

一种小波系数模型在图像噪声参数估计中的应用¹

谢杰成 张大力 徐文立

(清华大学自动化系 北京 100084)

摘 要: 在小波图像处理中,通常利用 HH 子带来估计高斯白噪声方差,目前流行的估计方法是由 Donoho 和 Johnstone 提出的(简称 DJ 法),但是该方法给出的估计值通常都偏大.针对这一点,该文将他们的方法结合双随机小波系数模型,提出了一种新的、递归的方差估计方法.在已由 Donoho 的方法获得噪声方差估计的粗略估计的情况下,新方法利用统计学理论将 HH 子带中的信号滤除从而得到更接近于纯噪声的 HH 子带,然后利用这一新的 HH 子带来估计噪声的方差.结合 EM 参数估计方法,该方法还可以实现非高斯噪声参数的估计.实验表明新方法同 Donoho 法相比有很大的改善.

关键词: 系数模型, EM 算法, 小波变换

中图分类号: TN911.73 **文献标识码:** A **文章编号:** 1009-5896(2004)05-0673-06

On the Usage of a Wavelet Coefficient Model in Noise Variance Estimation of Image

Xie Jie-cheng Zhang Da-li Xu Wen-li

(Department of Automation, Tsinghua University, Beijing 100084, China)

Abstract During wavelet image processing, the variance of Gaussian white noise is usually estimated in the finest HH subband. A popular method, proposed by Donoho and Johnstone, is often found to provide too large an estimate. To tackle this problem, this paper presents a new method. The new method takes the rude estimate from Donoho's method as the starting point, and then a subband more dominated by noise is produced with the signal filtered out by a filter derived from statistics theory and a newly-proposed coefficient model, the doubly stochastic process. Thus a finer estimate is possible by using Donoho's method on the filtered HH subband. Through employing EM algorithm, the new method can be straightly extended to the case of non-Gaussian noise. Experimental results show that the new method can improve the estimate quite much when compared to Donoho's method.

Key words Coefficient model, EM algorithm, Wavelet transformation

1 引言

在多数小波图像去噪的应用中,噪声参数往往是未知的,而大多数小波去噪方法均需用到这些参数,所以如何更好地估计这些参数就显得非常重要.事实上,噪声参数的估计质量,在很大程度上影响着小波去噪的效果.

在图像噪声为零均值高斯白噪声时,噪声方差是唯一需估计的参数.目前比较常用的小波域噪声方差估计方法主要是基于小波图像的能量分布特性.考虑如图 1 的小波图像子带示意图,由于在最小尺度的 HH₁ 子带系数能量很小,所以带噪图像的 HH 子带通常都被认为是主要由噪声组成,从而可以在此子带进行噪声方差估计. Donoho 和 Johnstone 提出了一种噪声方差估计公式^[1](称为 DJ 法,见下文式(5)),但是实际中,由此式给出的噪声方差往往偏大.因此林哲民等人提出用混合高斯分布模型来近似小波系数的广义高斯分布^[2],在这样的模型下,带噪小波系数仍服从混合高斯分布,通过采用 Expectation Maximization(EM) 算法估计出混合高

¹ 2002-10-22 收到, 2003-06-03 改回
国家“十五”重点项目资助课题(2001BA609A)

斯分布的各部分方差, 并选择最小的方差系数作为噪声方差的估计。这种方法虽然比 DJ 方法有所改进, 但是仍然偏大, 事实上林氏方法中给出的噪声方差等于噪声方差同小波系数混合高斯分布中方差参数组中最小值的和, 因此该方法仍较适用于 HH 子带小波系数分布方差较小的情况。

HL ₁	HH ₁
HL ₂	HH ₂
LL ₂	LH ₂
	LH ₁

图 1 图像小波分解

如果能从林氏方法的结果中, 将对应于信号和噪声的方差尽可能地区分开来, 那么将会得到更好的估计结果。考虑两个互相独立、方差分别为 σ_1^2, σ_2^2 的零均值高斯过程, 它们的和将服从零均值, 方差为 $\sigma_1^2 + \sigma_2^2$ 的高斯分布, 而要根据和过程来获得原来的两个过程的方差, 从数学上是不可能的, 除非借助其它信息或先验条件。

从这个角度出发, 本文考虑自然图像的小波系数的特点, 将一种新的小波系数模型——双随机过程, 应用于高斯白噪声方差的估计, 并将之引申到非高斯白噪声参数的估计问题中。

