

FIR 数字滤波器的简化格型实现*

张 玉 洪 保 铮

(西北电讯工程学院电子工程研究所, 西安)

摘要 格型滤波器在数值计算性能和结构的模块化等方面都优于直接型, 但实现起来较复杂. 本文提出一种实现 FIR 数字滤波器的简化格型结构, 它所需的硬件设备量只有常规格型实现时的一半, 与直接型实现时相当. 文中给出了从直接型到简化格型的综合算法. 并对线性相位 FIR 数字滤波器的格型综合算法作了简化. 用实例演示了本文的主要结论.

关键词 滤波器; FIR 数字滤波器; 格型滤波器

一、引 言

有限冲激响应 (FIR) 数字滤波器, 由于其本质上的稳定性, 且可设计成具有严格的线性相位特性, 因而得到了广泛的应用. FIR 数字滤波器可用很多不同的结构形式来实现^[1]. 由于硬件实现时, 字长总是有限的, 量化误差和运算舍入误差又不可避免, 因此, 人们一直在努力寻找具有最好数值计算性能的实现结构. Itakura 和 Saito^[2] 提出的格型结构具有对参数量化误差和运算舍入误差不敏感等优良特性^[3,4], 在某些场合, 格型结构的量化性能比直接型或级联型有 3—5 bit 的得益^[5,6], 运算舍入误差也有几个比特的得益^[7]; 并且它还具有模块化结构, 便于集成化; 因而引起了人们的广泛重视. 格型滤波器有两路输出, 结构比直接型的复杂. 以前人们用它实现 FIR 数字滤波器只利用了其中的一路, 因而它所需的硬件设备量要比直接型多约一倍. 本文提出一种简化的格型结构, 它将格型滤波器的两路输出进行适当的迟延和加权组合, 从而可实现比格型滤波器阶数高一倍的 FIR 数字滤波器, 其硬件设备量节省一半, 达到与直接型实现相当的程度. 本文讨论了一般复权和复输入的情况, 导出了从直接型到简化格型的综合算法.

在信号处理中, 线性相位 FIR 数字滤波器占有特别重要的地位. 如同其冲激响应具有共轭对称关系一样, 简化格型结构的滤波器系数也具有共轭对称关系. 本文详细讨论了在这种情况下下的格型综合方法.

二、简化格型结构

图 1 是本文提出的简化格型结构的信号流图, 图中分别画出了奇长度 ($2p + 1$ 点) 和偶长度 ($2p + 2$ 点) 的情况. 它们都是由一个普通的 p 阶格型滤波器构成的, 仍然保持着

* 1986年9月15日收到, 1987年3月28日修改定稿.

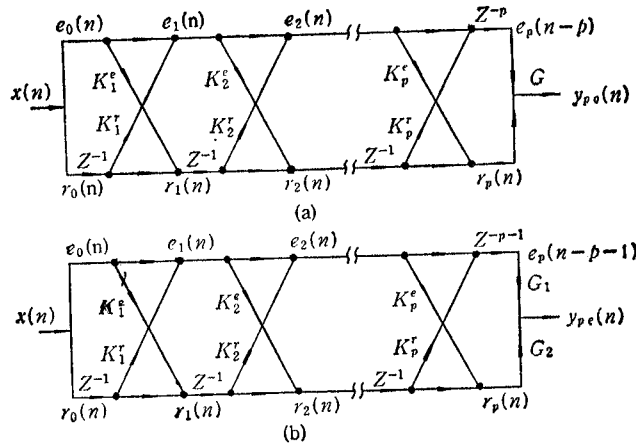


图 1 简化格型结构的信号流图

(a) $(2p + 1)$ 点 FIR 数字滤波器的简化格型结构 (b) $(2p + 2)$ 点 FIR 数字滤波器的简化格型结构

格型滤波器的基本传递关系:

$$e_0(n) = r_0(n) = x(n) \tag{1a}$$

$$e_m(n) = e_{m-1}(n) + K_m^e r_{m-1}(n-1) \tag{1b}$$

$$r_m(n) = r_{m-1}(n-1) + K_m^r e_{m-1}(n) \tag{1c}$$

其中, $x(n)$ 是输入信号(一般为复序列), K_m^r 和 K_m^e 是第 m 级的格型系数(也叫反射系数), $e_m(n)$ 和 $r_m(n)$ 习惯地被分别称为第 m 级的前向和后向输出。

