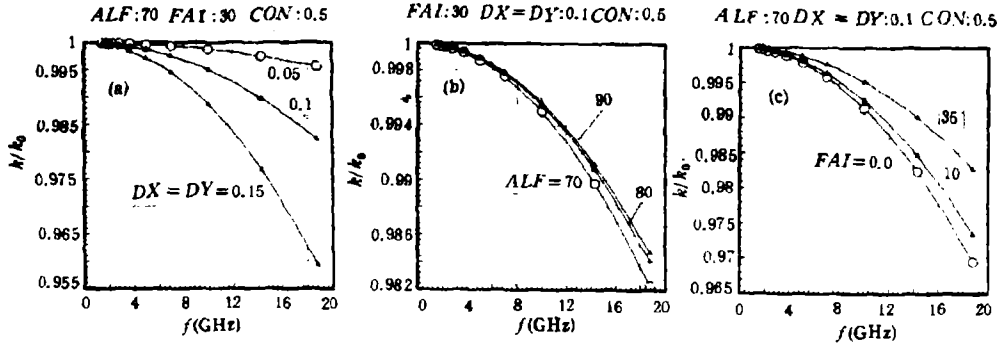


图 3 数值色散特性曲线

ALF 代表网格边之间的夹角，FAI 代表传播方向与 A_1 的夹角，单位为度， k_0 表示无耗均匀媒质 ϵ, μ 中的波数，DX 表示 Δu_1 ，DY 表示 Δu_2 ，单位为波长 $\lambda_0 = 0.025\text{m}$ (对应的频率 $f=12\text{GHz}$)， $CON = v\Delta t/\Delta u$ ， v 为电磁波传播速度。

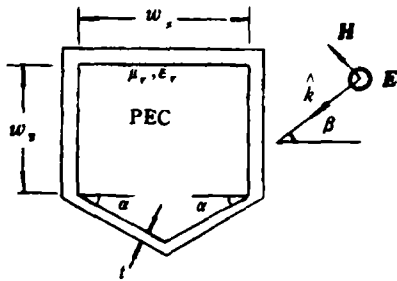


图 4 涂敷介质多边形导体柱散射体尺寸图

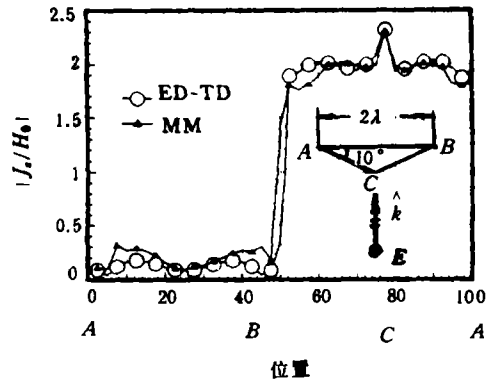


图 5 TM 入射三角形导体柱表面电流计算结果 (注：图中 ED-TD 应用 FD-TD)

4 计算结果和讨论

根据非正交 FD-TD 法数值色散方程，分别计算了在不同的网格边长 (Δu)、夹角 (ALF)、波传播方向 (FAI) 等情况下其数值色散特性曲线，分别示于图 3(a)，3(b)，3(c) 中。从图中可以看出，网格剖分边长应尽量接近，夹角不要太小，使数值色散减到最低限度。

为了验证非正交 FD-TD 法的有效性，对 TM 入射三角形导体柱表面散射电流幅值进行了计算，散射体尺寸如图 4 所示。此时选取参数 $\alpha = 10^\circ$ ， $w_x = 2.0\lambda$ ， $w_y = 0.0$ ，入射角 $\beta = -90^\circ$ ， $t = 0.0$ ，激励源采用正弦 TM 极化平面波源，吸收边界条件采用 Mur 二阶 ABC^[5]，距散射体 1.5λ ，计算区域内网格最大尺寸不超过 0.1λ ，剖分如图 1(b) 所示，计

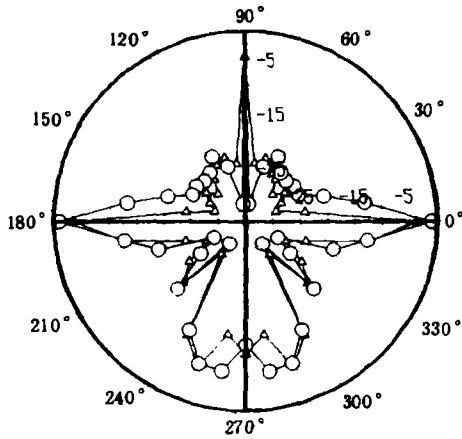


图 6 涂敷多边形导体柱单站 RCS 计算结果
 $w_x = 3.0\lambda, w_y = 2.0\lambda, ALF = 15t = 0.1\lambda,$
 $\epsilon_r = 2.53 - j0.151$
 ○ : 未涂敷, △ : 涂敷

