

快速二维高分辨率测向方法研究*

吴仁彪

(西安电子科技大学, 雷达信号处理重点实验室, 西安 710071)

摘要 本文提出了一种基于“十”字架型阵列接收系统的二维高分辨率测向快速分维处理方法。它具有粗粒度的并行性,且运算量大大小于二维直接处理方法或已有的其它分维处理方法。文中还给出了两种改进措施来减少分维处理所带来的性能损失。最后,给出了部分计算机模拟实验结果。

关键词 阵列信号处理; 高分辨率测向技术; 分维处理方法

一、引言

近年来,在阵列信号处理领域中,以 MUSIC 法^[1]为代表的信号子空间类高分辨率测向方法获得了极大的重视。这类方法较好地利用了信号和背景噪声的模型,用信号处理的“软手段”来提高阵列的角分辨率。高分辨技术在雷达、声纳阵列信号处理等领域中有广阔的应用前景。

信号子空间法的运算量十分巨大(包括正交分解和谱峰搜索),这在一定程度上限制了其应用。二维测向需要进行二维谱峰搜索,而二维(多维)优化问题本身具有一定的困难,至今未见有大的突破,因此应设法避开这一步。

二维测向需用二维阵列,常用的有圆阵和等距矩形面阵。圆阵属于非规则阵列,不具备分维特性(指二维参量可分开估计),因此无法避开二维谱峰搜索,相干源的检测也较困难。矩形面阵属于规则阵列,具有分维特性,但阵列冗余度较大,正交分解的矩阵阶数太高,不仅运算量大,数值特性也较差,采用分维处理后阵列口径损失太大。相对而言,“十”字架型双等距线阵结构不仅具有分维特性,阵列冗余度也较小,可将较成熟的基于等距线阵的一维高分辨率测向技术直接用于分维处理。下面我们主要研究基于这种阵列结构的快速二维高分辨率测向方法。

二、问题的描述

设有 P 个窄带信号源入射图 1 所示的“十”字架型阵列系统,其波达角为 $\{(\alpha_k, \beta_k)\}$,

1991.01.24 收到, 1992.09.09 定稿。

* 高等学校博士学科点专项科研基金资助课题。

吴仁彪 男, 1967 年生, 博士研究生。研究方向为: 高分辨率空间谱估计、自适应阵列信号处理、时空二维自适应滤波技术和实时并行信号处理技术。

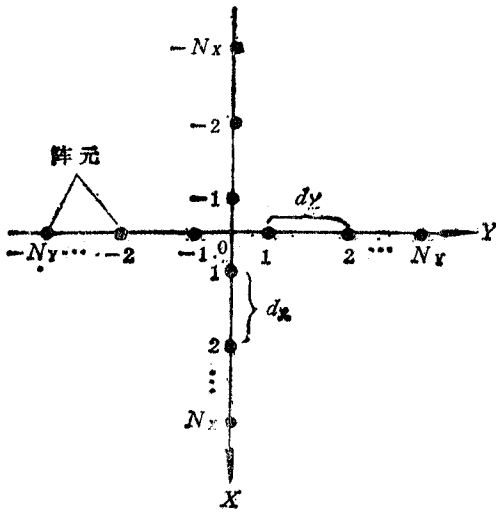


图 1 “十”字架型阵列系统

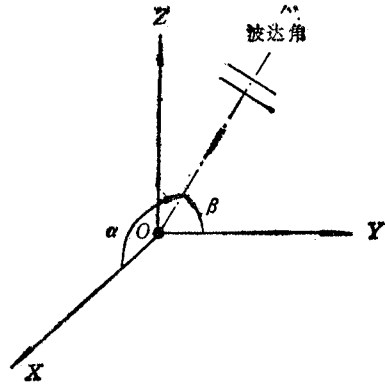


图 2 二维波达角坐标系(二线阵)

$k = 1, 2, \dots, P$ (示于图 2)。阵列由两个相互正交的等距线阵 X 和 Y 组成,其阵元数分别为 $2N_x, 2N_y$, 而阵元间距则分别为 d_x 和 d_y , 原点 O 为阵列参考点。

