第 26 卷第 10 期 电子与信息学报 Vol.26No.10
2004 年 10 月 Journal of Electronics & Information Technology Oct. 2004

$1/f$ 信号的积分多小波变换表示 [1]

阎晓红　　刘贵忠　　刘　峰 *

(西安交通大学电子与信息工程学院信息与通信工程研究所　西安　710049)

*(西安交通大学理学院信息科学系　西安　710049)

摘　要：　在积分多小波变换理论的基础上，研究了 $1/f$ 信号的积分多小波变换表示，给出了用积分多小波逆变换产生 $1/f$ 信号 (非近似 $1/f$ 信号) 的条件. 并对 $1/f$ 信号的积分多小波变换的统计特性进行了研究，证明 $1/f$ 信号的统计自相似性在多小波域内可由积分多小波系数的自相关函数矩阵来表达. 基于单小波变换的 $1/f$ 信号表示是其特例.

关键词：　$1/f$ 信号，自相似性，积分多小波变换，分形布朗运动

中图分类号：　TN911.7, O177.6　　**文献标识码**：　A　　**文章编号**：　1009-5896(2004)06-0101-06

Integral Multiwavelet Representation of $1/f$ Signal

Yan Xiao-hong　　Liu Gui-zhong　　Liu Feng*

(*School of Electron. & Information Eng., Xi'an Jiaotong Univ., Xi'an* 710049, *China*)

*(*School of Science, Xi'an Jiaotong University, Xi'an* 710049, *China*)

Abstract　Based on the theory of integral multiwavelet transformation, the representation of $1/f$ signal (not near-$1/f$ signal) is explored by inverse integral multiwavelet transformation, and the conditions of representing $1/f$ signal are acquired. The statistical characteristics of integral multiwavelets transformation are studied, and it is proved that the self-similar characteristics of $1/f$ signal can be represented by the autocorrelation matrix of coefficients of integral multiwavelet in multiwavelet domain. The representation of $1/f$ signal by singular wavelet is only the special case of the representation.

Key words　$1/f$ signal, Self-similar, Integral multiwavelet transformation, Fractal Brown motion

1 引言

若信号 $x(t)$ 具有如下形式的功率谱密度：

$$S_x(\omega)=\sigma^2/|\omega|^\gamma \tag{1}$$

则 $x(t)$ 被称为广义统计自相似信号 ($1/f$ 信号)．这里 σ^2 为一正实数， γ 称为谱指数，与 $x(t)$ 的自相似参数 H 的关系为 $\gamma=2H+1$，通常 $\gamma>0$．自相似性是 $1/f$ 信号的一个基本特性，广义统计自相似性是指 $x(t)$ 满足如下条件：

$$E[x(at)]=a^H E[x(t)],\qquad E[x(at)x(as)]=a^{2H}E[x(t)x(s)],\qquad \forall a>0 \tag{2}$$

[1] 2003-05-19 收到， 2003-09-25 改回

国家自然科学基金 (60272072)、国家教育部高等学校博士点基金 (60272072) 和跨世纪优秀人才计划 (2002 年度) 资助课题

$1/f$ 信号研究的一个重要方向是 $1/f$ 信号合成，即建立分形信号模型．Wornell 得到的是近似 $1/f$ 信号 [1]，文献 [2] 证明利用积分小波变换可以合成 $1/f$ 信号 (非近似的)．多小波具有单小波不能同时具备的正交性、紧支撑、对称性、高逼近阶和线性相位 [3]．能否基于多小波变换产生 $1/f$ 信号却从未有研究报道．本文证明利用积分多小波逆变换可以合成 $1/f$ 信号 (非近似的)，且多小波系数矩阵的相关结构对 $1/f$ 信号的多小波表示有影响．在多小波重数 $r=1$ 时，文献 [2] 结论是本文结论的特例．本文假设所用多小波都是平衡多小波 [4]，对非平衡多小波，应加上相应的预滤波器．

2 积分多小波变换

设 $\boldsymbol{\varPsi}(t)=[\psi_1(t)\ \cdots\ \psi_r(t)]^{\mathrm{T}}$ 是一基本多小波，亦即满足允许条件：$C_i=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{|\hat{\psi}_i(\omega)|^2}{|\omega|}\mathrm{d}\omega<\infty$，$\hat{\psi}_i(\omega)$ 表示 $\psi_i(t)$ 的 Fourier 变换 $(1\le i\le r)$，则 $L^2(R)$ 上信号 $x(t)$ 的积分多小波变换定义为

$$\boldsymbol{W}_x(a,b)=[w_{1,x}(a,b)\ \cdots\ w_{r,x}(a,b)]^{\mathrm{T}}=\frac{1}{\sqrt{|a|}}\int_{-\infty}^{\infty}x(t)\boldsymbol{\varPsi}^*\left(\frac{t-b}{a}\right)\mathrm{d}t,\qquad a,b\in R,a\neq 0 \tag{3}$$

