

用电磁场算子理论分析脊波导的传输特性¹

任列辉 邢 锋 徐 诚 陈志雨 宋文森

(中国科学院电子学研究所 北京 100080)

摘 要: 该文用电磁场算子理论通过多个虚拟边界的电场和磁场的耦合求解脊波导的本征值, 在此基础上讨论了脊波导的传输特性, 所采用的并矢格林函数没有奇异项, 可以化为标量格林函数来表示, 而且能很方便地计算, 并与经典方法计算的结果进行了比较。

关键词: 矢量偏微分算子, 并矢格林函数, 脊波导, 本征值

中图分类号: TN814 **文献标识码:** A **文章编号:** 1009-5896(2004)02-0326-06

Analysis of the Transmission Property of Ridge Waveguide with Operator Theory

Ren Lie-hui Xing Feng Xu Cheng Chen Zhi-yu Song Wen-sen

(Institute of Electronics, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100080, China)

Abstract The eigenvalues of ridge waveguide are solved with the matching of electric and magnetic field on the multiple virtual boundaries by partial differential operator theory and the property of ridge waveguide is discussed. The dyadic Green's function has no singularity and can be transformed into scalar Green's function. The results computed by partial differential operator theory are compared with those computed by equivalent transmission line method.

Key words Vector partial differential operator, Dyadic Green function, Ridge waveguide, Eigenvalues

1 引言

电磁场算子理论为分析具有复杂几何结构的波导和谐振腔提供了一种精确的解析分析方法^[1-2]。这种方法不但在理论上具有严格性, 而且把并矢格林函数化为两个标量格林函数进行运算, 从而解决了经典场论中并矢格林函数的复杂形式和“奇异项”在实际应用中造成的困难。文献 [3, 4] 给出了将这一方法用于异形波导横电模分析的方法和计算结果, 文献 [5] 在文献 [3, 4] 的基础上对面矢量格林定理进行了分析和讨论, 给出了适合于横磁模的变换和计算结果。但是异形波导只有一个匹配边界, 对于实际使用的波导和谐振腔, 往往具有多个匹配边界, 本文以在微波工程中常使用的脊波导(如图 1 所示)为例来分析多个匹配边界问题的处理。

2 脊波导本征值的数学推导

如图 2 所示脊波导的横截面, 这一结构对于 y 方向来说是均匀的, 所以可以把 y 方向的本征值和本征函数分离出来, 只要求出对应的 xz 面上的二维结构的解, 就可以确定脊波导的传输特性。不同的是这一系统必须用两个虚拟边界才能够把整个系统分为三个规则系统, 即有 S_1 和 S_2 两个虚拟边界和 I, II, III 3 个子区域。对规则系统, TE 和 TM 模是独立的。由于这一系统的基模是 TE 模, 实际工作中, 一般都应用在基模, 所以我们只讨论 TE 模的计算。为了方便起见, 把 x 轴放在中间。建立如图 2 所示的坐标。3 个子区域在图 2 中的坐标下的范围: I

¹ 2002-07-09 收到, 2002-12-06 改回
国家自然科学基金资助项目 (60171002)

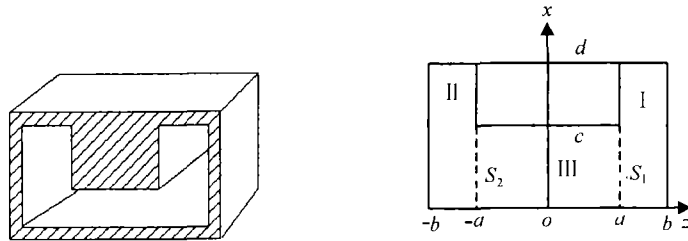


图 1 脊波导示意图

图 2 以 y 为领示矢量时, xz 方向的横截面图

区为: $(0, d; a, b)$; II 区为: $(0, d; -b, -a)$; III 区为: $(0, c; -a, a)$ 。在 S_1 和 S_2 边界上, 切向电场的展开式可以分别表示为

$$\hat{n} \times \mathbf{E}^1(\mathbf{R}') = \sum_{\nu} A_{\nu} \mathbf{F}_{\text{III}}(\nu, \mathbf{R}')|_{S_1}, \quad \mathbf{R}' \text{ 在边界 } S_1 \text{ 上} \quad (1)$$