在这里研究均方差的估计, 均方差经平方即可给出方差。

2 双随机小波系数模型

在双随机小波系数模型^[3]中, 一个子带中的小波系数被视为互相独立但不同分布的零均值高斯变量; 另一方面, 相邻小波系数的方差变化缓慢。这个模型主要基于以下两点依据: 小波变换具有白化功能^[4], 所以在子带中的系数被认为是近似统计独立的(在广泛被使用的广义高斯模型中, 也假定了这种独立性); 另外, 自然图像通常在空域中变化非常缓慢。在双随机模型中, 任一个位置的小波系数的均方差, 都可以由其邻域的样本方差近似:

$$\hat{\sigma}_s(i) = \left[\max \left(\frac{1}{M} \sum_{\varpi_x(k) \in \Omega} (\varpi_x(k))^2 - \sigma^2, 0 \right) \right]^{1/2} \quad (1)$$

其中 Ω 为 $\varpi_x(i)$ 的邻域, M 为 Ω 中系数的个数, σ 是小波噪声的标准方差, $\varpi_x(k)$ 为第 k 个带噪小波系数, Mihcak 给出了式 (1) 的最大似然解释^[3]。

由于小波变换是一种线性变换, 所以带噪图像的小波系数 $\varpi_x(i)$ 可以分解成两部分之和, 一部分对应于噪声(记 $\varpi_n(i)$ 并称为噪声系数), 另外一部分对应于信号(记 $\varpi_s(i)$ 并称为信号系数),

$$\varpi_x(i) = \varpi_n(i) + \varpi_s(i) \quad (2)$$

根据统计学理论, 可以得到当前小波系数所包含的噪声值 $\varpi_n(i)$ 的估计:

$$\hat{\varpi}_n(i) = E(\varpi_n(i) | \varpi_x(i)) = [\sigma^2 / (\hat{\sigma}_s^2(i) + \sigma^2)] \varpi_x(i) \quad (3)$$

3 小波域中方差估计的几个问题

在将方差(称为理想方差)一定的高斯白噪声加入图像的时候, 由于取值的有限性, 带噪的灰度值要经过截断, 所以实际上加于图像中的噪声会呈非高斯分布。但是, 由于小波变换具有很强的白化作用, 而且根据中心极限定理, 在小波变换基具有足够长度(足够大的消失矩)的情况下, 在小波域中的噪声可以认为近似服从于高斯分布, 但是实际的方差同理想方差相比, 会

有所减小。所以在下边的实验中，我们利用文献 [5] 中一估计子（基于平均绝对偏差），对实际噪声均方差进行了重新计算：

$$\sigma = \frac{1}{WH} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sum_{i=1}^W \sum_{j=1}^H |I'(i, j) - I(i, j)| \quad (4)$$

其中 $I'(i, j)$ 和 $I(i, j)$ 分别为带噪图像和原图像第 i 行 j 列的像素灰度， W 和 H 为图像的宽和高。

4 基于双随机系数模型的高斯白噪声方差估计

这个算法的主要思想是，假设已给定噪声均方差的一个估计，利用式 (1) 算出当前信号系数的标准方差，然后利用式 (3) 计算出当前噪声系数，将噪声系数代替当前的小波系数，再进行噪声均方差的新一轮估计。由式 (3) 可以看出，当 $\hat{\sigma}_s(i) = 0$ 时，噪声系数将等于当前小波系数本身，这说明新算法主要是希望通过找到含有信号的小波系数，并将信号滤掉，从而得到更“纯粹”由噪声组成的 HH 子带，从而得到更准确的估计。在图像的小波分解中，大系数通常代表着图像的边缘，而在图像的平缓区域，小波系数通常都接近于 0。所以，找含有信号的小波系数，实际上是找对应于边缘的系数。但是当时，并不能肯定该系数就是边缘，因为噪声可能造成误检。所以我们采取“邻域一致检测”的办法（其中黑点代表检出的边缘点， T 为预设的阈值）：