这里 a 和 b 分别是扩展和时移，$*$ 表示共轭，以下皆同．实际信号分析中，只考虑尺度 a 的正值．当 $a>0$ 时，若

$$\int_0^{\infty}\frac{|\hat{\psi}_i(\omega)|^2}{|\omega|}\mathrm{d}\omega=\int_0^{\infty}\frac{|\hat{\psi}_i(-\omega)|^2}{|\omega|}\mathrm{d}\omega=\frac{C_i}{2}<\infty,\qquad 1\le i\le r \tag{4}$$

则对任意 $x(t)\in L^2(R)$, 在其连续点处：

$$\begin{aligned}x(t)=&\frac{2}{C_1}\int_0^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}w_{1,x}(a,b)\psi_1\left(\frac{t-b}{a}\right)\frac{1}{\sqrt{a}}\mathrm{d}b\frac{\mathrm{d}a}{a^2}+\frac{2}{C_2}\int_0^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}w_{2,x}(a,b)\psi_2\left(\frac{t-b}{a}\right)\\&\times\frac{1}{\sqrt{a}}\mathrm{d}b\frac{\mathrm{d}a}{a^2}+\cdots+\frac{2}{C_r}\int_0^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}w_{r,x}(a,b)\psi_r\left(\frac{t-b}{a}\right)\frac{1}{\sqrt{a}}\mathrm{d}b\frac{\mathrm{d}a}{a^2}\end{aligned} \tag{5}$$

这里 $a>0,C_1,C_2,\cdots,C_r$ 均为常数．

3 $1/f$ 信号的积分多小波变换表示

设 $\boldsymbol{W}(a,b)=[w_1(a,b)\ \cdots\ w_r(a,b)]^{\mathrm{T}}$, $a\in R^+$, $b\in R$(R^+ 是正实数集，R 为实数集) 是零均值的 r 维向量随机过程 (并不是某信号的多小波变换)，为方便起见，对 $\boldsymbol{W}(a,b)$ 作假设：

假设 1　$\boldsymbol{W}(a,b)=[w_1(a,b)\ \cdots\ w_r(a,b)]^{\mathrm{T}}$ 的相关函数矩阵可以表达为

$$\begin{aligned}E[\boldsymbol{W}(a_1,b_1)\boldsymbol{W}^{\mathrm{T}}(a_2,b_2)]&=E([w_1(a_1,b_1)\ \cdots\ w_r(a_1,b_1)]^{\mathrm{T}}[w_1(a_2,b_2)\ \cdots\ w_r(a_2,b_2)])\\&=\begin{bmatrix}\rho_{11}(a_1,a_2,b_1-b_2)&\cdots&\rho_{1r}(a_1,a_2,b_1-b_2)\\\vdots&\ddots&\vdots\\\rho_{r1}(a_1,a_2,b_1-b_2)&\cdots&\rho_{rr}(a_1,a_2,b_1-b_2)\end{bmatrix}\\&=\boldsymbol{R}_W(a_1,a_2,b_1-b_2)\end{aligned}$$

相关函数 $\rho_{ij}(a_1,a_2,b),(1\le i,j\le r)$, 关于 b 在 R 上绝对可积，并且存在实数 $\gamma>0$，使得对 $\forall p\in R^+$，有

$$\rho_{ij}(pa_1,pa_2,b)=p^{\gamma}\rho_{ij}(a_1,a_2,p^{-1}b),\qquad\forall a_1,a_2\in R^+,\quad b\in R,\quad i,j=1,2,\cdots,r \tag{6}$$

亦即矩阵 $\boldsymbol{R}_W(a_1,a_2,b)$ 满足关系 $\boldsymbol{R}_W(pa_1,pa_2,b)=p^{\gamma}\boldsymbol{R}_W(a_1,a_2,p^{-1}b)$.

设 $\boldsymbol{W}_x^C(a,b)=\left[\frac{2}{C_1}w_{1,x}(a,b)\quad \frac{2}{C_2}w_{2,x}(a,b)\quad \cdots\quad \frac{2}{C_r}w_{r,x}(a,b)\right]^{\mathrm{T}}$

定义随机过程

$$x(t)=\int_0^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\boldsymbol{W}_x^C(a,b)\right]^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Psi}\left(\frac{t-b}{a}\right)\frac{1}{\sqrt{a}}\mathrm{d}b\frac{\mathrm{d}a}{a^2} \tag{7}$$

等价形式为

$$x(t)=\int_0^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\boldsymbol{W}_x^C(a^{-1},b)\right]^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Psi}(a(t-b))\sqrt{a}\mathrm{d}b\mathrm{d}a \tag{8}$$

这里 $\boldsymbol{\Psi}(t)$ 是基本多小波函数.