和

$$\hat{n} \times \mathbf{E}^2(\mathbf{R}') = \sum_{\nu} B_{\nu} \mathbf{F}_{\text{III}}(\nu, \mathbf{R}')|_{S_2}, \quad \mathbf{R}' \text{ 在边界 } S_2 \text{ 上} \quad (2)$$

上式中 $\mathbf{F}_{\text{III}}(\nu, \mathbf{R}')$ 为 III 区的磁本征函数, A_{ν}, B_{ν} 分别是切向电场在 S_1 和 S_2 边界上的展开系数, $\mathbf{F}_{\text{III}}(\nu, \mathbf{R}')|_{S_1}$ 和 $\mathbf{F}_{\text{III}}(\nu, \mathbf{R}')|_{S_2}$ 表示它是一个空间上的二维函数。由于 S_1 面, S_2 面对于 III 区来说是一个完整的侧面, 该系统是一个规则系统, 所以 S_1 面, S_2 面上的本征函数对于二维的边界面上的函数来说是完备的, 这样可以保证它对于切向电场展开的完备性, 这样 I 区的磁场是

$$\mathbf{H}_I(\mathbf{R}) = i\omega\epsilon_0 \sum_{\nu} A_{\nu} \sum_{\lambda} \frac{1}{\lambda^2 - k^2} \mathbf{F}_I(\lambda, \mathbf{R}) \int_{S_1} \mathbf{F}_I(\lambda, \mathbf{R}') \cdot \mathbf{F}_{\text{III}}(\nu, \mathbf{R}')|_{S_1} ds' \quad (3)$$

II 区的磁场是

$$\mathbf{H}_{\text{II}}(\mathbf{R}) = i\omega\epsilon_0 \sum_{\nu} B_{\nu} \sum_{\eta} \frac{1}{\eta^2 - k^2} \mathbf{F}_{\text{II}}(\eta, \mathbf{R}') \int_{S_2} \mathbf{F}_{\text{II}}(\eta, \mathbf{R}') \cdot \mathbf{F}_{\text{III}}(\nu, \mathbf{R}')|_{S_2} ds' \quad (4)$$

III 区的磁场是

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_{\text{III}}(\mathbf{R}) = -i\omega\epsilon_0 \left\{ \sum_{\nu} A_{\nu} \sum_{\mu} \frac{1}{\mu^2 - k^2} \mathbf{F}_{\text{III}}(\mu, \mathbf{R}') \int_{S_1} \mathbf{F}_{\text{III}}(\mu, \mathbf{R}') \cdot \mathbf{F}_{\text{III}}(\nu, \mathbf{R}')|_{S_1} ds' \right. \\ \left. + \sum_{\nu} B_{\nu} \sum_{\mu} \frac{1}{\mu^2 - k^2} \mathbf{F}_{\text{III}}(\mu, \mathbf{R}') \int_{S_2} \mathbf{F}_{\text{III}}(\mu, \mathbf{R}') \cdot \mathbf{F}_{\text{III}}(\nu, \mathbf{R}')|_{S_2} ds' \right\} \quad (5) \end{aligned}$$

这里 $\mathbf{F}_I(\lambda, \mathbf{R}), \mathbf{F}_{\text{II}}(\eta, \mathbf{R}), \mathbf{F}_{\text{III}}(\mu, \mathbf{R})$ 分别是 I 区, II 区和 III 区的磁本征函数, λ, η, μ 分别是 I 区, II 区和 III 区的本征值, 对于 I 区和 II 区来说, 只有一个激励源, 分别在边界 S_1 和边界 S_2 上, 而对于 III 区来说则有两个激励源, 一个在边界 S_1 上而另一个在边界 S_2 上。这里的磁场是表示整个域内的矢量。当整个复合系统有稳定解的时候, 即 k 为复合系统的本征值时, 由同样的切向电场在公共边界上激励的切向磁场也应该相等, 由于它们是在各自域内的矢量函数, 只有在公共边界上的切向磁场才相等。为了表示 S_1 和 S_2 两个匹配面的切向磁场, 就要分