下面先建立阵列接收数据模型。

用矢量形式表示的 X 阵接收数据模型为

$$\mathbf{X}(t) = \mathbf{A}_x \cdot \mathbf{S}(t) + \mathbf{W}_x(t) \tag{1}$$

其中 $\mathbf{X}(t) = [x_{-N_x}(t), \dots, x_{-1}(t), x_1(t), \dots, x_{N_x}(t)]^T$ 为 X 阵接收数据矢量; $\mathbf{S}(t) = [s_1(t), s_2(t), \dots, s_P(t)]^T$ 为阵列参考点 O 上接收到的信号源矢量; $\mathbf{W}_x(t) = [w_{-N_x}(t), \dots, w_{-1}(t), w_1(t), \dots, w_{N_x}(t)]^T$ 为接收噪声矢量, 它是零均值等功率广义平稳复矢量过程, 且各矢量元素互不相关; $\mathbf{A}_x = [\mathbf{a}_x(\alpha_1), \mathbf{a}_x(\alpha_2), \dots, \mathbf{a}_x(\alpha_P)]$ 为信号方向矩阵,

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_x(\alpha_k) = & [\exp[-j((2N_x - 1)/2) \cdot (2\pi \cdot d_x/\lambda) \cdot \cos(\alpha_k)], \dots, \\ & \exp[-j(1/2) \cdot (2\pi \cdot d_x/\lambda) \cdot \cos(\alpha_k)], \exp[j(1/2) \cdot (2\pi \cdot d_x/\lambda) \cdot \cos(\alpha_k)], \dots, \\ & \exp[j((2N_x - 1)/2) \cdot (2\pi \cdot d_x/\lambda) \cdot \cos(\alpha_k)]]^T \end{aligned}$$

“ λ ”表示入射波波长。

类似地, Y 阵的接收数据模型为

$$\mathbf{Y}(t) = \mathbf{A}_y \cdot \mathbf{S}(t) + \mathbf{W}_y(t) \tag{2}$$

其中 $\mathbf{A}_y = [\mathbf{a}_y(\beta_1), \mathbf{a}_y(\beta_2), \dots, \mathbf{a}_y(\beta_P)]$.

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_y(\beta_k) = & [\exp[-j((2N_y - 1)/2) \cdot (2\pi \cdot d_y/\lambda) \cdot \cos(\beta_k)], \dots, \\ & \exp[-j(1/2) \cdot (2\pi \cdot d_y/\lambda) \cdot \cos(\beta_k)], \exp[j(1/2) \cdot (2\pi \cdot d_y/\lambda) \cdot \cos(\beta_k)], \dots, \\ & \exp[j((2N_y - 1)/2) \cdot (2\pi \cdot d_y/\lambda) \cdot \cos(\beta_k)]]^T \end{aligned}$$

从(1)和(2)式可知,由 X 阵仅能估计 α 参量,而由 Y 阵仅能估计 β 参量, 但由 X 阵和 Y 阵组成的“十”字架型阵列系统却能估计二维波达角 (α, β) 。“十”字架型阵列的接收数据模型为

$$\mathbf{Z}(t) = \mathbf{A}_z \cdot \mathbf{S}(t) + \mathbf{W}_z(t) \tag{3}$$

其中

$$\mathbf{Z}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{X}(t) \\ \mathbf{Y}(t) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{W}_Z(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{W}_X(t) \\ \mathbf{W}_Y(t) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}_Z = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_X \\ \mathbf{A}_Y \end{bmatrix} = [\mathbf{a}_Z(\alpha_1, \beta_1), \mathbf{a}_Z(\alpha_2, \beta_2), \dots, \mathbf{a}_Z(\alpha_P, \beta_P)]$$

当接收噪声为等功率空间白噪声时,有

$$\mathbf{R}_Z = E[\mathbf{Z}(t) \cdot \mathbf{Z}^H(t)] = \mathbf{A}_Z \cdot \mathbf{R}_S \cdot \mathbf{A}_Z^H + \sigma^2 \cdot \mathbf{I} \quad (4)$$

其中 $E[\cdot]$ 为数学期望算子,“ H ”表示共轭转置运算, $\mathbf{R}_S = E[\mathbf{S}(t) \cdot \mathbf{S}^H(t)]$, σ^2 为白噪声功率, \mathbf{I} 为单位阵。

对 \mathbf{R}_Z 进行特征分解,当信号源不相干时,有以下结论^[4]:

$$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_P > \lambda_{P+1} = \dots = \lambda_{2(N_X+N_Y)} = \sigma^2 \quad (5)$$