引理 1 若 $\boldsymbol{W}(a,b)$ 满足假设 1，则式 (7) 定义的信号 $x(t)$ 是广义统计自相似信号.

证明 显然 $E[x(t)]=0$.

$$\begin{aligned}R_x(t,s)=E[x(t)x(s)]&=\int_0^{\infty}\sqrt{a_1}\mathrm{d}a_1\int_0^{\infty}\sqrt{a_2}\mathrm{d}a_2\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\boldsymbol{W}_x^C(a_1^{-1},b_1)\right]^{\mathrm{T}}\\&\quad\times\boldsymbol{\Psi}(a_1(t-b_1))\left[\boldsymbol{W}_x^C(a_2^{-1},b_2)\right]^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Psi}(a_2(s-b_2))\mathrm{d}b_1\mathrm{d}b_2\\&=\int_0^{\infty}\sqrt{a_1}\mathrm{d}a_1\int_0^{\infty}\sqrt{a_2}\mathrm{d}a_2\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\boldsymbol{\Psi}^{\mathrm{T}}(a_1(t-b_1))\\&\quad\times\begin{bmatrix}\frac{4}{C_1C_1}\rho_{11}(a_1^{-1},a_2^{-1},b_1-b_2)&\cdots&\frac{4}{C_1C_r}\rho_{1r}(a_1^{-1},a_2^{-1},b_1-b_2)\\\vdots&\ddots&\vdots\\\frac{4}{C_rC_1}\rho_{r1}(a_1^{-1},a_2^{-1},b_1-b_2)&\cdots&\frac{4}{C_rC_r}\rho_{rr}(a_1^{-1},a_2^{-1},b_1-b_2)\end{bmatrix}\boldsymbol{\Psi}(a_2(s-b_2)\mathrm{d}b_1\mathrm{d}b_2\\&=\int_0^{\infty}\sqrt{a_1}\mathrm{d}a_1\int_0^{\infty}\sqrt{a_2}\mathrm{d}a_2\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\boldsymbol{\Psi}^{\mathrm{T}}(a_1(t-b_1))\boldsymbol{R}_W^C(a_1^{-1},a_2^{-1},b_1-b_2)\\&\quad\times\boldsymbol{\Psi}(a_2(s-b_2))\mathrm{d}b_1\mathrm{d}b_2\end{aligned}$$

其中 $\boldsymbol{R}_W^C=\left[\frac{4}{C_iC_j}\rho_{ij}\right]_{r\times r}$, $1\le i,j\le r$. 设 $p>0$，由上式可得

$$\begin{aligned}R_x(pt,ps)=E[x(pt)x(ps)]&=\int_0^{\infty}\sqrt{a_1}\mathrm{d}a_1\int_0^{\infty}\sqrt{a_2}\mathrm{d}a_2\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\boldsymbol{\Psi}^{\mathrm{T}}(a_1(pt-b_1))\\&\quad\times\boldsymbol{R}_W^C(a_1^{-1},a_2^{-1},b_1-b_2)\boldsymbol{\Psi}(a_2(ps-b_2))\mathrm{d}b_1\mathrm{d}b_2\end{aligned}$$

作积分变量替换：令 $b_1=pd_1$, $b_2=pd_2$，则有

$$\begin{aligned}R_x(pt,ps)&=\int_0^{\infty}\sqrt{a_1}\mathrm{d}a_1\int_0^{\infty}\sqrt{a_2}\mathrm{d}a_2\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\boldsymbol{\Psi}^{\mathrm{T}}(a_1p(t-d_1))\\&\quad\times\boldsymbol{R}_W^C(a_1^{-1},a_2^{-1},p(d_1-d_2))\boldsymbol{\Psi}(a_2p(s-d_2))p^2\mathrm{d}d_1\mathrm{d}d_2\end{aligned}$$

再作积分变量替换：令 $a_1p=c_1$, $a_2p=c_2$，并利用式 (6) 可得

$$\begin{aligned}R_x(pt,ps)&=p^{-1}\int_0^{\infty}\sqrt{c_1}\mathrm{d}c_1\int_0^{\infty}\sqrt{c_2}\mathrm{d}c_2\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\boldsymbol{\Psi}^{\mathrm{T}}(c_1(t-d_1))\\&\quad\times\boldsymbol{R}_W^C(p(c_1)^{-1},p(c_2)^{-1},p(d_1-d_2))\boldsymbol{\Psi}(c_2(s-d_2))\mathrm{d}d_1\mathrm{d}d_2\\&=p^{\gamma-1}\int_0^{\infty}\sqrt{c_1}\mathrm{d}c_1\int_0^{\infty}\sqrt{c_2}\mathrm{d}c_2\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\boldsymbol{\Psi}^{\mathrm{T}}(c_1(t-d_1))\\&\quad\times\boldsymbol{R}_W^C((c_1)^{-1},(c_2)^{-1},d_1-d_2)\boldsymbol{\Psi}(c_2(s-d_2))\mathrm{d}d_1\mathrm{d}d_2=p^{\gamma-1}R_x(t,s)\end{aligned}$$