算结果示于图 5。图中同时给出了 MM 计算结果, 在用点匹配 MM 法计算同一问题时, 导体表面位置节点数为 80, 用横坐标表示其相对位置 (最大值归一化为 100)。从图中可见, 除在尖角附近由于电流值的奇异特性二者具有一定的误差外, 二者基本吻合。对于涂敷吸收介质多边形柱的单站 RCS 的计算, 采用以上 FD-TD 模型, 涂敷介质的厚度 t 为 0.1λ , $w_x = 3.0\lambda$, $w_y = 2.0\lambda$, $\alpha = 15^\circ$, 相对介电常数 $\epsilon_r = 2.53 - j0.151$, 结果示于图 6。显然, 由于涂敷介质的吸波特性, 使目标的 RCS 有一定的下降。当多边形柱体变为正方形时, 即 $\alpha = 0$, $w_x = w_y$ 时, 选取参量 $w_x = w_y = 2.0\lambda$, $\epsilon_r = 2.0 - j2.0\lambda$ 入射方向 $\beta = 0^\circ$, 以便与其它方法计算结果比较, 其远区散射

场分布图如图 7 所示, 同时列出了等效源法计算结果 [6], 二者符合较好。

非正交 FD-TD 法是分析研究二维涂敷导体柱散射问题的有效方法, 特别是在涂敷介质的厚度较薄、散射体包含有尖角和斜边的情况下, 它更显示出优势; 由于其剖分灵活、编程实现容易, 对复杂涂敷金属目标的分析研究它将发挥重要作用, 用此方法分析宽频带内涂敷导体散射问题原则上没有困难, 目前正在进一步研究之中。

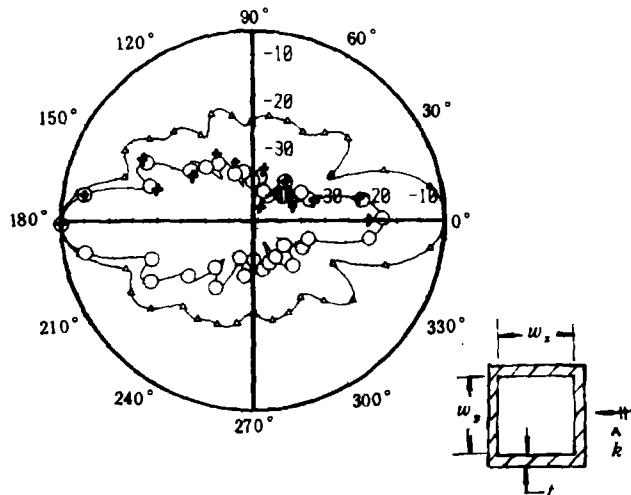


图 7 涂敷方形导体柱远区散射场分布图
 $w_x = w_y = 2.0\lambda, t = 0.2\lambda, \epsilon_r = 2.0 - j2.0$
 △ : 未涂敷, ○ : 涂敷, + : 文献 [6]

参 考 文 献

- [1] Lee J F. IEEE Trans. on MTT, 1992, MTT-49(2): 346-352.
- [2] Holland R, *et al.* IEEE Trans. on NS, 1983, NS-30(6): 4689-4691.
- [3] Fusco M. IEEE Trans. on AP, 1990, AP-38(1): 76-88.
- [4] Madsen N. Wave Motion, 1988, 10(6): 583-596.
- [5] Mur G. IEEE Trans. on EMC, 1981, EMC-23(4): 377-382.
- [6] Yamashita E. Analysis methods for electromagnetic wave problems. Boston: Artech House, 1990, 203-211.

THE APPLICATION OF NONORTHOGONAL FD-TD ALGORITHM
IN 2-D TM SCATTERING PROBLEMS OF CONDUCTING
CYLINDERS COATED WITH ABSORBING MATERIALS

Zhang Yusheng Fang Jing Wang Wenbing

(Department of Information & Control Engineering, Xi'an Jiaotong University, Xi'an 710049)

Abstract The foundational principle of the nonorthogonal FD-TD algorithm is introduced, and its stability condition and dispersion equation are derived. The numerical dispersion characteristics of this method are analyzed in detail. In order to show its validity the scattering surface currents of perfectly conducting cylinder are calculated by using this method when the incident wave is sinusoidal plane wave in TM case. The numerical results agree with that by moment method very well. Then the TM scattering problem of polygon cylinder coated with absorbing material is studied and the monostatic RCS of the target is obtained. For comparison with results of equivalent source method the electric scattering distribution pattern of square cylinder coated with absorbing material is also obtained by using nonorthogonal FD-TD.

Key words Electromagnetic scattering, Finite difference time domain, Conducting cylinder

张玉胜: 男, 1963 年生, 讲师, 电磁散射和数值计算。

方 静: 女, 1963 年生, 讲师, 电磁散射和数值计算。

汪文秉: 男, 1929 年生, 教授, 电磁散射和数值计算、瞬态电磁场、天线理论与分析。