

渐近波形估计技术加速的频域有限差分法¹

梁 建 洪 伟

(东南大学毫米波国家重点实验室 南京 210096)

摘 要 本文提出了一种基于三维频域有限差分法 (3D-FDFD) 和渐近波形估计技术 (AWE) 计算三维微波结构 S 参数的快速算法。在分析中, 将输入和输出端口的电场分别展开成某抽样频率点处的泰勒级数, 通过 Padé 逼近及奇异值分解技术求出电场与频率的有理函数解析表达式, 从而获得频带内的 S 参数。数值计算结果与已有结果吻合良好, 并且与传统 FDFD 法相比, 计算效率提高很多。

关键词 频域有限差分法, 渐近波形估计, 波导不连续性, 散射参数

中图分类号 O441

1 引 言

近年来, 三维电磁问题的计算越来越受到人们的重视。例如, 三维波导不连续性的分析、三维复杂目标的散射、高速高密度多层互连结构的参数提取以及微波集成电路中多层结构的参数提取等。频域有限差分 (FDFD) 法建模简单, 能够很好地适应各种三维复杂结构, 已被广泛应用于三维周期结构的散射计算^[1]、多层微带贴片天线的分析^[2]以及微波集成电路的分析^[3]等。频域有限差分法通过在空间上离散麦克斯韦尔方程组, 并利用吸收边界截断计算区域, 最后以有限差分过程形成矩阵方程。矩阵方程的形成及其求解成为影响该方法计算效率的两个主要因素。

与其它频域计算方法一样, 传统的频域有限差分法为了获得频带内的 S 参数, 就必须以一定的频率间隔逐点计算, 当 S 参数随频率变化比较剧烈时, 为了精确刻划 S 参数随频率变化的规律, 就必须减小频率间隔, 这就意味着在整个频带内矩阵方程求解次数的增加。渐近波形估计技术 (AWE) 最初主要用于低频的电路系统分析中, 例如, 超大规模集成电路 (VLSI) 的降阶模型分析^[4], 以及多导体结构的准静态时域分析^[5]。最近, AWE 技术被逐渐应用到电磁场的全波分析。AWE 技术结合矩量法 (MM) 用于雷达散射截面 (RCS) 的计算^[6], AWE 技术结合有限元法 (FEM) 用于 S 域的电磁场分析^[7]。本文将 AWE 技术应用于频域有限差分法的加速, 首先分别把输入端口和输出端口的电场值展开成某一频率点附近的泰勒级数, 通过 Padé 逼近, 将其近似成有理函数, 求得电场值随频率变化的解析表达式, 从而获得频带内任一频率点的 S 参数。一般来讲, 展开的有理函数的阶数越高, 逼近的程度也就越好。然而, Padé 方程是一个病态矩阵, 随着有理函数的阶数的提高, 矩阵的条件数也就越大, 一般的矩阵求解方法很难保证解的稳定性, 为此, 本文采用奇异值分解技术 (SVD) 加以克服。最后, 文中计算了波导中的不连续性问题, 与已有的文献结果作了对比, 并与传统的 FDFD 法的计算效率作了比较。

2 模 型

考虑一个任意的微波电路, 假定输入端口离开不连续性区域足够远, 入射场为主模激励。将该微波电路用三维矩形网格剖分成 n 个基本单元, 第 (i, j, k) 个网格单元中电磁场的位置如图 1(a) 所示, 其中 h_x^i , h_y^j 和 h_z^k 分别表示单元 (i, j, k) 在 x, y, z 方向的步长。一个单元中, 电磁场的未知数一共有六个。一般来说, 电场与磁场的数量级是不一样的, 例如,

¹ 1999-01-27 收到, 1999-11-08 定稿

在自由空间, 电场与磁场的比值是 377 欧。由于同时求出电场和磁场, 为了使它们在数量上不至于相差太大, 将磁场乘上一个常数进行变换, 即 $\mathbf{H}' = -j\eta_0\mathbf{H}$, η_0 为自由空间的波阻抗, 同时相对于某一参考频率 f_0 的波长, 对空间的绝对坐标进行归一化处理, 即 $x' = k_0x$, $y' = k_0y$, $z' = k_0z$, k_0 为频率为 f_0 时的波数。