别以 $\mathbf{F}_{\text{III}}(\boldsymbol{\chi}, \mathbf{R})|_{S_1}$, $\mathbf{F}_{\text{III}}(\boldsymbol{\chi}, \mathbf{R})|_{S_2}$ 为权函数对两个区域的磁场取内积, 把它们等起来, 从而得到对于 S_1 和 S_2 面上的两个联立代数方程组:

$$\begin{aligned} & \sum_v A_v \left\{ \sum_\mu \frac{1}{\mu^2 - k^2} \int_{S_1} \mathbf{F}_{\text{III}}(\boldsymbol{\mu}, \mathbf{R}) \cdot \mathbf{F}_{\text{III}}(\boldsymbol{\chi}, \mathbf{R})|_{S_1} ds \int_{S_1} \mathbf{F}_{\text{III}}(\boldsymbol{\mu}, \mathbf{R}') \cdot \mathbf{F}_{\text{III}}(\boldsymbol{\nu}, \mathbf{R}')|_{S_1} ds' \right. \\ & \quad \left. + \sum_\eta \frac{1}{\eta^2 - k^2} \int_{S_1} \mathbf{F}_{\text{I}}(\boldsymbol{\lambda}, \mathbf{R}) \cdot \mathbf{F}_{\text{III}}(\boldsymbol{\chi}, \mathbf{R})|_{S_1} ds \int_{S_1} \mathbf{F}_{\text{I}}(\boldsymbol{\lambda}, \mathbf{R}') \cdot \mathbf{F}_{\text{III}}(\boldsymbol{\nu}, \mathbf{R}')|_{S_1} ds' \right\} \\ & + \sum_v B_v \sum_\mu \frac{1}{\mu - k^2} \int_{S_1} \mathbf{F}_{\text{III}}(\boldsymbol{\mu}, \mathbf{R}) \cdot \mathbf{F}_{\text{III}}(\boldsymbol{\chi}, \mathbf{R})|_{S_1} ds \int_{S_2} \mathbf{F}_{\text{III}}(\boldsymbol{\mu}, \mathbf{R}') \cdot \mathbf{F}_{\text{III}}(\boldsymbol{\nu}, \mathbf{R}')|_{S_2} ds' = 0 \quad (6) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \sum_v B_v \left\{ \sum_\mu \frac{1}{\mu^2 - k^2} \int_{S_2} \mathbf{F}_{\text{III}}(\boldsymbol{\mu}, \mathbf{R}) \cdot \mathbf{F}_{\text{III}}(\boldsymbol{\chi}, \mathbf{R})|_{S_2} ds \int_{S_2} \mathbf{F}_{\text{III}}(\boldsymbol{\mu}, \mathbf{R}') \cdot \mathbf{F}_{\text{III}}(\boldsymbol{\nu}, \mathbf{R}')|_{S_2} ds' \right. \\ & \quad \left. + \sum_\eta \frac{1}{\eta^2 - k^2} \int_{S_2} \mathbf{F}_{\text{II}}(\boldsymbol{\eta}, \mathbf{R}) \cdot \mathbf{F}_{\text{III}}(\boldsymbol{\chi}, \mathbf{R})|_{S_2} ds \int_{S_2} \mathbf{F}_{\text{II}}(\boldsymbol{\eta}, \mathbf{R}') \cdot \mathbf{F}_{\text{III}}(\boldsymbol{\nu}, \mathbf{R}')|_{S_2} ds' \right\} \\ & + \sum_v A_v \sum_\lambda \frac{1}{\mu - k^2} \int_{S_2} \mathbf{F}_{\text{III}}(\boldsymbol{\mu}, \mathbf{R}) \cdot \mathbf{F}_{\text{III}}(\boldsymbol{\chi}, \mathbf{R})|_{S_2} ds \int_{S_1} \mathbf{F}_{\text{III}}(\boldsymbol{\mu}, \mathbf{R}') \cdot \mathbf{F}_{\text{III}}(\boldsymbol{\nu}, \mathbf{R}')|_{S_1} ds' = 0 \quad (7) \end{aligned}$$