令 $\gamma=2H+1$，那么 $x(t)$ 是自相似参数为 H 的广义统计自相似信号.　　证毕

引理 2　若基本假设 1 成立，则存在常数 $K_{ij}>0,\ A>0,\ \delta>0,\ 1\le i,\ j\le r$ 使得当 $a_1\ge A,\ a_2\ge A$ 时，

$$|\hat{\rho}_{ij}(a_1,a_2,\omega)|\le K_{ij}(a_1a_2)^{\gamma+1},\qquad \omega\in R \tag{9}$$

当 $0<a_1<\delta,\ 0<a_2<\delta$ 时，

$$|\hat{\rho}_{ij}(a_1,a_2,\omega)|\le K_{ij},\qquad \omega\in R \tag{10}$$

其中 $\hat{\rho}_{ij}(a_1,a_2,\omega)$ 为 $\hat{\rho}_{ij}(a_1,a_2,b)$ 关于 b 的 Fourier 变换.

证明　已知 $\hat{\rho}_{ij}(a_1,a_2,b)$ 关于 b 在 R 上绝对可积，故

$$|\hat{\rho}_{ij}(a_1,a_2,\omega)|\le\int_{-\infty}^{\infty}|\rho_{ij}(a_1,a_2,b)\mathrm{e}^{-ib\omega}|\mathrm{d}b\le\int_{-\infty}^{\infty}|\rho_{ij}(a_1,a_2,b)|\mathrm{d}b<+\infty \tag{11}$$

又 $|\rho_{ij}(a_1,a_2,b)|\le\rho_{ij}(a_1,a_2,0)\cdot\rho_{ij}(a_1,a_2,0)\le(a_1a_2)^{\gamma}[\rho_{ij}(1,1,0)]^2$ 所以，$\lim_{a_1\to0,a_2\to0}\rho_{ij}(a_1,a_2,b)=0$ 且该极限关于 b 是一致的. 从而由式 (11) 可知，关于 ω 一致的有 $\lim_{a_1\to0,a_2\to0}\hat{\rho}_{ij}(a_1,a_2,\omega)=0$，即式 (10) 成立. 再根据假设 1 的式 (6)，有 $\hat{\rho}_{ij}(pa_1,pa_2,\omega)=p^{\gamma+1}\hat{\rho}_{ij}(a_1,a_2,p\omega)$. 从而

$$\hat{\rho}_{ij}(pa_1,pa_2,\omega)=(a_1a_2)^{\gamma+1}p^{\gamma+1}\hat{\rho}_{ij}(1/a_2,1/a_1,a_1a_2\omega)$$

由式 (10) 知存在常数 $A>0$，使得当 $a_1\ge A,\ a_2\ge A$ 时，对 $\forall\omega\in R$，有

$$|\hat{\rho}_{ij}(a_1,a_2,\omega)|=(a_1a_2)^{\gamma+1}\hat{\rho}_{ij}(1/a_2,1/a_1,a_1a_2\omega)\le K_{ij}(a_1a_2)^{\gamma+1}$$

证毕

定理 1　设 $\boldsymbol{W}(a,b)$ 满足基本假设 1，$\boldsymbol{\varPsi}(t)=[\psi_1(t)\ \cdots\ \psi_r(t)]^{\mathrm{T}}$ 是具有 R 阶消失矩的多小波函数，且 $0<\gamma+1/2<R$，则式 (7) 定义的 $x(t)$ 是谱指数为 γ 的 $1/f$ 过程.

