一种在大随机噪声下提取奇点的方法* **

贾有忠 冯孔豫
(中国科学院电子学研究所，北京)

摘要 从目标的脉冲响应中提取目标的复自然谐振频率是一种识别目标很有效的手段，但实时性和抗噪声能力一直未能得到有效解决. 本文提出的算法能在 0dB 信噪比条件下有效地提取目标的复自然谐振频率，且信号处理时间只需数十毫秒.

关键词 目标识别；奇点提取；相关技术；对称变换

1. 概述

一个物体受电磁脉冲激励后，会产生一个特定的响应. 理论和实验都证明[1]，目标的后期响应是一些指数衰减的振荡信号之和. 重要的是，这些衰减因子和振荡频率(一般统称为复自然谐振频率，即拉普拉斯变换域中的奇点)唯一地由目标的材料，结构和尺度所决定，而与激励脉冲的波形和目标的空间方位无关. 这就是用自然谐振频率识别目标的理论依据.

十多年来，提取奇点的算法已有数十种之多[2]，但都难以实用，其原因是噪声容限和计算实时性均不能满意. 本文的基本思想是用同一目标的两个后期响应做互相关运算，由于来自同一目标的两个信号总是相关的，而两个噪声样本是随机独立的. 因此，相关序列的信号与噪声功率之比将大大提高. 由于相关运算产生了镜象分量，需经对称变换[3]，然后借助于 Prony 方法，求得目标的复自然谐振频率.

2. 后期响应模型

设接收机前的信号是

$$f(t) = s(t) + x(t) \tag{1}$$

对于自由空间中的简单导体的后期响应，一般有[4]

$$s(t) = \sum_{i=0}^{M-1} A_i e^{s_i t} \tag{2}$$

(1)式中的 $x(t)$ 是加性随机噪声，一般为一高斯过程.

将接收机等效为一个 Q 阶低通滤波器，它的传输函数是

$$H(s) = \sum_{i=M}^{M+Q-1} \frac{A_i}{s - s_i} \tag{3}$$

$$Q = 1 \text{ 或 } 2$$

* 1988年1月28日收到，1988 6月7月修改定稿.
** 中国科学院科学基金资助课题.

冲激响应是

$$h(t) = \sum_{i=M}^{M+Q-1} A_i e^{s_i t} \tag{4}$$

那么，通过滤波器的信号是 $f(t)$ 和 $h(t)$ 的卷积，记作

$$\tilde{f}(t) = f(t) * h(t) \tag{5}$$

即

$$\begin{aligned}\tilde{f}(t) &= s(t) * h(t) + x(t) * h(t)\\ &= \tilde{s}(t) + \tilde{x}(t)\end{aligned}$$

首先

$$\begin{aligned}\tilde{s}(t) &= \int_0^t s(t) \cdot h(t-\tau) d\tau\\ &= \int_0^t \sum_{i=0}^{M-1} A_i e^{s_i \tau} \cdot \sum_{j=M}^{M+Q-1} A_j e^{s_j (t-\tau)} d\tau\end{aligned}$$

经运算化简后，得

$$\tilde{s}(t) = \sum_{i=0}^{M+Q-1} \tilde{A}_i e^{s_i t} \tag{6}$$

其中

$$\tilde{A}_i = A_i \sum_{j=0}^{M+Q-1} \frac{A_j}{s_i - s_j} \tag{7}$$

显然，信号经过低通滤波器后，它原来的M个奇点位置无任何改变，只是加进了滤波器的Q个奇点．它们具有相同的数学形式，可一并处理。

其次

$$\begin{aligned}\tilde{x}(t) &= \int_0^\infty h(\tau) x(t-\tau) d\tau\\ &= \sum_{j=M}^{M+Q-1} A_j \int_0^\infty e^{s_j \tau} x(t-\tau) d\tau\end{aligned} \tag{8}$$