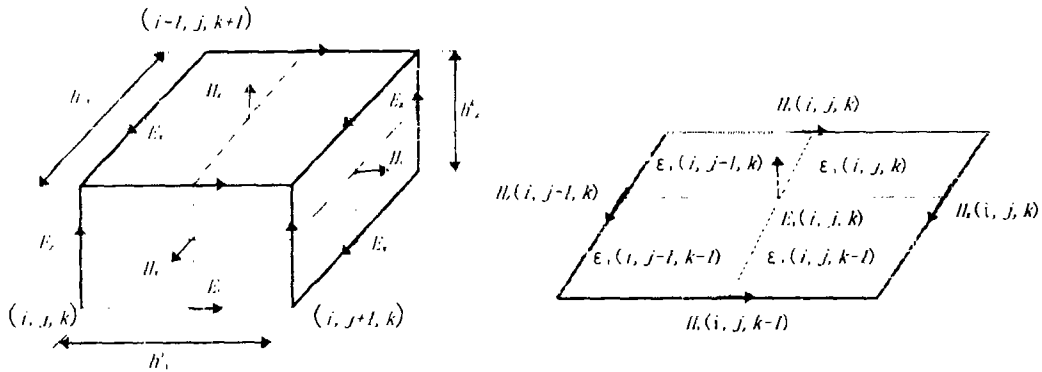


图 1 FDFD 单元场分量示意图

2.1 有限差分方程的建立

假设单元 (i, j, k) 的相对复介电常数和磁导率分别为 $\bar{\epsilon}_r(i, j, k)$, $\mu_r(i, j, k)$ 。在无源区, 频率为 f 时, 经过变换的 Maxwell 方程为

$$\left. \begin{aligned} \nabla \times \mathbf{E} &= \bar{f}\mu_r(i, j, k)\mathbf{H}, \\ \nabla \times \mathbf{H} &= \bar{f}\epsilon_r(i, j, k)\mathbf{E}, \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

式中 $\bar{f} = f/f_0$ 。考虑一般性, 非均匀、各向异性媒质, 采用环路积分法推导有限差分方程。以 E_x 为例, 图 1(b) 画出了积分路径, 由 (1) 式可得

$$S_x(i, j, k)E_x(i, j, k) = \bar{f}\{l_z(k)[H_z(i, j, k) - H_z(i, j-1, k)] - l_y(j)[H_y(i, j, k) - H_y(i, j, k-1)]\}, \quad (2)$$

式中

$$\begin{aligned} S_x(i, j, k) &= \frac{1}{4}(h_z^k h_y^{j-1} \bar{\epsilon}_r(i, j-1, k) + h_z^k h_y^j \bar{\epsilon}_r(i, j, k) \\ &\quad + h_z^{k-1} h_y^{j-1} \bar{\epsilon}_r(i, j-1, k-1) + h_z^{k-1} h_y^j \bar{\epsilon}_r(i, j, k-1)), \\ l_z(k) &= \frac{1}{2}(h_z^k + h_z^{k-1}). \end{aligned}$$

类似地, 推导出下列一组有限差分方程组:

$$\left. \begin{aligned} S_x(i, j, k)E_x(i, j, k) &= \bar{f}\{l_z(k)[H_z(i, j, k) - H_z(i, j - 1, k)] - l_y(j)[H_y(i, j, k) - H_y(i, j, k - 1)]\}, \\ S_y(i, j, k)E_y(i, j, k) &= \bar{f}\{l_x(i)[H_x(i, j, k) - H_x(i, j, k - 1)] - l_z(k)[H_z(i, j, k) - H_z(i - 1, j, k)]\}, \\ S_z(i, j, k)E_z(i, j, k) &= \bar{f}\{l_y(j)[H_y(i, j, k) - H_y(i - 1, j, k)] - l_x(i)[H_x(i, j, k) - H_x(i, j - 1, k)]\}, \\ \mu_r(i, j, k)H_x(i, j, k) &= \bar{f}\{[E_z(i, j + 1, k) - E_z(i, j, k)]/h_y^j - [E_y(i, j, k + 1) - E_y(i, j, k)]/h_z^k\}, \\ \mu_r(i, j, k)H_y(i, j, k) &= \bar{f}\{[E_x(i, j, k + 1) - E_x(i, j, k)]/h_z^k - [E_z(i + 1, j, k) - E_z(i, j, k)]/h_x^i\}, \\ \mu_r(i, j, k)H_z(i, j, k) &= \bar{f}\{[E_y(i + 1, j, k) - E_y(i, j, k)]/h_x^i - [E_x(i, j + 1, k) - E_x(i, j, k)]/h_y^j\}. \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

2.2 吸收边界条件

当节点位于截断边界时, (3) 式不再满足. 假设输入和输出端口无限长, 只存在沿着 y 轴传输的主模, 采用主模吸收条件^[2], 可得

$$E_0 - e^{-j\bar{f}\beta(\bar{f})h_y} E_1 = (1 - e^{-j2\bar{f}\beta(\bar{f})h_y}) E_0^{in}, \quad (4)$$

E_0 表示位于端口面的总场, E_1 表示位于内节点的总场, E_0^{in} 为入射场, $\beta(\bar{f})$ 为频率 f 时的主模相移常数.

联立 (3)、(4) 式, 在整个计算场域中构成一个稀疏矩阵方程

$$[S(\bar{f})]\varphi(\bar{f}) = b(\bar{f}), \quad (5)$$

其中 $[S]$ 为稀疏矩阵, φ 为列矩阵, 记录了整个计算场域每个节点的电场和磁场. $b(\bar{f})$ 为列矩阵, 其非零元素由 (4) 式的右边项构成, 反映了输入端口的入射波激励情况. 求解 (5) 式, 就可得到整个场域的场值, 那么微波电路的 S 参数就可通过下式求出.

$$S_{11} = \frac{V_1 - V_1^{\text{ref}}}{V_1^{\text{ref}}}, \quad S_{21} = \frac{V_2}{V_1^{\text{ref}}} \sqrt{\frac{Z_{c1}}{Z_{c2}}}. \quad (6)$$

式中 V_1 和 V_2 分别是输入端口和输出端口的电压, V_1^{ref} 是输入端口的参考电压. Z_{c1} 和 Z_{c2} 分别是输入和输出端口的特性阻抗.

2.3 渐近波形估计 (AWE) 技术的实现

求解 (5) 式, 每次只能求出频率为 f 时的 S 参数, 为了得到频带内的特性, 就不得不以一定的频率间隔依次求解 (5) 式. 采用 AWE 技术, 将输入和输出端口的电场值展开成关于参考频率 f_0 的泰勒级数, 即

$$E(\bar{f}) = \sum_{n=0}^{\infty} m_n (\bar{f} - 1)^n. \quad (7)$$

式中 $m_n = \frac{E^{(n)}|_{f=f_0}}{n!}$ 为泰勒级数展开的系数. (5) 式两边分别对 (\bar{f}) 求 n 阶导数, 整理得

$$[S]\varphi^{(n)} = b^{(n)} - \sum_{i=1}^{n-1} C_n^i [S]^{(n-i)} \varphi^{(i)}. \quad (8)$$