证明　根据式 (8)

$$\begin{aligned}E|x(t)|^2=&\int_0^{\infty}\sqrt{a_1}\mathrm{d}a_1\int_0^{\infty}\sqrt{a_2}\mathrm{d}a_2\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\boldsymbol{\varPsi}^{\mathrm{T}}(a_1(t-b_1))\\&\times\begin{bmatrix}\frac{4}{C_1^2}\rho_{11}(a_1^{-1},a_2^{-1},b_1-b_2)&\cdots&\frac{4}{C_1C_r}\rho_{1r}(a_1^{-1},a_2^{-1},b_1-b_2)\\\vdots&\ddots&\vdots\\\frac{4}{C_rC_1}\rho_{r1}(a_1^{-1},a_2^{-1},b_1-b_2)&\cdots&\frac{4}{C_r^2}\rho_{rr}(a_1^{-1},a_2^{-1},b_1-b_2)\end{bmatrix}\boldsymbol{\varPsi}(a_2(t-b_2)\mathrm{d}b_1\mathrm{d}b_2\\=&\int_0^{\infty}\sqrt{a_1}\mathrm{d}a_1\int_0^{\infty}\sqrt{a_2}\mathrm{d}a_2\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\boldsymbol{\varPsi}^{\mathrm{T}}(a_1(t-b_1))\boldsymbol{R}_W^C(a_1^{-1},a_2^{-1},b_1-b_2)\\&\times\boldsymbol{\varPsi}(a_2(t-b_2))\mathrm{d}b_1\mathrm{d}b_2\\=&\int_0^{\infty}\sqrt{a_1}\mathrm{d}a_1\int_0^{\infty}\sqrt{a_2}\mathrm{d}a_2\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\boldsymbol{\varPsi}^{\mathrm{T}}(a_1(t-b_1))\boldsymbol{R}_W^C(a_1^{-1},a_2^{-1},b)\\&\times\boldsymbol{\varPsi}(a_2(t-b-b_1))\mathrm{d}b_1\mathrm{d}b\end{aligned}$$

利用 Parseval 定理，可得

$$\begin{aligned}E|x(t)|^2=&\frac{1}{2\pi}\int_0^{\infty}\sqrt{a_1}\mathrm{d}a_1\int_0^{\infty}\sqrt{a_2}\mathrm{d}a_2\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{a_1a_2}\\&\times\hat{\boldsymbol{\varPsi}}(-a_1^{-1}\omega)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}_W^C(a_1^{-1},a_2^{-1},b)\hat{\boldsymbol{\varPsi}}^*(-a_2^{-1}\omega)\mathrm{e}^{-j\omega b}\mathrm{d}\omega\mathrm{d}b\\=&\frac{1}{2\pi}\int_0^{\infty}\mathrm{d}a_1\int_0^{\infty}\mathrm{d}a_2\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{a_1a_2}}\hat{\boldsymbol{\varPsi}}^{\mathrm{T}}(-a_1^{-1}\omega)\hat{\boldsymbol{R}}_W^C(a_1^{-1},a_2^{-1},\omega)\hat{\boldsymbol{\varPsi}}(a_2^{-1}\omega)\mathrm{d}\omega\end{aligned}$$

其中 $\hat{\boldsymbol{\Psi}}(\omega)$ 是 $\boldsymbol{\Psi}(t)$ 的 Fourier 变换，$\hat{\boldsymbol{R}}_W^C(a_1,a_2,\omega)$ 是 r 阶矩阵 $\boldsymbol{R}_W^C(a_1,a_2,b)$ 关于 b 的 Fourier 变换．由上式知，$x(t)$ 关于时间 t 的平均功率谱密度为

$$S_x(\omega)=\int_0^{\infty}\mathrm{d}a_1\int_0^{\infty}\frac{1}{\sqrt{a_1a_2}}\mathrm{Re}[\hat{\boldsymbol{\Psi}}^{\mathrm{T}}(-a_1^{-1}\omega)\hat{\boldsymbol{R}}_W^C(a_1^{-1},a_2^{-1},\omega)\hat{\boldsymbol{\Psi}}(a_2^{-1}\omega)]\mathrm{d}a_2 \tag{12}$$

这里 $\mathrm{Re}[\cdot]$ 代表实部．当 $\omega>0$ 时，令 $a_1^{-1}\omega=u,\ a_2^{-1}\omega=v$ ，则有

$$\begin{aligned}S_x(\omega)&=\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}\omega(uv)^{-3/2}\mathrm{Re}[\hat{\boldsymbol{\Psi}}^{\mathrm{T}}(-u)\hat{\boldsymbol{R}}_W^C(u/\omega,v/\omega,\omega)\hat{\boldsymbol{\Psi}}(v)]\mathrm{d}u\mathrm{d}v\\&=\frac{1}{|\omega|^{\gamma}}\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}(uv)^{-3/2}\mathrm{Re}[\hat{\boldsymbol{\Psi}}^{\mathrm{T}}(-u)\hat{\boldsymbol{R}}_W^C(u,v,1)\hat{\boldsymbol{\Psi}}(v)]\mathrm{d}u\mathrm{d}v\end{aligned} \tag{13}$$