在奇长度的情况下, 简化格型结构仅仅是将普通 p 阶格型滤波器的前向输出 $e_p(n)$ 延迟 p 个时间节拍后再与后向输出相加, 如图 1(a) 所示。总输出为

$$y_{po}(n) = G \cdot [e_p(n-p) + r_p(n)] \tag{2}$$

这里, 复常数 G 是权或比例因子, 它不影响滤波器的归一化频率响应, 常可取为 1。

偶长度情况下的简化格型结构与奇长度时的差别仅在于将 $e_p(n)$ 延迟 $(p+1)$ 个时间节拍后再与 $r_p(n)$ 加权相加, 如图 1(b) 所示。总输出为

$$y_{pe}(n) = G_1 e_p(n-p-1) + G_2 r_p(n) \tag{3}$$

式中 G_1, G_2 同样是权或比例因子。

为了证明(2)和(3)式分别对应于一个 $(2p+1)$ 点和 $(2p+2)$ 点的 FIR 数字滤波器, 下面来推导图 1 所示简化格型结构滤波器的传递函数或冲激响应。

(1)–(3) 式可用 Z 变换表示为

$$E_0(Z) = R_0(Z) = X(Z) \tag{4a}$$

$$E_m(Z) = E_{m-1}(Z) + K_m^r Z^{-1} R_{m-1}(Z) \tag{4b}$$

$$R_m(Z) = Z^{-1} R_{m-1}(Z) + K_m^e E_{m-1}(Z) \tag{4c}$$

$$Y_{po}(Z) = G [Z^{-p} E_p(Z) + R_p(Z)] \tag{5}$$

$$Y_{pe}(Z) = G_1 Z^{-p-1} E_p(Z) + G_2 R_p(Z) \tag{6}$$

定义传递函数:

$$A_m(Z) \triangleq E_m(Z) / X(Z) \tag{7a}$$

$$B_m(Z) \triangleq R_m(Z) / X(Z) \tag{7b}$$

$$H_0(Z) \triangleq Y_{p_o}(Z)/X(Z) \quad (8)$$

$$H_c(Z) \triangleq Y_{p_c}(Z)/X(Z) \quad (9)$$

则(4)–(6)式可写成

$$A_0(Z) = B_0(Z) = 1 \quad (10a)$$

$$A_m(Z) = A_{m-1}(Z) + K_m^r Z^{-1} B_{m-1}(Z) \quad (10b)$$

$$B_m(Z) = Z^{-1} B_{m-1}(Z) + K_m^e A_{m-1}(Z) \quad (10c)$$

$$H_0(Z) = G[Z^{-p} A_p(Z) + B_p(Z)] \quad (11)$$

$$H_c(Z) = G_1 Z^{-p-1} A_p(Z) + G_2 B_p(Z) \quad (12)$$

容易证明, $A_m(Z)$, $B_m(Z)$ 应分别具有如下的形式:

$$A_m(Z) = 1 + \sum_{i=1}^m a_{i,m} Z^{-i} \quad (13a)$$

$$B_m(Z) = (1 + \sum_{i=1}^m b_{i,m} Z^i) Z^{-m} \quad (13b)$$

式中 $a_{i,m}$, $b_{i,m}$ 是等效的横向滤波器系数. 将(13)式代入(10)式, 用比较系数法, 可得从格型到直接型, 即横向滤波器系数的转换算法:

$$m = 1, 2, \dots, p$$

置

$$a_{0,m} = b_{0,m} = 1 \quad (14a)$$

$$a_{m,m} = K_m^r, \quad b_{m,m} = K_m^e \quad (14b)$$

对 $i = 1, 2, \dots, m-1$, 计算

$$a_{i,m} = a_{i,m-1} + K_m^r b_{m-i,m-1} \quad (14c)$$

$$b_{i,m} = b_{i,m-1} + K_m^e a_{m-i,m-1} \quad (14d)$$

求得 $\{a_{i,p}\}$ 和 $\{b_{i,p}\}$ 后, 由(11)式可得

$$H_o(Z) = \sum_{n=0}^{2p} h_o(n) Z^{-n} \quad (15a)$$

式中

$$h_o(n) = \begin{cases} G \cdot b_{p-n,p}, & n = 0, 1, \dots, p-1 \\ 2G, & n = p \\ G \cdot a_{n-p,p}, & n = p+1, p+2, \dots, 2p \end{cases} \quad (15b)$$

显然, (15)式(因而(2)式)对应于一个 $(2p+1)$ 点的 FIR 数字滤波器, 其冲激响应 $h_o(n)$ 通过(15b)和(14)式由格型系数唯一地确定.

同理可求得

$$H_c(Z) = \sum_{n=0}^{2p+1} h_c(n) Z^{-n} \quad (16a)$$

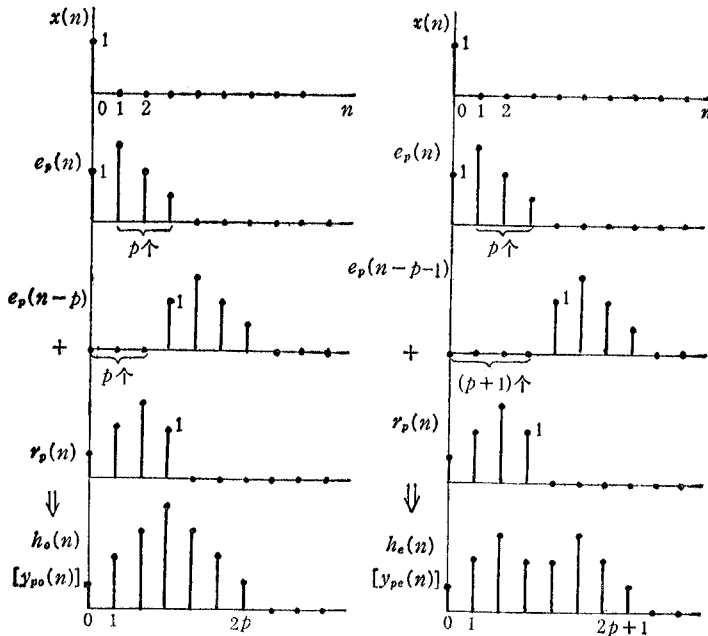
式中

$$h_c(n) = \begin{cases} G_2 b_{p-n,p}, & n = 0, 1, 2, \dots, p \\ G_1 a_{n-p-1,p}, & n = p+1, \dots, 2p+1 \end{cases} \quad (16b)$$

上式(从而(3)式)对应于一个 $(2p+2)$ 点的 FIR 数字滤波器, 其冲激响应 $h_c(n)$ 通过(16b)和(14)式也唯一地由格型系数确定.

为更直观地理解简化格型结构的工作机理, 图2画出了图1中各点的单位冲激响应

(图中只画出了实部)示意图。当输入为单位冲激时,由(13)式知, $e_p(n)$ 和 $r_p(n)$ 至多各有 $(p + 1)$ 个非零的输出样本,它们分别为 $\{1, a_{1,p}, \dots, a_{p,p}\}$ 和 $\{b_{p,p}, \dots, b_{1,p}, 1\}$ 。图 2(a) 中将 $e_p(n)$ 迟延 p 个时间节拍后与 $r_p(n)$ 相加,得到了 $(2p + 1)$ 个非零的输出样本 $y_{po}(n)$, 这就是奇长度 FIR 数字滤波器的冲激响应 $h_o(n)$ 。若将 $e_p(n)$ 迟延 $(p + 1)$ 个时间节拍再与 $r_p(n)$ 相加,就得到 $(2p + 2)$ 个非零的样本输出 $y_{pe}(n)$, 即偶长度 FIR 数字滤波器的冲激响应 $h_e(n)$, 如图 2(b) 所示。