所以 $\tilde{x}(t)$ 也是一个随机过程[5]。

3. 相关处理效果

设接收机已截获同一目标的两个脉冲响应分别是 $f_1(t)$ 和 $f_2(t)$，相应地有

$$\tilde{f}_1(t) = s_1(t) * h(t) + x_1(t) * h(t)$$

记为

$$\tilde{f}_1(t) = \tilde{s}_1(t) + \tilde{x}_1(t) \tag{9}$$

和

$$\begin{aligned}\tilde{f}_2(t) &= s_2(t) * h(t) + x_2(t) * h(t)\\ \tilde{f}_2(t) &= \tilde{s}_2(t) + \tilde{x}_2(t)\end{aligned} \tag{10}$$

将 $\tilde{f}_1(t)$ 和 $\tilde{f}_2(t)$ 抽样，得

$$\begin{aligned}\tilde{f}_1(n) &= \tilde{s}_1(n) + \tilde{x}_1(n)\\ &= \sum_{i=0}^{M+Q-1} \tilde{A}_i Z_i^n + \tilde{x}_1(n)\end{aligned} \tag{11}$$

和

$$\tilde{f}_2(n) = \tilde{s}_2(n) + \tilde{x}_2(n)$$

$$= \sum_{i=0}^{M+Q-1} \tilde{B}_i Z_i^n + \tilde{x}_2(n) \tag{12}$$

$$n = 0, 1, 2, \cdots N-1$$

这里N是抽样长度,并且

$$Z_i = e^{s_i \Delta T} \tag{13}$$

定义一个相关序列

$$R(k) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-k-1} \tilde{f}_1(n) \cdot \tilde{f}_2(n+k) \tag{14}$$

$$k = 0, 1, 2, \cdots N-1$$

将(14)式简记为

$$R(k) = \tilde{f}_1(k) \odot \tilde{f}_2(k)$$

那儿有

$$R(k) = \tilde{s}_1(k) \odot \tilde{s}_2(k) + \tilde{s}_1(k) \odot \tilde{x}_2(k) + \tilde{s}_2(k) \odot \tilde{x}_1(k) + \tilde{x}_1(k) \odot \tilde{x}_2(k) \tag{15}$$

设(15)式右端四项依次为 $R_{ss}(k)$,$R_{sx_1}(k)$,$R_{sx_2}(k)$ 和 $R_{xx}(k)$,则

$$R_{ss}(k) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-k-1} \tilde{s}_1(n) \cdot \tilde{s}_2(n+k)$$

$$= \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-k-1} \sum_{i=0}^{M+Q-1} \tilde{A}_i Z_i^n \sum_{j=0}^{M+Q-1} \tilde{B}_j Z_j^{n+k}$$

运算化简,得

$$R_{ss}(k) = \sum_{i=0}^{M+Q-1} [C_i Z_i^k + D_i Z_i^{-k}] \tag{16}$$

式中

$$C_i = \frac{\tilde{A}_i}{N} \sum_{j=0}^{M+Q-1} \frac{\tilde{B}_j}{1 - Z_i Z_j} \tag{17}$$

$$D_i = -\frac{\tilde{A}_i Z_i^N}{N} \sum_{j=0}^{M+Q-1} \frac{\tilde{B}_j Z_j^N}{1 - Z_i Z_j} \tag{18}$$

第四项是

$$R_{xx}(k) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-k-1} \tilde{x}_1(n) \cdot \tilde{x}_2(n+k)$$

$$= \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-k-1} \int_0^\infty h(\tau) x_1(n-\tau) d\tau \int_0^\infty h(v) x_2(n+k-v) dv$$

运算化简得

$$R_{xx}(k)=h(k)\odot h(k)*r_{xx}(k) \tag{19}$$

其中

$$r_{xx}(k)=\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-k-1}x_1(n)x_2(n+k) \tag{20}$$

同理，(15)式的第二、第三项分别是

$$R_{sx_1}(k)=h(k)\odot h(k)*r_{sx_1}(k) \tag{21}$$

和

$$R_{sx_2}(k)=h(k)\odot h(k)*r_{sx_2}(k) \tag{22}$$

这里

$$r_{sx_1}(k)=\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-k-1}s_1(n)x_2(n+k) \tag{23}$$

$$r_{sx_2}(k)=\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-k-1}s_2(n)x_1(n+k) \tag{24}$$