当 $\omega<0$ 时，同样可得式 (13)．

现在考虑式 (13) 右端积分的存在性．已假设 $\boldsymbol{\Psi}(t)=[\psi_1(t)\ \cdots\ \psi_r(t)]^{\mathrm{T}}$ 具有 R 阶消失矩，由引理 2 知存在常数 $L>0$ ，使得

$(uv)^{-3/2}|\mathrm{Re}[\hat{\boldsymbol{\Psi}}^{\mathrm{T}}(-u)\hat{\boldsymbol{R}}_W^C(u,v,1)\hat{\boldsymbol{\Psi}}(v)]|\le L(uv)^{R-3/2}$，$(u\to 0^+,v\to 0^+)$

$(uv)^{\gamma-3/2}|\mathrm{Re}[\hat{\boldsymbol{\Psi}}^{\mathrm{T}}(-u)\hat{\boldsymbol{R}}_W^C(u,v,1)\hat{\boldsymbol{\Psi}}(v)]|\le L(uv)^{-R+\gamma-1/2}$，$(u\to\infty,v\to\infty)$

注意到 $\gamma>0$ ，当 $0<\gamma+1/2<R$ 时，式 (13) 右端的积分存在且与 ω 无关，记该积分为 σ^2 ，则式 (13) 可写为 $S_x(\omega)=\sigma^2/|\omega|^{\gamma}$，结合引理 1 知定理 1 成立． 证毕

4 $1/f$ 过程的积分多小波变换分析

前述讨论表明二维随机过程满足基本假设 1 时，可由多小波逆变换公式合成 $1/f$ 过程．而 $1/f$ 过程的多小波变换能否满足基本假设 1 却是未知的，这一部分讨论这一问题．下面的讨论中 a 可以是任意实数．首先给出统计自相似信号在多小波域内的刻画．

定理 2 设 $\boldsymbol{\Psi}(t)=[\psi_1(t)\ \cdots\ \psi_r(t)]^{\mathrm{T}}$ 是一基本多小波，$\boldsymbol{W}_x(a,b)=[w_1(a,b)\ \cdots\ w_r(a,b)]^{\mathrm{T}}$ 是信号 $x(t)$ 的积分多小波变换，则 $x(t)$ 是相似参数为 H 的广义统计自相似信号的充要条件是对 $\forall p\in R^+,\forall a_1,a_2,b_1,b_2\in R$ 有如下等式成立：

$$E[\boldsymbol{W}_x(pa_1,b_1)]=p^{H+1/2}E[\boldsymbol{W}_x(a_1,p^{-1}b_1)] \tag{14}$$

$$\boldsymbol{R}_W(pa_1,pa_2,b_1,b_2)=p^{\gamma}\boldsymbol{R}_W(a_1,a_2,p^{-1}b_1,p^{-1}b_2) \tag{15}$$

其中 $\boldsymbol{R}_W=E[\boldsymbol{W}_x(a_1,b_1)\boldsymbol{W}_x^{\mathrm{T}}(a_2,b_2)]$，$\gamma=2H+1$ ．

证明 必要性 根据广义统计自相似信号的定义，并利用适当的积分变量替换可得

$$\begin{aligned}E[\boldsymbol{W}_x(pa_1,b_1)]&=\frac{1}{\sqrt{|pa_1|}}\int_{-\infty}^{\infty}E[x(t)]\boldsymbol{\Psi}^*\left(\frac{t-b_1}{pa_1}\right)\mathrm{d}t\\&=\frac{p^{1/2}}{\sqrt{|a_1|}}\int_{-\infty}^{\infty}p^{H}E[x(p^{-1}t)]\boldsymbol{\Psi}^*\left(\frac{p^{-1}t-p^{-1}b_1}{a_1}\right)\mathrm{d}(p^{-1}t)\\&=p^{H+1/2}E[\boldsymbol{W}_x(a_1,p^{-1}b_1)]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{R}_W(pa_1,pa_2,b_1,b_2)&=\frac{1}{\sqrt{|pa_1pa_2|}}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\boldsymbol{\varPsi}^*\left(\frac{t-b_1}{pa_1}\right)R_x(t,s)\boldsymbol{\varPsi}^{\mathrm{H}}\left(\frac{s-b_2}{pa_2}\right)\mathrm{d}t\mathrm{d}s\\&=\frac{1}{p\sqrt{|a_1a_2|}}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\boldsymbol{\varPsi}^*\left(\frac{pu-b_1}{pa_1}\right)R_x(pu,pv)\boldsymbol{\varPsi}^{\mathrm{H}}\left(\frac{pv-b_2}{pa_2}\right)p^2\mathrm{d}u\mathrm{d}v\\&=\frac{p}{\sqrt{|a_1a_2|}}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\boldsymbol{\varPsi}^*\left(\frac{u-p^{-1}b_1}{a_1}\right)p^{\gamma-1}R_x(u,v)\boldsymbol{\varPsi}^{\mathrm{H}}\left(\frac{v-p^{-1}b_2}{a_2}\right)\mathrm{d}u\mathrm{d}v\\&=p^{\gamma}\boldsymbol{R}_W(a_1,a_2,p^{-1}b_1,p^{-1}b_2)\end{aligned}$$

式中 * 表示共轭，H 表示共轭转置.