(a) 奇长度的情况(设 $G = 1$) (b) 偶长度的情况(设 $G_1 = G_2 = 1$)

图 2 冲激响应示意图

三、格型综合算法

上节已经证明,一个 p 阶格型滤波器按图 1 的方法组合后可以实现比它本身阶数高一倍的 FIR 数字滤波器,其冲激响应完全由格型滤波器系数确定。本节考虑它的逆问题——格型综合,即假设已由某种方法求得了某 FIR 数字滤波器的冲激响应 $h(n)$, $n = 0, 1, \dots, N - 1$, 现在来求它的简化格型结构的滤波器系数。

先考虑 N 为奇数的情况。仍用 $h_o(n)$ 表示其冲激响应,即假设已知 $h_o(n)$, $n = 0, 1, \dots, 2p$ 。这时,可按图 2(a) 的反方向对 $h_o(n)$ 进行分解,求得 $A_p(Z)$ 和 $B_p(Z)$ 。进一步假定 $h_o(p) \neq 0$, 这并不失一般性,因为若 $h_o(p) = 0$, 可先令 $h_o(p) = 2$, 最后再从输入引一支路径 p 节拍延迟与输出相减,抵消改变 $h_o(p)$ 所带来的影响。由(15)式,有

$$G = h_o(p)/2 \tag{17a}$$

对于 $i = 1, 2, \dots, p$,

$$a_{i,p} = h_o(p + i)/G \tag{17b}$$

$$b_{i,p} = h_o(p-i)/G \quad (17c)$$

由(17)和(13)式求得 $A_p(Z)$ 和 $B_p(Z)$ 后,再由(10)式,可得如下关系. 对于 $m = p, p-1, \dots, 2, 1$,

$$K'_m = a_{m,m}, K^c_m = b_{m,m} \quad (18a)$$

$$A_{m-1}(Z) = \frac{A_m(Z) - K'_m B_m(Z)}{1 - K'_m K^c_m} \quad (18b)$$

$$Z^{-1} B_{m-1}(Z) = \frac{B_m(Z) - K^c_m A_m(Z)}{1 - K'_m K^c_m} \quad (18c)$$

由上式可求得所有 $m \leq p$ 的多项式 $A_m(Z)$, $B_m(Z)$ 和格型系数 K'_m, K^c_m . 用比较系数法,可得从直接型到格型的系数转换算法. 对于 $m = p, p-1, \dots, 2, 1$, 置

$$K'_m = a_{m,m}, K^c_m = b_{m,m} \quad (19a)$$

对 $i = 1, 2, \dots, m-1$, 计算

$$a_{i,m-1} = \frac{a_{i,m} - K'_m b_{m-i,m}}{1 - K'_m K^c_m} \quad (19b)$$

$$b_{i,m-1} = \frac{b_{i,m} - K^c_m a_{m-i,m}}{1 - K'_m K^c_m} \quad (19c)$$

(19)和(17)式一起组成了奇长度 FIR 数字滤波器的简化格型综合算法.

当 N 为偶数时,已知冲激响应 $h_c(n)$, $n = 0, 1, \dots, 2p+1$, 并设 $h_c(p)$ 和 $h_c(p+1)$ 都不为零(若为零时,则按前面对 $h_o(p) = 0$ 时的处理方法做). 由(16)式,易得

$$G_1 = h_c(p+1) \quad (20a)$$

$$G_2 = h_c(p) \quad (20b)$$

对于 $i = 1, 2, \dots, p$,

$$a_{i,p} = h_c(p+i+1)/G_1 \quad (20c)$$

$$b_{i,p} = h_c(p-i)/G_2 \quad (20d)$$

上式和(19)式一起构成了偶长度 FIR 数字滤波器的简化格型综合算法.