(8) 式中, $\mathbf{b}^{(n)}$ 为向量 \mathbf{b} 关于 \bar{f} 的 n 阶导数, $[S]^{(n)}$ 为矩阵 $[S]$ 关于 \bar{f} 的 n 阶导数. 利用最小二乘法, 递推求解 (8) 式, 就可求出场值关于 \bar{f} 的 n 阶导数, 从而求出 m_n . 一般来讲, (7) 式仅在 $f = f_0$ 附近收敛, 为了扩大收敛范围, 通过 Padé 逼近^[8], 将其转换成有理函数:

$$\sum_{n=0}^{N+M+1} m_n (\bar{f} - 1)^n = \frac{P_N(\bar{f} - 1)}{Q_M(\bar{f} - 1)} = \frac{\sum_{i=0}^N a_i (\bar{f} - 1)^i}{1 + \sum_{j=1}^M b_j (\bar{f} - 1)^j}, \quad (9)$$

P_N 和 Q_M 分别为阶数为 N, M 的多项式, a_i 为分子多项式的系数, b_j 为分母多项式的系数. (9) 式一般当 $M = N + 1$ 时, 逼近的误差最小. 给定 N, M 比较 (9) 式两边的阶数, 可得

$$\begin{bmatrix} m_N & m_{N-1} & \cdots & m_{N-M+1} \\ m_{N+1} & m_N & \cdots & m_{N-M+2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ m_{N+M+1} & m_{N+M+2} & \cdots & m_N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_M \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} m_{N+1} \\ m_{N+2} \\ \vdots \\ m_{N+M} \end{bmatrix}. \quad (10)$$

求解 (10) 式, 即可求出系数 $a_i (i = 0, N), b_j (j = 1, M)$. (10) 式当阶数 $M > 10$ 时, 矩阵的条件数会非常大^[4], 一般的矩阵求解方法往往稳定性很差, 这里采用奇异值分解 (SVD) 技术加以克服. 一旦系数 $a_i (i = 0, N), b_j (j = 1, M)$ 已知, 就求出输入和输出端口的电场值 E 关于 \bar{f} 的解析表达式

$$\mathbf{E}(\bar{f}) = \frac{a_0 + a_1(\bar{f} - 1) + a_2(\bar{f} - 1)^2 + \cdots + a_N(\bar{f} - 1)^N}{1 + b_1(\bar{f} - 1) + b_2(\bar{f} - 1)^2 + \cdots + b_M(\bar{f} - 1)^M}. \quad (11)$$

利用 (6) 式, 即可求出频带内任意一点频率的 S 参数.

3 数值计算和讨论

为了验证该算法的有效性, 首先计算了一个如图 2 所示的矩形波导的脊不连续性问题, 矩形波导的尺寸为 $b=19.05\text{mm}$, $a=9.5224\text{mm}$, 主模频率范围为 $9.84\text{GHz}-15.0\text{GHz}$. 脊位于波导的中央, 尺寸分别为 $w=1.016\text{mm}$, $l=5.08\text{mm}$, 以及 $h=7.619\text{mm}$. 图 3 给出了本文与文献 [7] 的实验结果的比较, 从图中可以看出, 两者吻合较好. 为了研究参考频率 f_0 对 Padé 逼近的影响, 计算中分别取参考频率 f_0 为 12.0GHz 和 15.0GHz , 分母多项式的阶数均取 $M=8$. 从图 3 可以看出, 在 $10.0\text{GHz}-15.0\text{GHz}$ 频带内, 两者的差别不大, 说明在主模频率范围内, 参考频率的选取对计算结果无较大影响. 图 4 给出了参考频率 f_0 为 15.0GHz 时, 分母多项式的阶数 M 变化时, 逼近曲线的变化规律. 由图 4 可以看出, 当 M 逐渐增大时, 曲线逐渐收敛, 但 M 大于 10 以上时, 曲线变化很小. 这是因为当 $M=11$ 时, 最大的奇异值与最小的奇异值之比已为 8×10^{14} , 计算机很难精确表示很小的数, 因而逼近精度上提高不大.