设其对应的特征向量是 $\mathbf{V}_1, \mathbf{V}_2, \dots, \mathbf{V}_{2(N_X+N_Y)}$, 有

$$\text{Span}\{\mathbf{a}_Z(\alpha_k, \beta_k), k = 1, 2, \dots, P\} = \text{Span}\{\mathbf{V}_k, k = 1, 2, \dots, P\} \quad (6)$$

$$\text{Span}\{\mathbf{a}_Z(\alpha_k, \beta_k), k = 1, 2, \dots, P\} \perp \text{Span}\{\mathbf{V}_k, k = P+1, P+2, \dots, 2(N_X+N_Y)\} \quad (7)$$

相应的 MUSIC 谱定义为

$$P_Z(\alpha, \beta) = 1 / \left(\sum_{i=P+1}^{2(N_X+N_Y)} \|\mathbf{V}_i^H \cdot \mathbf{a}_Z(\alpha, \beta)\|^2 \right) \quad (8)$$

对(8)式进行二维谱峰搜索即可得到二维波达角的估值。由于阵列结构的非规则性,这种直接处理方法不仅运算量大,而且相干源的检测也较困难。但从这种阵列结构的特殊性出发却不难找到新的快速算法。

三、分维处理方法

由于“十”字架型阵列本身具有分维特性,利用各种较成熟的一维高分辨技术可以先从 X 阵和 Y 阵的接收数据分别估计出 α 参量和 β 参量,再用适当的方法进行配对组合,这样就避开了二维谱峰搜索,而只剩下分维参量的配对问题。

一种可行的分维正交化处理方法是在阵列附近引入一附加阵元,设其接收数据为 $r(t)$ (信号加噪声)。只要 $r(t)$ 和阵列接收噪声矢量不相关(不管阵列噪声场分布如何),有

$$\mathbf{X} = E[r^*(t) \cdot \mathbf{X}(t)] = \mathbf{A}_X \cdot \mathbf{S} \quad (9)$$

$$\mathbf{Y} = E[r^*(t) \cdot \mathbf{Y}(t)] = \mathbf{A}_Y \cdot \mathbf{S} \quad (10)$$

利用类似文献[2]中的方法,可以由相关矢量 \mathbf{X} 和 \mathbf{Y} 分别构造一个信号矩阵,对信号矩阵进行正交分解即可估计出信号子空间。采用文献[3]中给出的并行谱峰搜索算法可较快地完成分维参量的提取工作。

利用分维处理方法可分别得到 α 参量和 β 参量的估值 $\{\hat{\alpha}_k, 1 \leq k \leq P_\alpha \leq P\}$, $\{\hat{\beta}_k, 1 \leq k \leq P_\beta \leq P\}$ 。由于 α 和 β 参量可能发生兼并(即对 $k \neq j, 1 \leq k, j \leq P$, 可能有 $\alpha_k = \alpha_j$ 或 $\beta_k = \beta_j$), 不同 α 和 β 参量的个数 P_α 和 P_β 可能小于信号源个数 P 。下面给出三种方法对参量 α 和 β 的估值进行配对组合。

1. 中间参量配对法

由(9)和(10)式得

$$S = A_x^+ \cdot X \quad (11)$$

$$S = A_y^+ \cdot Y \quad (12)$$

其中“+”表示 Moore-Penrose 伪逆,由广义逆理论可知,它存在且唯一。

当 s 参量 (S 中的元素)无兼并时,每个 s 分别对应于一个 α 和 β ,通过 s 参量作桥梁即可确定参量对 (α, β) 。实际应用时是用分维处理得到的 α 和 β 参量的估值先估计出 A_x 和 \hat{A}_y ,再由(11)式和(12)式得到 $(s_k^\alpha, \hat{\alpha}_k), (s_k^\beta, \hat{\beta}_k), (1 \leq k \leq P)$,只有使 d 取最小值的参量组合才是正确的,其中

$$d = \|\hat{S}^\alpha - \hat{S}^\beta\| \quad (13)$$

其中 $\hat{S}^\alpha = [s_{1'}^\alpha, s_{2'}^\alpha, \dots, s_{P'}^\alpha]^T$, $1', 2', \dots, P'$ 是 $1, 2, \dots, P$ 的任一种排列, $\hat{S}^\beta = [s_1^\beta, s_2^\beta, \dots, s_P^\beta]^T$ 。