为了方便, 记

$$\begin{aligned} W^{(1)} &= W_\mu^{(1)} + W_\lambda^{(1)} \\ &= \sum_\mu \frac{1}{\mu^2 - k^2} \int_{S_1} \mathbf{F}_{\text{III}}(\boldsymbol{\mu}, \mathbf{R}) \cdot \mathbf{F}_{\text{III}}(\boldsymbol{\chi}, \mathbf{R})|_{S_1} ds \int_{S_1} \mathbf{F}_{\text{III}}(\boldsymbol{\mu}, \mathbf{R}') \cdot \mathbf{F}_{\text{III}}(\boldsymbol{\nu}, \mathbf{R}')|_{S_1} ds' \\ & \quad + \sum_\eta \frac{1}{\eta^2 - k^2} \int_{S_1} \mathbf{F}_{\text{I}}(\boldsymbol{\lambda}, \mathbf{R}) \cdot \mathbf{F}_{\text{III}}(\boldsymbol{\chi}, \mathbf{R})|_{S_1} ds \int_{S_1} \mathbf{F}_{\text{I}}(\boldsymbol{\lambda}, \mathbf{R}') \cdot \mathbf{F}_{\text{III}}(\boldsymbol{\nu}, \mathbf{R}')|_{S_1} ds' \quad (8) \end{aligned}$$

$$W^{(2)} = \sum_\mu \frac{1}{\mu - k^2} \int_{S_1} \mathbf{F}_{\text{III}}(\boldsymbol{\mu}, \mathbf{R}) \cdot \mathbf{F}_{\text{III}}(\boldsymbol{\chi}, \mathbf{R})|_{S_1} ds \int_{S_2} \mathbf{F}_{\text{III}}(\boldsymbol{\mu}, \mathbf{R}') \cdot \mathbf{F}_{\text{III}}(\boldsymbol{\nu}, \mathbf{R}')|_{S_2} ds' \quad (9)$$

$$W^{(3)} = \sum_\lambda \frac{1}{\mu - k^2} \int_{S_2} \mathbf{F}_{\text{III}}(\boldsymbol{\mu}, \mathbf{R}) \cdot \mathbf{F}_{\text{III}}(\boldsymbol{\chi}, \mathbf{R})|_{S_2} ds \int_{S_1} \mathbf{F}_{\text{III}}(\boldsymbol{\mu}, \mathbf{R}') \cdot \mathbf{F}_{\text{III}}(\boldsymbol{\nu}, \mathbf{R}')|_{S_1} ds' \quad (10)$$

$$\begin{aligned} W^{(4)} &= W_\mu^{(4)} + W_\eta^{(4)} \\ &= \sum_\mu \frac{1}{\mu^2 - k^2} \int_{S_2} \mathbf{F}_{\text{III}}(\boldsymbol{\mu}, \mathbf{R}) \cdot \mathbf{F}_{\text{III}}(\boldsymbol{\chi}, \mathbf{R})|_{S_2} ds \int_{S_2} \mathbf{F}_{\text{III}}(\boldsymbol{\mu}, \mathbf{R}') \cdot \mathbf{F}_{\text{III}}(\boldsymbol{\nu}, \mathbf{R}')|_{S_2} ds' \\ & \quad + \sum_\eta \frac{1}{\eta^2 - k^2} \int_{S_2} \mathbf{F}_{\text{II}}(\boldsymbol{\eta}, \mathbf{R}) \cdot \mathbf{F}_{\text{III}}(\boldsymbol{\chi}, \mathbf{R})|_{S_2} ds \int_{S_2} \mathbf{F}_{\text{II}}(\boldsymbol{\eta}, \mathbf{R}') \cdot \mathbf{F}_{\text{III}}(\boldsymbol{\nu}, \mathbf{R}')|_{S_2} ds' \quad (11) \end{aligned}$$