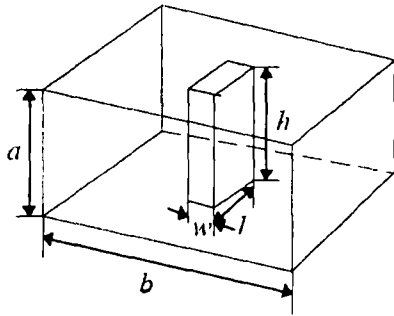
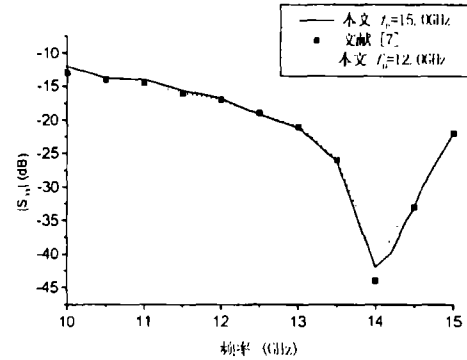
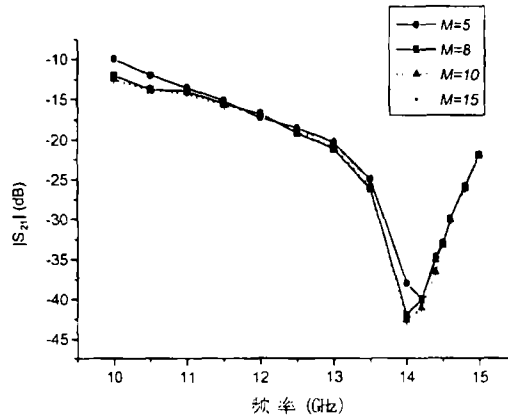


图 2 矩形波导脊不连续性示意图

图 3 脊不连续性 S 参数的比较图 4 脊不连续性 S 参数随分母多项式 M 变化的规律

为了进一步说明该方法的计算效率,又分析了如图 5(a) 所示的介质棒加载矩形波导,尺寸及参数由图 5 给出,主模工作频率范围为 8.0GHz-12.0GHz。计算中,采用非均匀网格,介质区域采用细网格,其它区域采用粗网格。图 5(b) 给出了计算结果和文献 [9] 的实验结果,从曲线可以看出,两者吻合较好,并且反射系数在频率为 11.0GHz 附近有剧烈的变化,变化的间隔为 0.05GHz。如果利用传统的 FDFD 方法,在事先不知道大致频率响应的情况下,为了精确刻划出反射系数的变化,就必须以微细的频率间隔 $\Delta f=0.05\text{GHz}$ 反复求解矩阵 (5) 式,意味着在整个频带内 (8.0-12.0GHz),需要求解 81 次。采用 AWE 技术,取参考频率 f_0 为 10.0GHz,分母多项式的阶数 $M=6$,只需要迭代求解 11 次,就可获得整个频带的精确结果。另外,利用 (8) 式递推求解泰勒级数的系数时,为了减少对内存的需求,可以把向量 $b^{(n)}$, $\varphi^{(n)}$ 和矩阵 $[S]^{(n)}$ 存入临时文件中,因而该方法与传统的 FDFD 法相比,内存需求也没有增加。

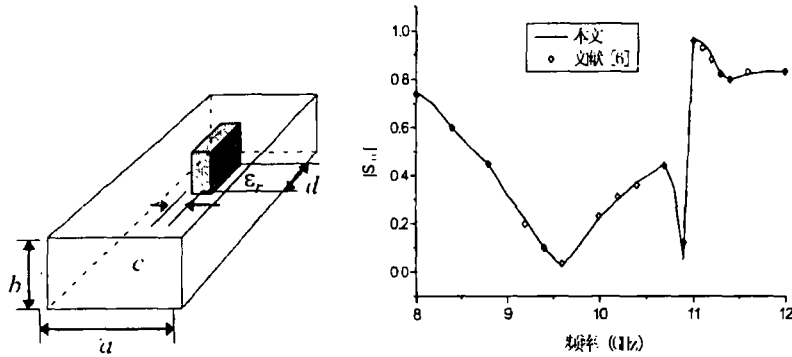


图5 介质加载波导的示意图及反射系数的比较
 $a=22.86\text{mm}$ $b=10.16\text{mm}$ $c=12\text{mm}$ $d=6\text{mm}$ $\epsilon_r = 8.2$