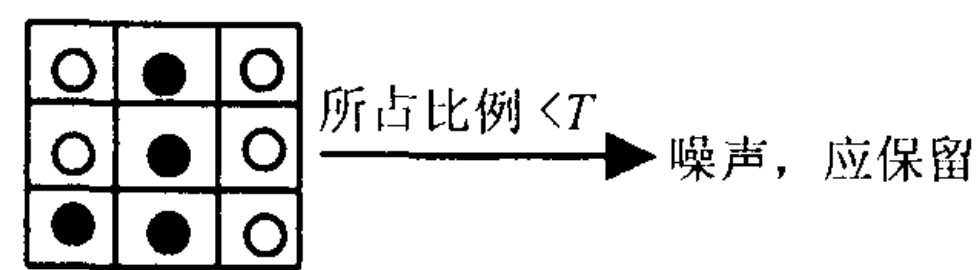


图 2 邻域一致检测法示意图

邻域一致检测的出发点在于认为任何一条边缘总是有一定的空间跨度的，从而边缘点总是簇集的，而噪声形成的伪边缘点通常是一些孤立点。由此我们可以给出算法步骤如下：

- (1) 给出一个噪声均方差的初始估计 $\hat{\sigma} = \sigma_0$ 。
- (2) 由式 (1) 和 σ_0 计算各信号系数的均方差 $\hat{\sigma}_s(i)$ 。
- (3) 当 $\hat{\sigma}_s(i) > 0$ 时，邻域检测，如是误检，则 $\hat{\omega}_n(i) = \omega_x(i)$ ，否则由式 (3) 计算 $\hat{\omega}_n(i)$ 。当 $\hat{\sigma}_s(i) = 0$ 时，则 $\hat{\omega}_n(i) = \omega_x(i)$ 。
- (4) 基于 $\hat{\omega}_n(i)$ 估计噪声方差 $\hat{\sigma}$ 。
- (5) 如本次估计值同上次估计值之差足够小，则算法结束并输出 $\hat{\sigma}$ ，否则转步骤 (2)。

从算法中可以看出，每次循环后，噪声均方差估计值都将减小，所以本方法的均方差估计步骤需要采取偏大的噪声均方差估计子。在我们的实验中，我们采用 Donoho 和 Johnstone 的估计方法：

$$\sigma = \frac{1}{0.6745N^2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N |\omega_x(i, j)| \quad (5)$$

另外，必须指出的是，本方法采取了递归的方式，所以会面临递归是否最后收敛的问题，我们通过在一致检测时增大邻域来保证算法的收敛性。事实上，随着邻域增大，通过邻域一致检测的系数就会减少，从而迭代后均方差减小速度将变慢，从而保证算法可以在满足步骤 (5) 中的结束条件，最极端的情况，是邻域增大到第一次迭代中所有小波系数都无法通过邻域一致检测，这样算法给出的结果与 DJ 方法相同。

5 非高斯白噪声参数的估计

凡是概率密度分布不是正态分布的噪声均为非高斯噪声, 所以非高斯噪声的概率密度函数形式会因种类而不同, 但是文献 [6] 指出, 所有的非高斯分布均可以表示为正态分布函数之和

$$f_n(x) = \sum_{m=0}^L P_m N(x, \mu_m, \sigma_m) \quad (6)$$

其中 $N(x, \mu_m, \sigma_m)$ 是均值为 μ_m , 方差为 σ_m^2 的正态分布概率密度函数, $\sum_{m=0}^L P_m = 1$, $P_m > 0$, 这种分布通常被称为高斯混合分布模型, P_m 被称为混合概率。

在这里, 我们只讨论零均值、对称分布的非高斯分布, 此时式 (6) 中正态分布项的均值为零。对高斯混合分布模型的参数估计, EM 算法是最常用的算法, 步骤如下:

(1) 初值设定: $k = 0$, $\{\sigma_m^{(0)}\}$ 为任意一组正实数, $\{P_m^{(0)}\}$ 为任意一组总和为 1 的非负实数。

$$(2) N_m^{(k)}(x) = N(x, 0, \sigma_m^{(k)}), \quad f_n^{(k)}(x) = \sum_{m=0}^L P_m^{(k)} N_m^{(k)}(x) .$$

$$(3) \sigma_m^{(k+1)} = \left\{ \sum_{l=1}^N x_l^2 \frac{P_m^{(k)} N_m^{(k)}(x_l)}{f_n^{(k)}(x_l)} \right\} / \sum_{l=1}^N \frac{P_m^{(k)} N_m^{(k)}(x_l)}{f_n^{(k)}(x_l)}, \quad P_m^{(k+1)} = \frac{1}{N} \sum_{l=1}^N \frac{P_m^{(k)} N_m^{(k)}(x_l)}{f_n^{(k)}(x_l)},$$