充分性　根据式 (14) 与式 (15)，有

$$\begin{aligned}E[x(pt)]&=\int_{-\infty}^{\infty}E\left[\left(\boldsymbol{W}_x^C(a,b)\right)^{\mathrm{T}}\right]\frac{1}{\sqrt{|a|}}\boldsymbol{\varPsi}\left(\frac{pt-b}{a}\right)\mathrm{d}b\frac{\mathrm{d}a}{a^2}\\&=\int_{-\infty}^{\infty}E\left[\left(\boldsymbol{W}_x^C(pa,pb)\right)^{\mathrm{T}}\right]\frac{1}{\sqrt{|pa|}}\boldsymbol{\varPsi}\left(\frac{t-b}{a}\right)\mathrm{d}b\frac{\mathrm{d}a}{a^2}=p^HE[x(t)]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}R_x(pt,ps)=E[x(pt)x(ps)]&=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{|a_1a_2|}}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\boldsymbol{\varPsi}^{\mathrm{T}}\left(\frac{pt-b_1}{a_1}\right)\boldsymbol{R}_W^C(a_1,a_2,b_1,b_2)\\&\quad\times\boldsymbol{\varPsi}\left(\frac{ps-b_2}{a_2}\right)\mathrm{d}b_1\mathrm{d}b_2\frac{\mathrm{d}a_1\mathrm{d}a_2}{a_1^2a_2^2}\\&=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{|pa_1pa_2|}}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\boldsymbol{\varPsi}^{\mathrm{T}}\left(\frac{t-b_1}{a_1}\right)\boldsymbol{R}_W^C(pa_1,pa_2,pb_1,pb_2)\\&\quad\times\boldsymbol{\varPsi}\left(\frac{s-b_2}{a_2}\right)\mathrm{d}b_1\mathrm{d}b_2\frac{\mathrm{d}a_1\mathrm{d}a_2}{a_1^2a_2^2}\\&=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{p^{\gamma}}{\sqrt{|pa_1pa_2|}}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\boldsymbol{\varPsi}^{\mathrm{T}}\left(\frac{t-b_1}{a_1}\right)\boldsymbol{R}_W^C(a_1,a_2,b_1,b_2)\\&\quad\times\boldsymbol{\varPsi}\left(\frac{s-b_2}{a_2}\right)\mathrm{d}b_1\mathrm{d}b_2\frac{\mathrm{d}a_1\mathrm{d}a_2}{a_1^2a_2^2}\\&=p^{2H}R_x(t,s)\end{aligned}$$

证毕

由式 (15)，各尺度间多小波系数相关函数满足关系矩阵：

$$\boldsymbol{R}_W(a,a,b_1,b_2)=a^{\gamma}\boldsymbol{R}_W(1,1,a^{-1}b_1,a^{-1}b_2)\tag{16}$$

信号处理中，尺度 a 为采样间隔，b_2-b_1 为时移，尺度 a 上的时移 b_2-b_1 与尺度 1 上的时移 $a^{-1}b_2-a^{-1}b_1$ 相同. 因此式 (16) 说明任意两个尺度上的多小波系数矩阵相关结构是相同的. 可把式 (16) 理解为信号的统计自相似性在多小波域内的表现形式.

根据定理 2，当信号多小波变换 $\boldsymbol{W}_x(a,b)=[w_1(a,b)\ \cdots\ w_r(a,b)]^{\mathrm{T}}$ 关于 b 广义平稳时，假设 1 是其为 $1/f$ 信号的充要条件. 实际中，只需考虑相应于离散尺度 a 的离散多小波变换，特别是当 $a=2$ 时. 为方便起见，且多小波变换具有去相关性，可忽视不同尺度相关系数间的相关性，这意味着在一固定尺度 $\boldsymbol{W}_x(a,b)$ 关于 b 平稳 [1]. 在此，对分形布朗运动 (Fractal Brown Motion, FBM) 做一简单讨论. 有关 FBM 的离散小波变换的详细讨论可参阅文献 [5, 6]. FBM

是非平稳的自相似过程， Barton 和 Poor[7] 给出的 FBM 如下：

$$x(t)=\frac{1}{\Gamma(H+1/2)}\left[\int_{-\infty}^{0}(|t-\tau|^{H-1/2}-|\tau|^{H-1/2})w(\tau)\mathrm{d}\tau+\int_{0}^{t}|t-\tau|^{H-1/2}w(\tau)\mathrm{d}\tau\right] \tag{17}$$

其中 $1/2<H<1$，亦即 $2<\gamma<3$, $w(\tau)$ 是零均值平稳白噪声. 容易得到 $x(t)$ 的自相关函数：

$$R_x(t,s)=E[x(t)x(s)]=(\sigma_1^2/2)(|s|^{2H}+|t|^{2H}-|t-s|^{2H}) \tag{18}$$

其中 $\sigma_1^2=\Gamma(1-2H)\cos\pi H/(\pi H)$.