应当指出,如同在常规实现时并非所有的 FIR 数字滤波器都存在格型结构一样,也不是所有的 FIR 数字滤波器都能用图 1 所示的简化格型结构来实现. 事实上,当且仅当对所有的 m , $K'_m K^c_m \approx 1$ 时,(19)式才有确定解. 不过,这一条件在绝大多数场合都不形成限制. 我们也可采用类似于前述解决 $h_o(p) = 0$ 时的补救方法. 例如,可先在 $h_o(p)$ 上加一适当的数,以保证(19)式的分母不为零,最后再由输入引一支路,经 p 节拍延迟至输出端相减,抵消在 $h_o(p)$ 上所加数值的影响. 对于 N 为偶数的情况,可类此进行处理. 不过,作这种补救后,对滤波器数值性能所带来的影响还有待研究.

四、线性相位滤波器

在许多实际场合,要求滤波器具有线性相位特性. 这类 FIR 数字滤波器的冲激响应 $h(n)$ 有如下的共轭对称关系:

$$h(n) = h^*(N-n) \quad (21a)$$

式中“*”表示复共轭。当 N 为奇数(仍设为 $2p + 1$)时,有

$$h_o(n) = h_o^*(2p - n), \quad n = 0, 1, \dots, p - 1 \quad (21b)$$

且 $h_o(p)$ 为实数。当 N 为偶数(设为 $2p + 2$)时,

$$h_e(n) = h_e^*(2p + 1 - n), \quad n = 0, 1, \dots, p \quad (21c)$$

在这种情况下,我们发现,简化格型结构的滤波器系数之间也存在下列共轭对称关系:

$$K'_m = (K_m^e)^* \triangleq K_m \quad (22a)$$

$$G_1 = G_2^* \triangleq G' \quad (22b)$$

代入(14)式,可证

$$a_{i,m} = b_{i,m}^*, \quad i \leq m \quad (22c)$$

再由(13)式,可得

$$B_m(Z) = Z^{-m} A_m^*(1/Z^*) \quad (22d)$$

由(11)和(12)式,可求得简化格型线性相位滤波器的频率响应为

$$H_o(e^{j\omega}) = 2G e^{-j\omega p} \left[1 + \operatorname{Re} \left(\sum_{i=1}^p a_{i,p} e^{-j\omega i} \right) \right] \quad (23a)$$

$$H_e(e^{j\omega}) = 2e^{-j\omega(p+\frac{1}{2})} \operatorname{Re} \left(\sum_{i=1}^p G' a_{i,p} e^{-j\omega(i+\frac{1}{2})} \right) \quad (23b)$$

式中, $\operatorname{Re}(\cdot)$ 表示对 (\cdot) 取实部。

由于有(22)式的共轭对称关系存在,格型综合算法可作进一步的简化。

奇长度时,(17)式简化为

$$G = h_o(p)/2 \quad (24a)$$

$$a_{0,p} = 1 \quad (24b)$$

$$a_{i,p} = h_o(p+i)/G, \quad i = 1, 2, \dots, p \quad (24c)$$

偶长度时,(20)式变成

$$G' = h_e(p+1) \quad (25a)$$

$$a_{i,p} = h_e(p+i+1)/G', \quad i = 0, 1, \dots, p \quad (25b)$$

相应地,(19)式可简化为

$$K_m = a_{m,m}, \quad m = p, p-1, \dots, 2, 1 \quad (26a)$$

$$a_{i,m-1} = \frac{a_{i,m} - K_m a_{m-i,m}^*}{1 - |K_m|^2} \quad (26b)$$

由(24)和(26)式或(25)和(26)式,就可求得线性相位 FIR 数字滤波器的简化格型结构参数。

顺便提一下,如果滤波器是实系数的,直接实现线性相位 FIR 数字滤波器所需的乘法器数可减半^[1],这时,格型滤波器也存在一个乘法器的形式^[8],故乘法器数也可减半。总之,简化格型结构与直接型结构所需的设备量相当,但前者具有更好的数值性能。

五、数值性能和举例

用硬件(定点运算)来实现数字滤波器时,因寄存器和乘法器字长有限,故运算舍入误

差和量化误差不可避免。格型结构对这些误差都不如直接型结构敏感^[3-7]。研究还表明^[4], 格型滤波器的频率响应对各个格型系数的敏感度也不一样, 它对后几级的系数特别不敏感, 故可以粗量化, 而直接型结构显然不具有这一性质。简化格型结构只是将普通格型滤波器的两路输出进行适当的组合, 并未改变它的计算结构, 故它也应有同样优良的数值性能。