由于 $x_1(n)$ 和 $x_2(n)$ 是随机过程的两个样本，因此，当N充分大时，有

$$\left.\begin{aligned}r_{xx}(k)\approx 0\\ r_{sx}(k)\approx 0\end{aligned}\right\} \tag{25}$$

将(25)—(16)式回代到(15)式，得

$$R(k)=R_{ss}(k)$$

即

$$R(k)=\sum_{i=0}^{M+Q-1}[C_iZ_i^k+D_iZ_i^{-k}] \tag{26}$$

显然，(26)式已不含随机噪声成分。

使用单个脉冲响应做自相关处理时，推导过程与上述类似，只是因为

$$r_{xx}(k)=r_x(k)=\sigma_0^2\delta(k) \tag{27}$$

式中 σ_0^2 是随机噪声的平均功率。

于是

$$R(k)=\sum_{i=0}^{M+Q-1}[C_iZ_i^k+D_iZ_i^{-k}]+\sigma_0^2\sum_{i=M}^{M+Q-1}[C_i'Z_i^k+D_i'Z_i^{-k}] \tag{28}$$

式中

$$\left.\begin{aligned}C_i&=\frac{\widetilde{A}_i}{N}\sum_{j=0}^{M+Q-1}\frac{\widetilde{A}_j}{1-Z_iZ_j}\\ D_i&=-\frac{\widetilde{A}_iZ_i^N}{N}\sum_{j=0}^{M+Q-1}\frac{\widetilde{A}_jZ_j^N}{1-Z_iZ_j}\\ C_i'&=A_i\sum_{j=M}^{M+Q-1}\frac{A_j}{1-Z_iZ_j}\\ D_i'&=-A_iZ_i^N\sum_{j=M}^{M+Q-1}\frac{A_jZ_j^N}{1-Z_iZ_j}\end{aligned}\right\} \tag{29}$$

可见(28)式也没有噪声干扰.

关于如何从相关序列 $R(k)$ 中提取奇点，作者已在文献[3]中给出，此处不再赘述.

4. VAX-11/780 机上模拟结果一例

表 1 是 20 次噪声模拟结果的统计参数，用的是高斯型伪随机噪声. SNR = 0dB $Q=1$

表 1

真值		提取值			
		实部		虚部	
实部	虚部	均值	变差系数	均值	变差系数
−0.18	+0.80	−0.172	0.10	+0.81	0.04
−0.18	−0.80	−0.172	0.10	−0.81	0.04
−0.20	+1.40	−0.21	0.12	+1.43	0.05
−0.20	−1.40	−0.21	0.12	−1.43	0.05
−3.2	0.00	−3.00	0.20	0.00	0.00

参 考 文 献

[1] C. W. Chuang, *IEEE Trans. on AES*, **AES-12** (1976), 583—589.
[2] 王卫延，奇点展开法中直接提取极点的方法综述，中国科学院电子学研究所，内部资料，1985 年.
[3] 贾有忠，冯孔豫，一种在大背景噪声下提取极点的方法，当代电子对抗技术学术交流会论文集，安徽合肥，1987 年 5 月.
[4] A. J. Berni, *IEEE Trans on AES*, **AES-11** (1975), 147—154.
[5] 樊昌信等编，通信原理，国防工业出版社，1980 年.

A METHOD FOR SINGULARITY EXTRACTION FROM PULSE RESPONSE WITH LARGE RANDOM NOISE

Jia Youzhong Feng Kongyu
(Institute of Electronics, Academia Sinica, Beijing)

ABSTRACT Target identification by its complex natural frequencies is considered the one of the most prospective methods. However, the tolerance of SNR and the real-time behaviour of the method can not be met simultaneously in the process of extracting the frequencies from target's pulse response. In this paper, an aproach algorithm for the natural frequencies detection are proposed. The algorithm is still efficient in case of SNR = 0dB, and takes only tens millisecond.

KEY WORDS Target identification; Singularity extraction; Relevant technique; Symmetrical transformation