这种方法只有在 α 和 β 不同时发生兼并时才有效,此时 $P = \max\{P_\alpha, P_\beta\}$,否则信号源的个数无法确定,无法估计 A_x, \hat{A}_y 。不过, α 和 β 的兼并不会影响对其自身的估计,但会给配对带来困难,下面讨论一下其影响。

(1) α 和 β 参量都无兼并 此时 A_x^+, A_y^+ 可表示为

$$A_x^+ = (A_x^H \cdot A_x)^{-1} \cdot A_x^H \quad (14)$$

$$A_y^+ = (A_y^H \cdot A_y)^{-1} \cdot A_y^H \quad (15)$$

此时配对较容易。

(2) α 和 β 参量中有一个发生了兼并 (如 α 参量) 此时 A_x 列不满秩,设 $\text{rank}(A_x) = r$ 。对 A_x 进行满秩分解得

$$A_x = F_x \cdot G_x \quad (16)$$

其中 $F_x \in C^{2N_x \times r}$, $G_x \in C^{r \times P}$ (此处 C 代表复空间), $P = P_\beta$ (因 β 无兼并)。则

$$A_x^+ = G_x^+ \cdot F_x^+ = G_x^+ \cdot (F_x^+ \cdot A_x^* \cdot G_x^*)^{-1} \cdot F_x^+ \quad (17)$$

由于 α 参量的兼并情况不清楚(即 α 参量中有几个发生了兼并,每一个兼并的次数是多少),难以确定 A_x 的结构,也就不能确定参量对 $(\hat{\alpha}_k, s_k^\alpha)$ 。不过,由于 β 参量无兼并,可以用 \hat{S}^β 作参考,用检验的方法弄清 α 参量的兼并情况,并完成配对工作。

α 参量的总兼并次数为 $P - P_\alpha = P_\beta - P_\alpha$, 不难证明,其可能出现的兼并情况总数 $T = C_{P_\beta - P_\alpha}^{P_\beta}$ (此处 C 代表组合数公式)。对于第 n 种可能出现的兼并情况,由(13)式得

$$d_n = \min\|\hat{S}_n^\alpha - S^\beta\| \quad (18)$$

记

$$D = \min\{d_n, 1 \leq n \leq T\} \quad (19)$$

与 D 对应的兼并情况才是正确的,由此完成了配对工作。

由上面的分析可知,中间参量配对法有效的前提是中间参量无兼并, α 和 β 参量中最多只有一个有兼并。但在有兼并时配对较困难。

2. 子空间投影配对法

当信号源不相干时,可对 R_z (见(4)式)进行正交分解,得到由(8)式定义的二维 MUSIC 谱,但不进行二维谱峰搜索。仅利用它作为配对用的谱检验器。具体步骤是,由

R_Z 的特征值利用 MDL 或 AIC 准则确定信号源数 P , 再计算 $P_Z(\hat{\alpha}_i, \hat{\beta}_j) (1 \leq i \leq P_\alpha, 1 \leq j \leq P_\beta)$, P 个最大值对应的参量对即为正确的组合。

这种配对法利用了子空间正交投影的原理, 故称之为子空间投影配对法。它与 α 和 β 参量的兼并情况无关, 但在信号源相干时, R_Z 的主特征值发生亏损, 由于是非规则阵列, 不能用空域平滑法^[4]等来恢复其秩, 因而无法估计信号子空间, 从而使子空间投影配对法失效。

由于两线阵的一维正交化处理和 R_Z 的正交分解可同时进行, 因此这种算法具有粗粒度的并行性。

3. 增加一根线阵的配对法

由上面的讨论可知, 中间参量配对法处理参量兼并较困难, 而子空间投影配对法难以解决相干源问题。若在原“十”字架型双线阵系统的基础上增加一根线阵 (记为 U , 如图 3 和图 4 所示.), 那么它可以同时克服兼并和相干的影响, 有效地完成配对工作。