和式联立, 得到线性方程组:

$$\begin{bmatrix} W^{(1)} & W^{(2)} \\ W^{(3)} & W^{(4)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_N \\ B_1 \\ \vdots \\ B_N \end{bmatrix} = 0 \quad (12)$$

为了使上面的矩阵方程有非平凡解, 要求系数行列式等于零:

$$\text{Det}|W(k)| = 0 \quad (13)$$

此即为本征方程, 这样就可以求出脊波导的一系列的非零本征值。

3 计算方法与结果

以 y 方向为领示矢量方向, 在图 2 所示坐标系下, I 区, II 区和 III 区的归一化 M 类标量波函数分别是

$$\left. \begin{aligned} \psi^I &= \sqrt{\frac{(2 - \delta_{\lambda m}^0)(2 - \delta_{\lambda n}^0)}{d(b-a)}} \cos \frac{\lambda m \cdot \pi}{d} x \cos \frac{\lambda n \cdot \pi}{(b-a)} (z-a) \\ \psi^{II} &= \sqrt{\frac{(2 - \delta_{\eta m}^0)(2 - \delta_{\eta n}^0)}{d(b-a)}} \cos \frac{\eta m \cdot \pi}{d} x \cos \frac{\eta n \cdot \pi}{(b-a)} (z+b) \\ \psi^{III} &= \sqrt{\frac{(2 - \delta_{\mu m}^0)(2 - \delta_{\mu n}^0)}{c \times 2a}} \cos \frac{\mu m \cdot \pi}{c} x \cos \frac{\mu n \cdot \pi}{2a} (z+a) \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

I 区, II 区和 III 区的归一化磁矢量波函数就可表示为

$$\left. \begin{aligned} F_I(\lambda, \mathbf{R}) &= \frac{1}{\lambda k_c} \nabla \times \nabla \times \psi^I \hat{y} \\ F_{II}(\eta, \mathbf{R}) &= \frac{1}{\eta k_c} \nabla \times \nabla \times \psi^{II} \hat{y} \\ F_{III}(\mu, \mathbf{R}) &= \frac{1}{\mu k_c} \nabla \times \nabla \times \psi^{III} \hat{y} \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

k_c 是垂直于领示矢量的横向本征值, 它是为了使矢量波函数归一化所必须加的归一化系数。代入式 (8)–(11), 利用面矢量格林定理可以把矢量函数的积分运算化为标量函数的积分运算^[5]。

本文中的脊波导是左右对称的, 所以 $W^{(3)} = W^{(2)}$, $W^{(4)} = W^{(1)}$, 并且 $W^{(2)}$, $W^{(3)}$ 是对角阵, 这样就大大简化了计算。 $W_{\mu}^{(1)}$, $W_{\lambda}^{(1)}$ 的对 μn 和 λn 的求和不容易收敛, 利用原函数节省计算时间和保证精度, 矩阵元素中实际上只有 x 方向的积分, 但是 z 方向的函数与求和式有关, 先必须保留, 在求出原函数后, 就可以代入 z 和 z' 的值。式 (8) 中的 $\sqrt{k^2 - (\lambda m \cdot \pi/c)^2}$ 和 $\sqrt{k^2 - (\lambda m \cdot \pi/d)^2}$ 在 $k^2 - (\lambda m \cdot \pi/c)^2 < 0$ 和 $k^2 - (\lambda m \cdot \pi/d)^2 < 0$ 时, 正弦和余弦函数都变换成虚宗量的函数, 实际上只是一个双曲正切函数。而式 (9) 中的 $W^{(2)}$ 对 μn 的求和却不能照搬原函数, 因为原函数有使用范围, 对这里的 $W^{(2)}$ 式原函数的值是奇异的, 两边不相等, 不能照搬, 还得用求和表达式。