现以某可编程目标检测器 (PMTD) 中的“零速”滤波器为例来演示本文的主要结果。这个滤波器实际上是一个奇长度线性相位低通滤波器, 其振幅响应如图 3 所示。它是根据输出信噪比最大准则用优化方法设计出来的。滤波器长度为: $N = 15$ 或 $p = 7$; 它的单位冲激响应或权系数 $h_o(n)$ (精确值) 以及由 (24) 和 (26) 式计算出的参数 $a_{i,p}$ 和格型系数 K_m 如表 1 所示。

表 1

G = 0.5

i	0	1	2	3	4	5	6	7
$h_o(i)$.0228738	.0894083	.2121753	.3895904	.5991614	.8004485	.9465430	1
$a_{i,p}$	1	1.893086	1.600897	1.198323	.7791808	.4243506	.1788166	.0457476
K_i	—	1.002531	.5289459	.3729242	.2578319	.1788352	.0924058	.0457476

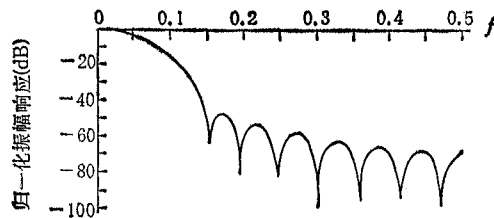


图 3 某 PMTD “零速”滤波器的频率响应(精确系数)

图 4 是一组量化(注: 舍入方式)后的频率响应(虚线)。为便于比较, 图中也画出了量化前的频率响应(细实线)。由图可以比较两种结构的量化性能。图 4(a) 和 4(b) 是将系数量化 12bit 后的结果。这时, 简化格型结构的频响几乎与量化前没有差别, 而直接型的差别在高频端已较明显。图 4(c) 和 4(d) 是量化成 10bit 后的情况, 在这种情况下, 直接型量化前后的频响差别已较大, 特别是阻带电平增高, 零点明显地偏离最佳点。这在 PMTD 中是不希望的。在本例中, 系数量化 10bit 的简化格型结构与量化 12bit 的直接型结构的性能相当。我们将前 3 个格型系数量化成 12bit, 后 4 个系数量化成 8bit, 得到的频响曲线如图 4(e) 所示。可见, 它与全部系数都量化成 12bit 时的频响(图 4(b)) 几乎一样。这些结果表明, 简化格型结构仍保持着格型滤波器的优良数值性能。

六、结 论

本文提出了一种用 p 阶格型滤波器实现 $(2p+1)$ 点或 $(2p+2)$ 点 FIR 数字滤波器的简化格型结构。这种简化格型所用的硬件设备量只有常规格型的一半, 相当于直接型实现所需的设备量, 但保持了常规格型结构所具有的优良特性(如优良的数值计算性能、

