非重复跳频序列族的理论限制

梅 文 华
(北京航空工程技术研究中心　北京　100076)

摘要　本文讨论跳频多址组网用的非重复序列族的理论限制，得到了限定汉明相关条件下非重复序列族中序列数目和序列长度的理论限，列举了几种达到了理论限的非重复跳频序列族.

关键词　跳频序列,非重复跳频序列,理论限制

1 引　　言

跳频序列族的设计主要涉及四个参数：频隙数目 q、序列长度 L、序列数目 N 以及汉明相关 $H(X,Y)$. 这些参数是相互约束的，已有文献论述了限定汉明相关条件下序列数目和序列长度的理论限[1],以及给定序列长度和频隙数目时序列的汉明相关的下限[2]，并提出了几种达到最佳性能的跳频序列族的构造方法[2-4]. 不过，文献[1]中的结果不适用于非重复序列族.

如果每个频隙在一个序列周期中最多出现一次，则该序列称为非重复序列. 非重复序列具有理想的自相关特性,有利于同步检测,在许多工程中得到了重要应用.

本文讨论非重复序列族的理论限制，得到了同步组网时限定汉明相关条件下非重复序列的数目的理论限，并由此推导出异步组网时限定汉明相关条件下非重复序列的长度和数目的理论限.

2 限定相关条件下非重复序列族的理论限

跳频序列性能的最好测度是汉明相关. 给定频隙集合 A 上(A 中频隙数目为 q)，长度为 L 的两个序列 $X=\{x(j)\}$ 和 $Y=\{y(j)\}$ 在相对时延 τ 时的汉明相关为

$$H_{XY}(\tau)=\sum_{j=0}^{L-1}h[x(j),y(j+\tau)],\ 0\leqslant\tau<L.$$

这里 $x(j),y(j+\tau)\in A$，且

$$h[x(j),y(j+\tau)]=\begin{cases}1, & 若\ x(j)=y(j+\tau);\\ 0, & 若\ x(j)\neq y(j+\tau);\end{cases}$$

其中 $j+\tau$ 以模 L 运算.

1993-09-03 收到，1994-03-29 定稿

梅文华　男，1965 年生，工程师，现从事航空无线电技术研究工作.

跳频通信系统的组网方式分为同步组网和异步组网，它们的区别主要在于系统是否具有统一的时间基准。同步组网时，系统中各用户具有统一的时间基准；异步组网时，系统中没有统一的时间基准。

同步组网时，任意两个序列 X 和 Y 之间的汉明相关是指

$$H_{XY} = H_{XY}(0) = \sum_{j=0}^{L-1} h[x(j), y(j)].$$

异步组网时，任意两个序列 X 和 Y 之间的汉明相关是指

$$H(X,Y) = \max_{0 \leqslant \tau < L}\{H_{XY}(\tau)\}.$$

汉明相关也称为击中次数、重合次数等。

这里首先讨论同步组网时限定汉明相关 H_{XY} 条件下非重复序列族的序列数目的理论限制。

定理 1　同步组网时，最多能构造出 $N_S = q(q-1)(q-2)\cdots(q-k)$ 个非重复序列，使得任意两个序列间的击中次数不大于 k。

证明　用反证法。假设能构造出比 $q(q-1)(q-2)\cdots(q-k)$ 更多的序列而且其中任意两个序列间的击中次数不大于 k。

任取 $k+1$ 个相位。因要求序列具有非重复性，则在 $k+1$ 个相位上只可能有 $q(q-1)(q-2)\cdots(q-k)$ 种不同的排列。因此，在多于 $q(q-1)(q-2)\cdots(q-k)$ 个序列的任何非重复序列集合中，至少有两个序列在所有 $k+1$ 个相位上具有相同的排列，也就是说，在同步组网时至少有两个序列将击中 $k+1$ 次。而这与序列集合中任意两个序列间击中次数不大于 k 的假设相矛盾，故定理得证。

实际上要实现同步组网是相当困难的，人们更愿选择异步组网方式。同步组网的 N_S 个序列中有许多是平移等价的，不能全部用于异步组网。

定义　设 $X=\{x(j)\}$ 和 $Y=\{y(j)\}$ 是两个跳频序列，如果对于所有的 $j=0,1,2,\cdots,L-1$，有 $x(j)=y(j+\tau)$，则称 X 与 Y 平移等价。