计算图 2 所示的脊波导, 取其结构尺寸为 $a=2.1\text{cm}$, $b=12.3\text{cm}$, $c=1.42\text{cm}$, $d=11.1\text{cm}$, 并与对应的长宽分别为 $2b$ 和 d 矩形波导对比, 如表 1 所示:

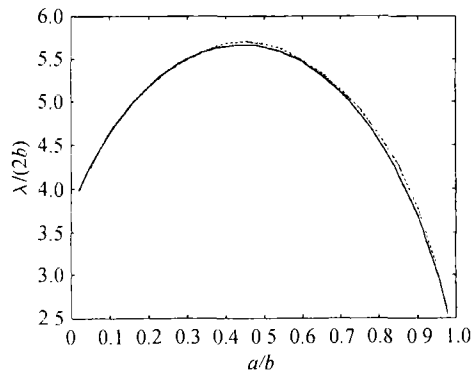
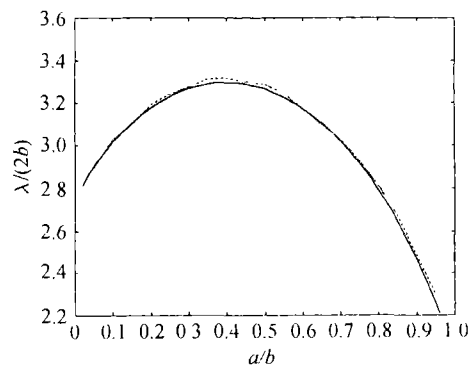
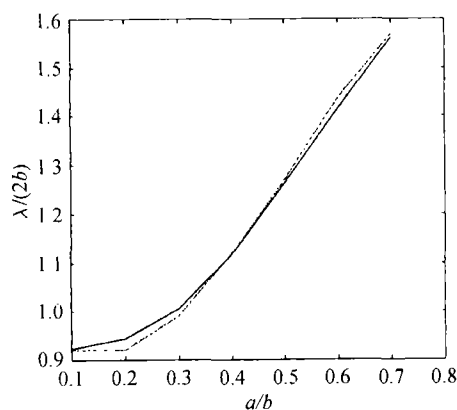
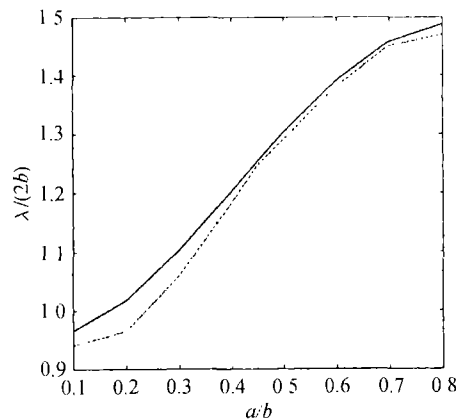
表 1 脊波导和对应矩形波导的本征值

前 7 个本征值 ($\times 10^{-1}$)	k_1	k_2	k_3	k_4	k_5	k_6	k_7
脊波导	0.554379	2.697521	2.895707	3.001465	3.202974	3.878962	4.324257
矩形波导	1.277070 (TE ₁₀)	2.554140 (TE ₂₀)	2.830264 (TE ₀₁)	3.105044 (TE ₁₁)	3.812352 (TE ₂₁)	3.831211 (TE ₃₀)	4.763252 (TE ₃₁)

可以看出,脊波导的基模 (TE₁₀) 的本征值还不到对应的矩形波导的基模的一半,脊波导最低高阶模 (TE₂₀) 的本征值比矩形波导最低高阶模的大,这说明脊波导的主模带宽比矩形波导的扩展了一倍多,这正是脊波导的优点。

当 $b=12.3$, $d=2.0 \times 0.45b$, c 分别是 $0.1d$ 和 $0.35d$ 时,考察脊形宽度的变化对基模和最低高阶模的截止波长的影响,如图 3- 图 6 中所示,图中实线是用算子理论计算的结果,虚线是文献 [6] 中用等效传输线方法分析的结果。两种方法的结果吻合得很好。