4 结 论

本文将渐近波形估计 (AWE) 技术运用到频域有限差分法 (FDFD) 中, 通过 Padé 逼近, 求得输入和输出端口的电场值与频率的解析表达式, 从而求出频带内任一频率点的 S 参数。文中的算例表明, 与传统的 FDFD 法相比较, 当微波电路的频率响应很复杂时, 计算效率得到有效地提高, 解决波导不连续性问题时, 参考频率点的选取对计算结果无较大影响, 分母多项式的阶数越高, 精度越好, 但超过一定的阶数时, 效果改善不明显。有关这一方法在多层微带电路以及天线中的应用, 目前正在进行中。

参 考 文 献

- [1] 刘凯, 梁建, 洪伟. 一种用于求解双周期结构电磁散射问题的吸收边界条件. 微波学报, 1999, 15(2): 93-98.
- [2] 梁建, 洪伟. 多层微带贴片天线的三维全波分析. 电波科学学报, 1999, 14(1): 7-12.
- [3] Haffa S, et al. The Finite difference method for S-Parameter calculation of arbitrary three-dimensional structures. IEEE Trans. on MTT, 1992, MTT-40(8): 1602-1610.
- [4] Peter F, et al. Efficient linear circuit analysis by Padé approximation via the Lanczos process. IEEE Trans. on Computer-Aided Design, 1995, 14(5): 639-649.
- [5] Ramin S, et al. A fast method for frequency and time domain simulation of high-speed VLSI interconnects. IEEE Trans. on MTT, 1994, MTT-42(12): 2562-2571.
- [6] Reddy C J, et al. Fast RCS computation over a frequency band using method of moments in conjunction with asymptotic waveform evaluation technique. IEEE Trans. on AP, 1998, AP-46(8): 1229-1233.
- [7] Bracken J E, et al. S-domain methods for simultaneous time and frequency characterization of electromagnetic devices. IEEE Trans. on MTT, 1998, MTT-46(9): 1277-1290.
- [8] 徐献瑜, 等. Padé 逼近概论. 上海: 上海科技出版社, 1990, 3-12.
- [9] Krupzevic D V, et al. The wave-equation FD-TD method for the efficient eigenvalue analysis and S-matrix computation of waveguide structures. IEEE Trans. on MTT, 1993, MTT-41(12): 2109-2115.

A FAST 3D-FDFD METHOD IN CONJUNCTION WITH ASYMPTOTIC WAVEFORM EVALUATION TECHNIQUE

Liang Jian Hong Wei

(State Key Lab. of Millimeter Waves, Southeast University, Nanjing 210096)

Abstract A fast generalized algorithm for S parameter extraction of 3-D microwave structures is presented based on the 3-D FDFD (Frequency Domain Finite Difference) method in conjunction with the asymptotic waveform evaluation (AWE) technique. In the AWE technique, the electric field strength at the input and output ports are respectively expanded in a Taylor's series around a frequency within the desired frequency band, and the coefficients of the Taylor's series are matched via the Padé approximation to a rational function and the robust Singular Value Decomposition (SVD) technique is employed while solving the Padé equation. Using the rational function, the electric field strengths at the input and output are obtained at any frequency within the desired frequency band, which is used to calculate the S parameter. A good agreement between the numerical results and the reported data is observed. Compared with the traditional FDFD, the computational efficiency of the present method is considerably improved.

Key words FDFD, AWE, Waveguide discontinuities, Scattering parameters

梁 建: 男, 1971 年生, 博士生, 主要从事微带天线, 电磁散射及计算电磁学的研究工作。

洪 伟: 男, 1962 年生, 教授, 博士生导师, 主要从事电磁散射, 逆散射, 互联结构的参数提取和数值方法等方面的研究工作。