如将平移等价的序列构成一个子集，则该子集的大小为 L，即子集内的序列数目为 L。

按照汉明相关的定义，同步组网时平移等价的 L 个非重复序列之间的击中次数为 0；而异步组网时平移等价的 L 个序列之间的击中次数为 L，达到最大。

定理 2　设 N_A 表示异步组网时限定汉明相关 $H(X,Y)$ 不大于 k 的条件下最多能构造出的长度为 L 的非重复序列的数目，则有

$$N_A L \leqslant q(q-1)(q-2)\cdots(q-k),\ \text{这里}\ L \leqslant q.$$

证明　每个非重复序列和它的 $L-1$ 个平移等价的序列一起形成一个具有 L 个序列的子集。在同步组网时，这 L 个序列之间的汉明相关 H_{XY} 均为 0。

N_A 个平移不等价的非重复序列和它们的平移等价的序列一起形成一个具有 $N_A L$ 个序列的集合。

因 N_A 个平移不等价的非重复序列中任意两个序列在所有相对时延的情况下击中次数不大于 k，则在同步组网时，可保证 $N_A L$ 个序列之间任意两个序列的击中次数 H_{XY} 均不大于 k。因此我们有 $N_A L \leqslant N_S$。由定理 1，必有

$$N_A L \leqslant q(q-1)(q-2)\cdots(q-k).$$ 证毕

定理2给出了频隙数目 q、序列长度 L、序列数目 N_A 以及最大击中次数 k 之间的相互约束关系，很有实际意义. 可以看出，给定频隙数目 q 时，在允许最大击中次数 k 的前提下，序列数目与序列长度成反比；而在给定序列长度条件下，为了得到更多的序列以分配给用户使用，则要牺牲序列的汉明相关性能.

如果构造出的非重复序列族的四个参数满足 $N_A L = q(q-1)(q-2)\cdots(q-k)$，则该序列族称为最佳 k 次击中非重复序列族.

3 一次击中序列族

对于非重复序列族，如果族内任意两个序列的汉明相关 $H(X,Y)$ 为1，也就是说族内任意两个序列在所有相对时延下的最大击中次数为1，则该序列族称为一次击中序列族.

取 $k=1$，不难得出：

推论 1 最多能构造 q 个长度为 $L=q-1$ 的非重复序列，使得任意两个序列在所有相对时延下的击中次数不大于1.

推论 2 最多能构造 $q-1$ 个长度为 $L=q$ 的非重复序列，使得任意两个序列在所有相对时延下的击中次数不大于1.

推论 3 最多能构造 qt 个长度为 $L=(q-1)/t$ 的非重复序列，使得任意两个序列在所有相对时延下的击中次数不大于1.

文献[5]中综述了一次击中序列族的构造方法，其中构造1、构造4、构造5是达到了推论1所述极限的最佳非重复序列族；构造2（不计全0序列）和构造6是达到了推论2所述极限的最佳非重复序列族.

文献[4]提出的基于 m 序列构造最佳跳频序列族的一般模型中，当抽头数等于移位寄存器级数 n 时，所构造出的序列族也是达到了推论1所述极限的最佳非重复序列族，基于一个 m 序列可构造 $\phi(q-1)$ 族非重复序列，族内序列数目为 q，序列长度为 $q-1$.

基于 m 序列可以构造出达到推论3所述极限的非重复跳频序列族，我们将另文论述.

4 k 次击中序列族

对于 $k>1$ 的非重复序列族，根据定理2，我们有：

推论 4 最多能构造 $q(q-2)\cdots(q-k)$ 个长度为 $L=q-1$ 的非重复序列，使得任意两个序列在所有相对时延下的击中次数不大于 k，这里 $k\geqslant 2$.

我们知道，q 个频隙可构造长度为 $L=q-1$ 的非重复序列 $q(q-2)!$ 个. 不难看出，所有这些序列之间的最大击中次数为 $k=q-2$. 这样，该序列族的四个参数依等式满足定理2的理论极限，因此可以说，这是一个最佳的 $q-2$ 次击中非重复序列族.