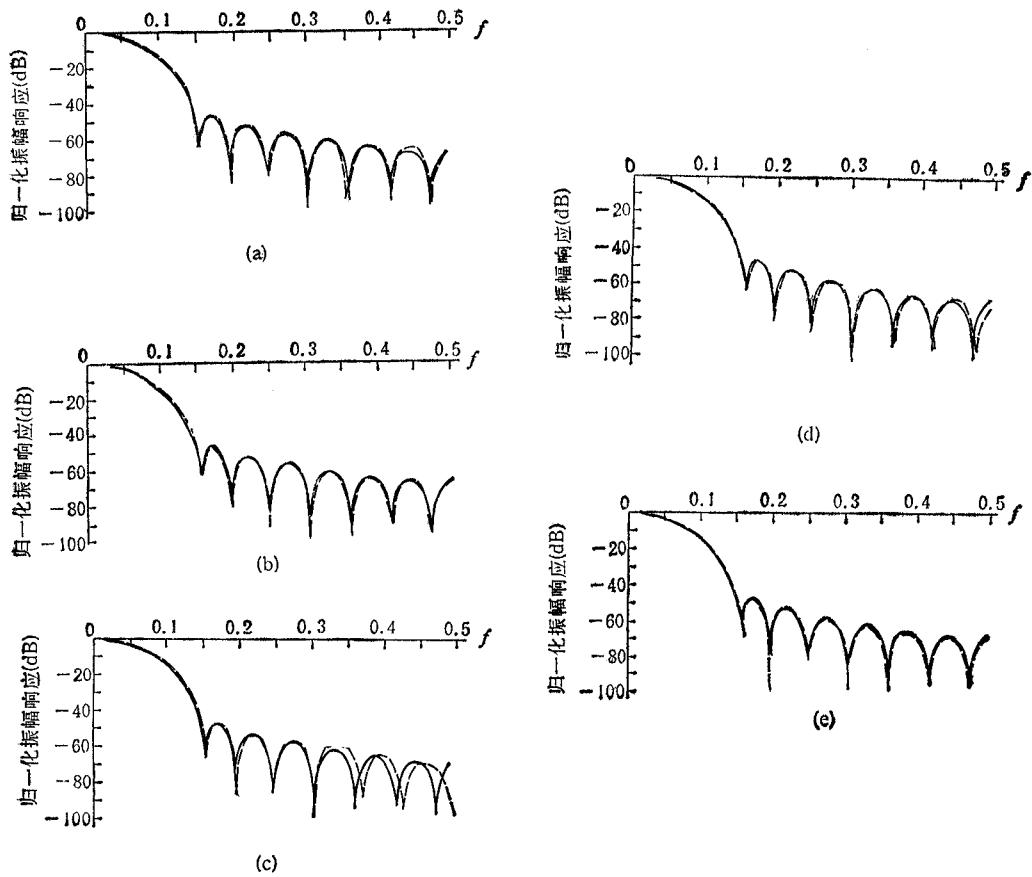


图4 系数量化后的频率响应

(a) 直接型(系数量化 12bit) (b) 简化格型(12bit) (c) 直接型(10bit)
 (d) 简化格型(10bit) (e) 简化格型($K(1)$ — $K(3)$, 12bit; $K(4)$ — $K(7)$, 8bit)

结构的模块性等)。文中还针对最常用的线性相位滤波器,将格型综合算法作了简化。最后给出的一个实例,支持了本文的主要结论。

参 考 文 献

- [1] M. Bellanger, *Digital Processing of Signals-Theory and Practice*, Wiley & Sons Ltd, New York, 1984.
- [2] F. Itakura, S. Saito, *Proc. 7th Int. Cong. Acoust.*, Budapest, 1971, Paper 25-c-1.
- [3] B. Friedlander, *Proc. IEEE*, **70**(1982), 829—867.
- [4] P. L. Chu, D. G. Messerschmitt, *IEEE Trans. on ASSP*, **ASSP-31**(1983), 685—705.
- [5] A. H. Gray, J. D. Markel, *IEEE Trans. on ASSP*, **ASSP-24**(1976), 459—473.
- [6] R. E. Crochiere, *IEEE Trans. on AU*, **AU-20**(1972), 240—246.
- [7] J. D. Markel, A. H. Gray, *IEEE Trans. on ASSP*, **ASSP-23**(1975), 473—486.
- [8] J. Makhoul, *IEEE Trans. on ASSP*, **ASSP-26**(1978), 304—314.

SIMPLIFIED LATTICE REALIZATION OF FIR DIGITAL FILTERS

Zhang Yuhong Bao Zheng

(Northwest Telecommunication Engineering Institute, Xi'an)

ABSTRACT Lattice filter is superior to its counterpart of direct structure in numerical properties and modularity etc., but it is more complex to realize. This paper suggests a simplified lattice structure for the realization of FIR digital filters, so that the hardware requirement is only half as many as that of the conventional lattice filter, comparable to that of the direct structure. The synthesis algorithms that transform the direct structure into the simplified lattice structure are given. Furthermore, the lattice synthesis algorithms for linear phase FIR digital filters are simplified. The main results are illustrated by a practical example.

KEY WORDS Filter; FIR digital filter; Lattice filter