$\{x_l\}_{l=1}^N$ 为样本, N 为样本大小。

(4) 是否符合终结条件? 是则算法结束, 否则令 $k = k + 1$, 返回步骤 (2)。

EM 算法通常只适合混合高斯分布项数已知情况, 项数的确定可以借助于 MDL (Minimum Description Length) 准则 [7], 在这里提供一种树形算法, 其步骤如下:

(1) 假设系数服从两项高斯混合分布, EM 估计参数, 然后将像素分成两组 G_0 和 G_1 , $G_m = \{x_l | N_m(x, 0, \sigma_m) > N_{1-m}(x, 0, \sigma_m)\}$, $m = 0, 1$ 。

(2) 将新形成的每一组像素重新进入步骤 (1), 从而再细分为 2 组像素, 只有似然度比细分前增加, 才保留此次分解结果。如此树状分解直到不能再细分为止。

结合 EM 算法, 第 4 节的方法可以直接推广到基于小波图像的非高斯白噪声参数估计中, 整个算法的流程与第 4 节很相似, 不同的是估计噪声系数的式 (3) 改用下式 [8]:

$$\hat{\omega}_n(i) = E(\omega_n(i) | \varpi_x(i)) = \sum_{m=0}^n C_m \frac{\sigma_m^2}{\sigma_i^2 + \sigma_m^2} \varpi_x(i) \quad (7)$$

其中,

$$C_m = P_m N(\varpi_x(i), 0, \sqrt{\sigma_m^2 + \sigma_i^2}) / \left[\sum_{m=0}^n P_m N(\varpi_x(i), 0, \sqrt{\sigma_m^2 + \sigma_i^2}) \right] \quad (8)$$

6 实验结果

本文采用了 1000 幅自然图像 (包括山水、动物及 Lena、Barbara 等标准图像) 进行实验, 在利用本方法得到估计出的噪声均方差及获得 DJ 方法估计的均方差后, 求出两者与式 (4) 给出的实际噪声均方差之间的误差, 并将该误差的均值和方差列于表 1 进行比较:

表 1 两种方法的误差比较 (格式: 均值, 方差)

理想均方差	DJ 法		本方法	
	均值	方差	均值	方差
16	3.4647	0.7156	1.8059	0.5922
20	4.0185	0.6083	2.1411	0.6507
25	4.6988	0.6328	2.2095	0.8758
30	5.4308	0.5698	2.4950	1.0096
40	6.7533	0.5041	2.8138	1.3225

从表 1 中可知, 本方法估计的均方差值与实际值的误差均值, 比 DJ 方法误差的均值要小, 但误差的方差通常要比 DJ 方法稍大。假定两种方法的误差均服从正态分布且互相独立, 根据表 1 中误差的方差和均值, 可以计算本方法误差绝对值比 DJ 方法小这一事件的理论概率。表 2 中给出该事件的理论概率和及其在实验中发生的频率 (简称实验概率):