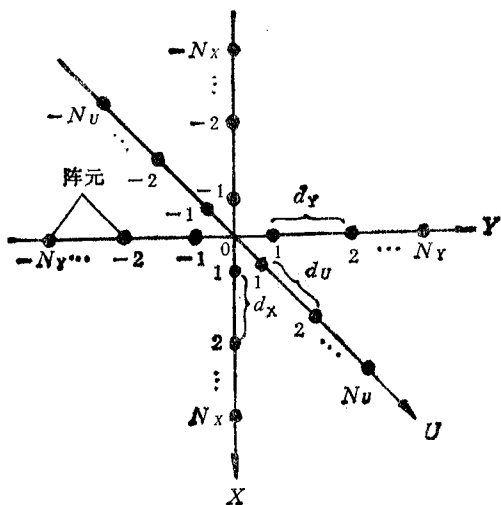


图 3 三线阵接收系统

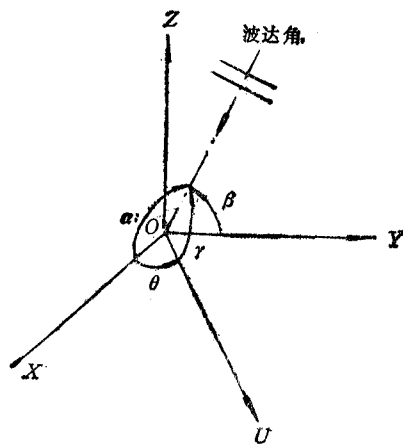


图 4 二维波达角坐标系(三线阵)

图 3 和图 4 中, U 阵和 X 阵、 Y 阵位于同一平面上, U 阵与 X 阵间的夹角记为 θ , 信号源入射方向与 U 阵间的夹角记为 γ . U 阵的接收数据模型为

$$U(t) = A_U \cdot S(t) + W_U(t) \tag{20}$$

其中 $A_U = [a_U(\gamma_1), a_U(\gamma_2), \dots, a_U(\gamma_P)]$.

$$a_U(\gamma_k) = [\exp[-j((2N_U - 1)/2) \cdot (2\pi \cdot d_U/\lambda) \cdot \cos(\gamma_k)], \dots, \exp[-j(1/2) \cdot (2\pi \cdot d_U/\lambda) \cdot \cos(\gamma_k)], \exp[j(1/2) \cdot (2\pi \cdot d_U/\lambda) \cdot \cos(\gamma_k)], \dots, \exp[j((2N_U - 1)/2) \cdot (2\pi \cdot d_U/\lambda) \cdot \cos(\gamma_k)]]^T$$

不难推得 γ 与 α, β 间有如下关系:

$$\cos(\gamma_k) = \cos(\theta) \cdot \cos(\alpha_k) + \sin(\theta) \cdot \cos(\beta_k), \quad (k = 1, 2, \dots, P) \tag{21}$$

由 X 阵, Y 阵和 U 阵分别得到 α, β 和 γ 参量的估值 $\{\hat{\alpha}_i, 1 \leq i \leq P_\alpha \leq P\}$, $\{\hat{\beta}_j, 1 \leq j \leq P_\beta \leq P\}$ 和 $\{\hat{\gamma}_k, 1 \leq k \leq P_r \leq P\}$ 后, 计算下式之值

$$d(i, j, k) = \|\hat{r}_k - \cos(\theta) \cdot \cos(\hat{\alpha}_i) - \sin(\theta) \cdot \cos(\hat{\beta}_j)\| \quad (22)$$

$$(1 \leq i \leq P_\alpha, 1 \leq j \leq P_\beta, 1 \leq k \leq P_r)$$

当 $d(i, j, k)$ 充分小时, $(\hat{\alpha}_i, \hat{\beta}_j)$ 为正确的参量对组合, 这是一个必要条件, 又是一个概率意义上的充分条件。

这种配对法与参量的兼并情况无关, 在信号源相干时也能适用, 因为对三个等距线阵都可以采用一维空域平滑法进行去相干处理。此外, 算法具有粗粒度的并行性, 因为三个线阵的一维正交化处理可同时进行, 而配对的工作量可忽略不计。

四、性能分析和改进措施

首先, 比较一下分维处理和二维处理的极限性能的差异, 假设分维处理方法的性能与配对方法无关。下面计算一下两种处理方案对应的 Cramer-Rao 限 (CRB)。

假设只有一个信号源, 其波达角为 (α, β) , 信噪比为 SNR, X, Y 两线阵具有相同的结构, 即 $d_x = d_y, N_x = N_y = N/2$ 。不难推得

$$Q = \frac{\text{CRB}(\alpha)_2}{\text{CRB}(\alpha)_1} = \frac{\text{CRB}(\beta)_2}{\text{CRB}(\beta)_1} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1 + 2 \cdot N \cdot \text{SNR}}{1 + N \cdot \text{SNR}} \quad (23)$$