定理 3 若 $x(t)$ 是分形布朗运动，$\boldsymbol{\Psi}(t)=[\psi_1(t)\ \cdots\ \psi_r(t)]^{\mathrm{T}}$ 是一基本多小波，$\boldsymbol{W}_x(a,b)=[w_1(a,b)\ \cdots\ w_r(a,b)]^{\mathrm{T}}$ 是信号 $x(t)$ 的多小波变换，那么 $\boldsymbol{W}_x(a,b)$ 关于时移是平稳的，且满足基本假设 1.

证明 $\boldsymbol{\Psi}(t)$ 满足充分条件，即 $\int_{-\infty}^{\infty}\boldsymbol{\Psi}(t)\mathrm{d}t=\boldsymbol{0}_{r\times 1}$，由式 (18) 可得

$$\begin{aligned}\boldsymbol{R}_w(a_1,a_2,b_1,b_2)&=\frac{1}{\sqrt{|a_1a_2|}}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\boldsymbol{\Psi}^*\left(\frac{t-b_1}{a_1}\right)R_x(t,s)\boldsymbol{\Psi}^{\mathrm{H}}\left(\frac{s-b_2}{a_2}\right)\mathrm{d}t\mathrm{d}s\\&=\frac{-\sigma_1^2}{2\sqrt{|a_1a_2|}}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\boldsymbol{\Psi}^*\left(\frac{t-b_1}{a_1}\right)|t-s|^{2H}\boldsymbol{\Psi}^{\mathrm{H}}\left(\frac{s-b_2}{a_2}\right)\mathrm{d}t\mathrm{d}s\\&=\frac{-\sqrt{|a_1a_2|}\sigma_1^2}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\boldsymbol{\Psi}^*(u)|a_1u+b_1-a_2v-b_2|^{2H}\boldsymbol{\Psi}^{\mathrm{H}}(v)\mathrm{d}u\mathrm{d}v\end{aligned}$$

说明 $\boldsymbol{W}_x(a,b)$ 关于时移 $b=b_1-b_2$ 是平稳的. 易证基本假设 1 中式 (6) 成立. 证毕

当多小波重数 $r=1$ 时，本文结论对应单小波情形，文献 [2] 结论是本文的特例. 同时，由于多小波的高逼近阶、短支撑、对称性和线性相位，可以预计，若对 $1/f$ 信号作有限项逼近，合理选择多小波基函数，逼近误差会小于使用同样支撑的单小波函数.

参 考 文 献

[1] Wornell G W. Signal Processing with Fractals: A Wavelet-Based Approach. New York: Prentice Hall PTR, 1996: 43–54.

[2] 刘峰，刘贵忠，张茁生. 基于小波变换的 $1/f$ 信号表示. 中国科学， 2000, 30(6): 568–573.

[3] Chui C K, Lian J. A study of orthonormal multi-wavelets. *Appl. Numer. Math.*, 1996, 20(3): 273–298.

[4] Lebrun J. High-order banlanced multiwavelets: Theory, factorization, and design. *IEEE Trans. on Signal Processing*, 2001, SP-49(9): 1918–1930.

[5] Flandrin P. Wavelet analysis and synthesis of fractional Browian motion. *IEEE Trans. on Information Theory*, 1992, IT-38(2): 910–917.

[6] Tewfik A H, Kim M. Correlation structure of the discrete wavelet coefficients of fractional Brownian motion. *IEEE Trans. on Information Theory*, 1992, IT-38(2): 904–909.

[7] Barton R J, Poor V H. Signal detection in fractional Gaussian noise. *IEEE Trans. on Information Theory*, IT-1988, 34(5): 943–959.

阎晓红： 男， 1974 年生，博士生，研究方向为多小波理论应用、扩频通信.

刘贵忠： 男， 1962 年生， 1989 年获荷兰埃茵霍温大学博士学位，教授，博士生导师，研究方向为通信、多媒体、非平稳信号的处理.

刘 峰： 男， 1961 年生，博士，副教授，研究方向为小波理论及分形信号处理.