表 2 本方法误差比 DJ 方法小的理论概率和实验概率

理想均方差	理论概率	实验概率
16	0.9629	1
20	0.9824	1
25	0.9891	1
30	0.9940	1
40	0.9965	1

在实验中, 本方法估计出的均方差与实际值的偏差 (取绝对值) 均小于 DJ 法, 图 3 可以更直观地表明这一点。

表 3 给出了非高斯噪声情况下的估计结果 (基于 100 幅自然图像)。利用新方法比直接进行 EM 估计要更为准确些。

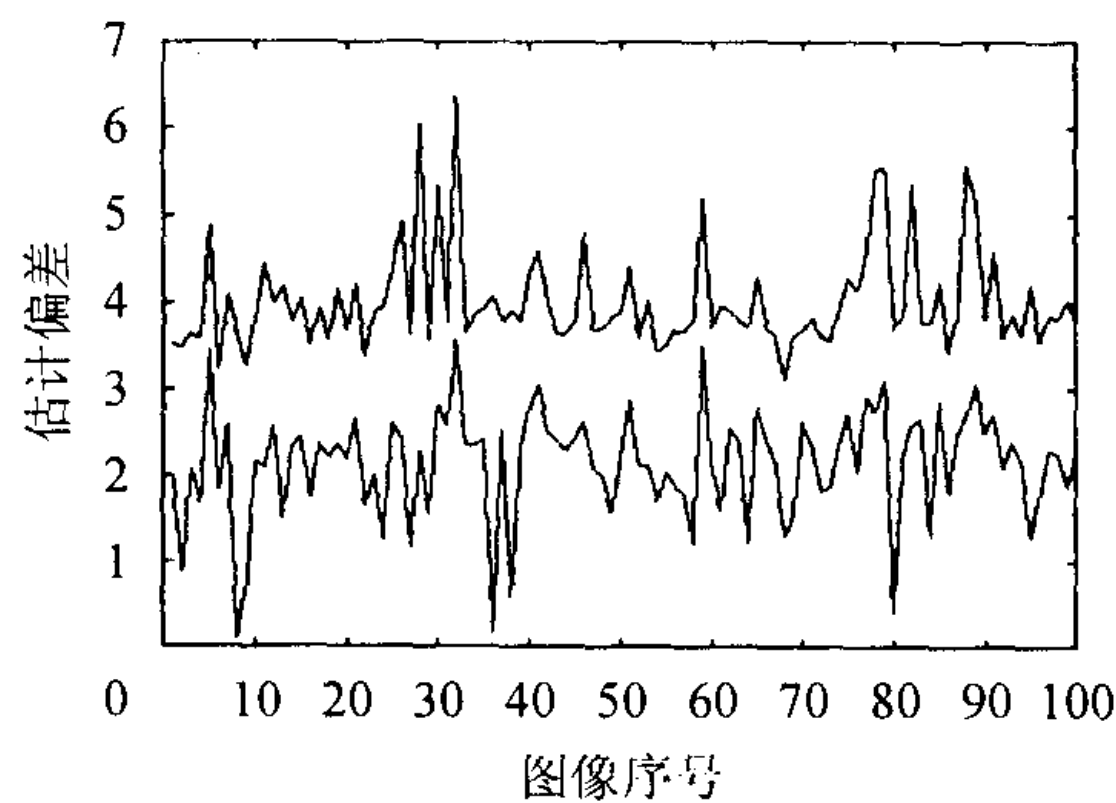


图 3 本方法与 DJ 法估计偏差比较 (上为 DJ 法, 下为本方法)

表 3 混合高斯噪声参数的估计结果 (估计均值, 均方差)

噪声参数	原始 EM 法		本方法	
	均值	均方差	均值	均方差
$\sigma_1 = 10$	9.54	0.68	9.81	0.65
$\sigma_1 = 30$	31.8	0.73	30.7	0.79
$P_1 = 0.7$	0.69	0.004	0.69	0.004
$P_2 = 0.3$	0.31	0.006	0.31	0.006

7 结论

本方法采用递归的方法, 在已获噪声方差粗略估计的情况下, 利用双随机系数模型和估计理论将 HH 子带中的信号尽可能地滤除掉, 从而使 HH 子带更接近于纯粹由噪声构成, 从而获得噪声参数的更精细估计。实验表明, 新方法可以取得很好的效果。

参 考 文 献

- [1] Donoho D L, Johnstone I M. Ideal spatial adaptation via wavelet shrinkage. *Biometrika*, 1994, 14(6): 425-455.
- [2] 林哲民等. 在小波域中进行图像噪声方差估计的 EM 方法. *红外与毫米波学报*, 2001, 20(6): 199-202.
- [3] Mihcak M K, Kozintsev I, Ramchandran K, *et al.*. Low-complexity image denoising based on statistical modeling of wavelet coefficients. *IEEE Signal Processing Letters*, 1999, 6(12): 300-303.
- [4] Vidakovic B, Lozoya C B. On time-dependent wavelet denoising. *IEEE Trans. on Signal Processing*, 1998, 46(9): 2549-2551.
- [5] Huber P J. *Robust Statistical Procedures*. Philadelphia: Society for Industrial and Applied Mathematics, 1977: 1-3.
- [6] Middleton D. Statistical-physical models of urban radio-noise environments—Part I: Foundations. *IEEE Trans. on Electromagnetic Compatibility*, 1972, EMC-14(1): 38-56.
- [7] Rissanen J. *Stochastic Complexity in Statistical Inquiry*. Singapore: World Scientific, 1998: 177-178.
- [8] Jiecheng Xie, Dali Zhang, Wenli Xu. Wavelet denoising in non-Gaussian noise using MDL principle, Proc. of WCICA'02, Shanghai, China, 2002: 2075-2079.

谢杰成: 男, 1975 年生, 博士生, 主要从事小波图像处理、模式识别方面的研究。

张大力: 男, 1946 年生, 教授, 主要从事图像处理、模式识别、图像融合方面的研究。

徐文立: 男, 1947 年生, 教授, 博士生导师, 主要从事机器视觉、变频调速、模糊控制等领域的研究。