其中下标“1”代表分维处理方法, “2”代表二维处理方法。

显然

$$1/2 \leq Q \leq 1 \quad (24)$$

$$\text{当 } N \cdot \text{SNR} \ll 1 \text{ 时, } Q \approx 1/2 \quad (25)$$

$$\text{当 } N \cdot \text{SNR} \gg 1 \text{ 时, } Q \approx 1 \quad (26)$$

(24)-(26)式说明, 分维处理方法的估计性能不及二维处理方法, 但在阵元数较多, 信噪比较高时, 两者相差不大。

从理论上讲, 两者的极限分辨率是一样的。因为对于信号子空间法, 当数据快拍数趋于无穷时, 它能将任意近的信号源分辨开。但在实际情况下, 分维处理的分辨性能会有所下降。同已有的各种分维处理方法一样, 新方法存在一个固有缺陷: 即当分维参量接近于兼并时, 其分辨率会下降。这是不难理解的。因为分维处理相当于从两个固定的角度观察信号源的人射方向, 而二维处理相当于从整体上进行观察。

为了充分利用分维处理方法运算量小, 并行性好的优势, 同时减少其性能损失, 可用两种后处理方案加以改进。

(1) 当信号源不相干时, 子空间投影配对法是一种有效的配对法。在用分维处理得到 α 和 β 参量的估值后, 先用子空间投影配对法获得二维波达角的近似估值, 再在这几个估值点附近作二维局部细化高分辨处理。由于二维谱峰搜索是在局部进行的, 不会增加太多的运算量, 但会使性能获得较大的改善。

(2) 增加一根线阵的配对法可推广至多线阵系统。由任意三根线阵可得到一组二维波达角估值, 从多线阵可得到多组估值, 利用某种择大和平均处理可提高其性能。它相当于从多个角度“观察”(估计)人射信号源的波达角。

有关两种后处理方案的详细讨论将另文给出。

五、仿真实验

由于篇幅所限,本文仅给出了基于最有效的分维处理方法(增加一根线阵的配对法)的计算机模拟实验结果。

三个窄带相干信号源入射图 3 所示的三线阵系统,其波达角分别为 $(60^\circ, 40^\circ)$, $(60^\circ, 50^\circ)$, $(80^\circ, 40^\circ)$; $\text{SNR} = 10\text{dB}$; $d_x = d_y = d_z = \lambda/2$; $N_x = N_y = N_z = 4$; $\theta = 45^\circ$; 快拍数 $N_s = 50$ 。此时 X 阵和 Y 阵对应的标准波束宽度约为 13° 。用分维处理方法得到的 α, β, γ 参量谱分别如图 5(a), 5(b), 5(c) 所示。图中虚线代表真实值位置。可以看出,此时 α 和 β 参量都有兼并。其配对情况如表 1 所示。配对后得到的二维波达角估值分别为 $(60.00^\circ, 39.91^\circ)$, $(60.00^\circ, 49.98^\circ)$, $(79.98^\circ, 39.91^\circ)$ 。