当 $b=12.3$, $d=2.0 \times 0.45b$, $a=0.5b$ 时考察脊形深度的变化对基模截止波长的影响,如图 7 所示,图中实线是用算子理论计算的结果,虚线是文献 [6] 中用等效传输线方法分析的结果。同样地,两种方法的结果很吻合。

图 3 $c = 0.1d$ 时 TE₁₀ 模的截止波长随着脊形宽度的变化图 4 $c = 0.35d$ 时 TE₁₀ 模的截止波长随着脊形宽度的变化图 5 $c = 0.1d$ 时 TE₂₀ 模的截止波长随着脊形宽度的变化图 6 $c = 0.35d$ 时 TE₂₀ 模的截止波长随着脊形宽度的变化

从上面看出, 脊波导的优点就是降低了主模的截止频率, 提高了最低高阶模的截止频率, 从而扩展了工作带宽. 脊波导工作带宽随着脊深的增加而增加, 在脊深一定的情况下, 存在一个使带宽最大的最优的脊形宽度. 当脊形深度是波导宽边的 0.9 倍时, 最优的脊形宽度是波导长边的约 0.45 倍; 当脊形深度是波导宽边的 0.65 倍时, 最优的脊形宽度是波导长边的约 0.4 倍.

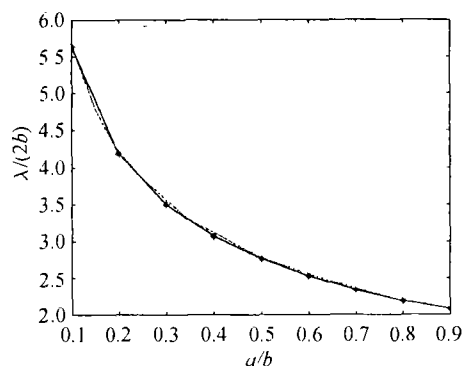


图 7 $a = 0.5b$ 时 TE_{10} 模的截止波长随着脊形深度的变化

4 讨论和展望

本文使用算子理论分析脊波导的传播特性, 从结果上看是经典方法已经解决过的问题, 但是所用的方法完全不同. 本文所述方法的优点在于数学上的严密性和物理概念上的合理性, 而且能精确地求解任意高阶模. 对于给定了结构尺寸的脊波导, 能够精确分析其特性; 对于给定了性能指标的脊波导, 能够精确地设计. 这类问题的解决将对一大类微波系统的计算和设计提供一种简单而有效的方法.

参 考 文 献

- [1] 宋文森. 并矢格林函数和电磁场的算子理论. 合肥: 中国科技大学出版社, 1991, 第 9 章.
- [2] 宋文森. 现代电磁场理论的数学基础——矢量偏微分算子. 北京: 科学出版社, 1999, 第 5 章.
- [3] Xu Cheng, Zhang Xiaojuan, Song Wenmiao. Calculating the cutoff frequencies of heteromorphic waveguide by operator theory, 5th International Symposium on Antenna, Propagation and EM Theory, Beijing, 2000: 281-284.
- [4] Zhang Xiaojuan, Xu Cheng, Song Wenmiao. Calculating higher mode characteristics of heteromorphic waveguide by operator theory. Proc. of 2000 Asia-Pacific Microwave Conference, Sydney, 2000: 970-974.
- [5] 邢 锋, 徐 诚, 宋文森. 用电磁场算子理论计算复合系统的本征值. 电子与信息学报, 2003, 25(7): 975-981.
- [6] 廖承恩. 微波技术基础 (上). 西安: 西北电讯工程学院出版, 1979, 第 4 章.

任列辉: 男, 1975 年生, 研究实习员, 在职博士生, 从事电磁场与微波技术方面的研究工作.

邢 锋: 男, 1966 年生, 博士生, 从事电磁场与微波技术方面的研究工作.

徐 诚: 男, 1972 年生, 博士生, 从事电磁场与微波技术方面的研究工作.

陈志雨: 男, 1945 年生, 研究员, 从事电磁场与微波技术方面的研究工作.

宋文森: 男, 1938 年生, 研究员, 博士生导师, 从事电磁场与微波技术方面的研究工作.