例如，如 $q=5$，$k=3$ 时，5个频隙可构造长度为4的非重复序列30个：

0123	0124	0134	0234	1234
0132	0142	0143	0243	1243
0213	0214	0314	0324	1324
0231	0241	0341	0342	1342
0312	0412	0413	0423	1423
0321	0421	0431	0432	1432

推论 5　最多能构造 $(q-1)(q-2)\cdots(q-k)$ 个长度为 $L=q$ 的非重复序列，使得任意两个序列在所有相对时延下的击中次数不大于 k，这里 $k\geqslant 2$.

我们知道，q 个频隙可构造长度为 $L=q$ 的非重复序列 $(q-1)!$ 个. 不难看出，所有这些序列之间的最大击中次数为 $k=q-2$. 这样，该序列族的四个参数依等式满足定理 2 的理论极限，因此可以说，这是一个最佳的 $q-2$ 次击中非重复序列族.

例如，如 $q=5$, $k=3$ 时，5 个频隙可构造长度为 5 的非重复序列 24 个:

01234	02134	03124	04123
01243	02143	03142	04132
01324	02314	03214	04213
01342	02341	03241	04231
01423	02413	03412	04312
01432	02431	03421	04321

除了上述两种特殊情况满足定理 2 以外，关于 k 次击中 $(1<k<q-2)$ 的非重复跳频序列族的构造，至今还没有完全解决. G. Solomon[3], S. V. Maric 和 E. L. Titlebaum[6]，以及杨义先[7]在这方面做了一些工作.

杨义先将有限域上的置换多项式引入跳频序列的设计之中，得到了若干类具有优良相关性能的非重复跳频序列族，详见文献[7].

顺便指出，文献[7]中存在错误. 根据该文中相关函数的定义，考虑了多普勒频移的影响. 在此条件下，第 2 类码至第 8 类码的置位算子中的 $k+b$ 都应该去掉 b (也就是去掉时间移位等效的码字)，同时所有置位算子中的 d 都应该去掉 (也就是去掉频率移位等效的码字).

本文中不考虑多普勒频移的影响，也就是说跳频组网时允许使用频率移位等效的码字. 在此条件下，可以保留文献[7]的置位算子中的 d.

5 结　　语

本文讨论了非重复序列族的理论限制，得到了频隙数目 q、序列长度 L、序列数目 N_A 和汉明相关 $H(X,Y)$ 之间的相互约束关系，具有重要的理论意义，为构造非重复序列族指出了努力方向，也为评价各种构造方法的性能提供了判别标准.

文中还列举了几种达到了理论极限的一次击中非重复序列族的构造方法，介绍了几种 k 次击中的非重复序列族.

关于 k 次击中 ($1 < k < q - 2$) 的非重复序列族的构造，还是一个值得进一步探索的课题。

参 考 文 献

[1] Seay T S. Hopping Patterns for Bounded Mutual Interference in Frequency Hopping Multiple Access. Proc. 1982 IEEE MILCOM Conference. Boston, Massachusetts: 1982, 22.3.1—22.3.6.
[2] Lempel A, Greenberger H. IEEE Trans. on IT, 1974, IT-20(1):90—94.
[3] Solomon G. Optimal Frequency Hopping Sequences for Multiple Access. AD-915852, 1973, 33—35.
[4] 梅文华. 通信学报,1991,12(1): 70—73.
[5] Shaar A A, Davies P A. IEE Proc.-F, 1984, 131(7):719—724.
[6] Maric S V, Titlebaum E L. IEEE Trans. on AES, 1990, AES-26(6):1035—1039.
[7] 杨义先. 电子科学学刊,1992,14(6): 588—595.

THEORETICAL BOUNDS ON FAMILIES OF NONREPEATING FH SEQUENCES

Mei Wenhua
(Beijing Aeronautical Technology Research Centre, Beijing 100076)

Abstract Theoretical bounds are given for the number and period of nonrepeating Frequency Hopping (FH) sequences in asynchronous frequency hopping multiple access, with a guaranteed maximum number of pairwise hits. Practical constructions for families of nonrepeating sequences which reach the theoretical bounds are also given in this paper.

Key words Frequency hopping sequences, Nonrepeating sequences, Theoretical bounds