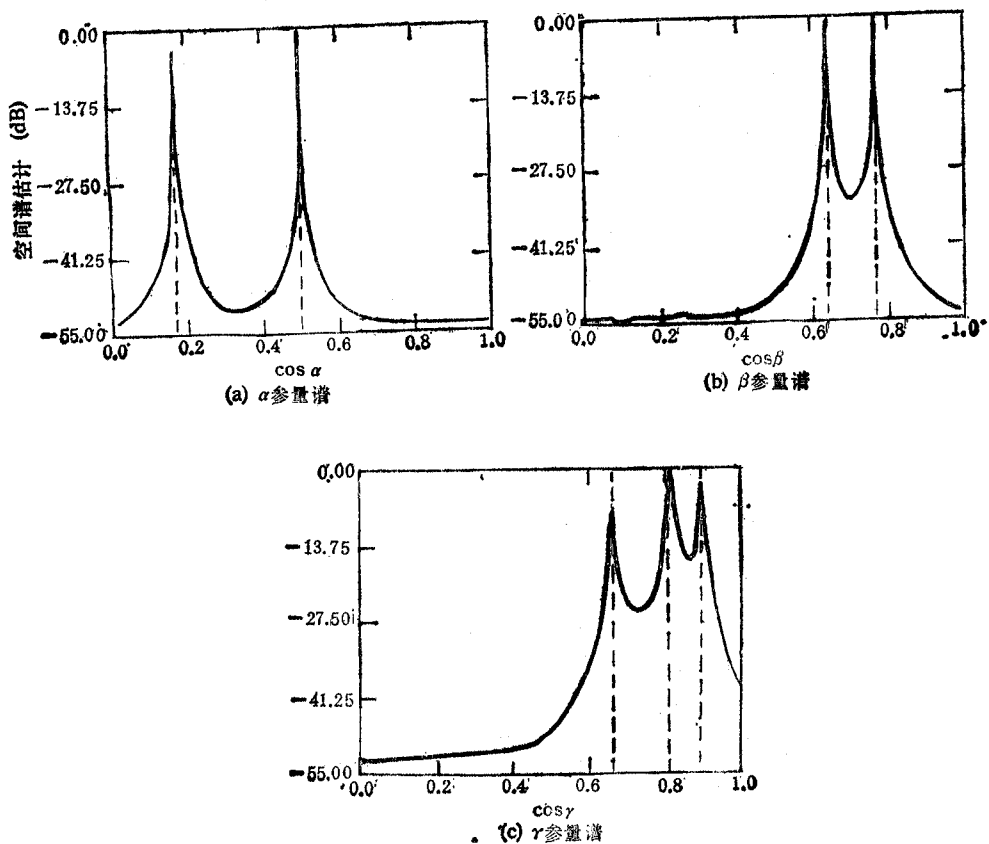


图 5 分维参量谱

六、结束语

本文研究了基于“十”字架型阵列的快速二维高分辨率测向方法。在文中给出的三种配对方法中,增加一根线阵的配对法具有适用面广(可解决相干源和兼并问题),并行性

表 1 分维参量的配对组合

$\hat{\alpha}_i$	$\hat{\beta}_j$	\hat{r}_k	$d(i, j, k)$	正确组合
0.1740	0.6430	0.6620	0.0843	
0.1740	0.6430	0.8120	0.2343	
0.1740	0.6430	0.8940	0.3163	
0.1740	0.7670	0.6620	0.0034	✓
0.1740	0.7670	0.8120	0.1466	
0.1740	0.7670	0.8940	0.2286	
0.5000	0.6430	0.6620	0.1462	
0.5000	0.6430	0.8120	0.0038	✓
0.5000	0.6430	0.8940	0.0858	
0.5000	0.7670	0.6620	0.2339	
0.5000	0.7670	0.8120	0.0839	
0.5000	0.7670	0.8940	0.0019	✓

好的特点。两种后处理方案可在保留分维处理优点的同时减少其性能损失,有关互耦、幅相误差等通道不一致性对新方法的影响和补偿方法目前正在研究之中。

本文是在导师保铮教授的悉心指导下完成的,作者在此向他表示深深的谢意。

参 考 文 献

- [1] R. O. Schmidt, Multiple emitter location and signal parameter estimation, Proc. of RADC Spectrum Estimation Workshop, Rome Air Department Centre, Rome, N. Y., Oct. (1979), pp. 13—15.
- [2] Gao Shiwei, Bao Zheng, *Electron. Lett.*, **23**(1987) 12,643—645.
- [3] 吴仁彪,二维高分辨率阵列信号处理方法研究,西北工业大学硕士论文,1990年12月。
- [4] Tie-Jun Shan et al., *IEEE Trans. on ASSP*, **ASSP-33** (1985)4,806—810.

DEVELOPMENT OF FAST TWO-DIMENSIONAL HIGH-RESOLUTION DIRECTION-FINDING TECHNIQUES

Wu Renbiao

(Key Laboratory for Radar Signal Processing, Xidian University, Xi'an 710071)

Abstract A fast separable approach based on a cross array is presented which has coarse-grained parallelism. Its computational load is far less than that of the two-dimensional direct processing method and other existing separable approaches. In order to compensate for the performance degradation due to separable processing, two postprocessing schemes are also proposed. Some computer simulation results are provided for illustration in the end.

Key words Array signal processing; High-resolution direction-finding technique; Separable processing.