

## 高阶 ADI-FDTD 算法的数值色散分析

徐利军 袁乃昌

(国防科学技术大学电子科学与工程学院 长沙 410073)

**摘要:** 该文给出高阶交替方向隐时域优先差分(ADI-FDTD)算法,即在 ADI-FDTD 迭代公式的基础上对时间的差分仍然采用二阶中心差分格式,而对空间的差分则采用四阶中心差分格式,并解析地证明了所给出的高阶 ADI-FDTD 算法仍然满足无条件稳定方程,同时对增长因子相位的分析,得到数值色散关系,最后对其数值色散误差进行了分析,研究表明与普通 ADI-FDTD 相比,其色散误差较小。

**关键词:** 高阶 ADI-FDTD 算法,数值色散

中图分类号: TM15

文献标识码: A

文章编号: 1009-5896(2005)10-1662-04

## Analysis of the Numerical Dispersion of Higher Order ADI-FDTD

Xu Li-jun Yuan Nai-chang

(Institute of Electronic Science and Engineering, NUDT, Changsha 410073, China)

**Abstract** In this paper, a new higher order Alternating Direction Implicit Finite-Difference Time-Domain (ADI-FDTD) formulation in particular, a second-order-in-time, fourth-order-in-space AD-FDTD method is presented for the first time. At the same time, the unconditional stability of the higher order ADI-FDTD formulation is analytically proved. By analysis of the amplification factors, the numerical dispersion relation is derived. In addition, the numerical dispersion errors are investigated. Finally numerical results indicate that the higher order ADI-FDTD has a better accuracy compared to the ADI-FDTD method.

**Key words** Higher order ADI-FDTD methods, Numerical dispersion

### 1 引言

时域有限差分(FDTD)方法自 1966 年由 Yee<sup>[1]</sup>提出以来,由于其简单性和灵活性,在许多领域得到广泛的应用。但是由于(FDTD)方法中 Courant 稳定条件的限制,使得 FDTD 方法的灵活性以及在模拟电大尺寸的物体时受到极大的限制。为了解决上述问题,近年来,出现了许多新的时域有限差分方法。Krumpholz 和 Katehi<sup>[2]</sup>提出的多分辨率时域(MRTD)方法, Liu<sup>[3]</sup>提出的时域伪谱(PSTD)方法, Kondylis<sup>[4]</sup>等人提出的节省内存时域有限差(R-FDTD)分法以及 Zheng<sup>[5,6]</sup>等人和 Namiki<sup>[7,9]</sup>提出的交替方向隐式时域有限差分(ADI-FDTD)方法都从不同角度较好地对上述问题进行了研究。其中 ADI-FDTD 方法从根本上很好地解决了这个问题。消除了 Courant 稳定条件的限制,使得 FDTD 方法中时间步长的选择不依赖 Courant 稳定条件,而是由计算精度决定。从而时间步长的选择可以成倍地增加,计算时间也成倍地下降。

但是,研究发现与传统的 FDTD 相比, ADI-FDTD 色散比

较严重。本文给出高阶 ADI-FDTD 算法,即在 ADI-FDTD 迭代公式的基础上对时间的差分仍然采用二阶中心差分格式,而对空间的差分则采用四阶中心差分格式<sup>[10]</sup>;并解析地证明了所给出的高阶 ADI-FDTD 算法仍然满足无条件稳定方程;同时对增长因子相位的分析,得到数值色散关系;最后对其进行了数值色散分析。研究表明与普通 ADI-FDTD 相比,其色散误差较小。

### 2 高阶 ADI-FDTD 公式

我们以无耗媒质中的二维 TE 波为例来给出高阶 ADI-FDTD 的迭代公式。其主要的思想是在 ADI-FDTD 的迭代公式中,对时间的差分仍然采用二阶中心差分格式,对空间的差分则采用四阶中心差分格式<sup>[10]</sup>。由此我们可以给出第 (n)步到(n+1/2)步的高阶 ADI-FDTD 公式:

$$E_x|_{i+1/2,j}^{n+1/2} = E_x|_{i+1/2,j}^n + \frac{\Delta t}{2\epsilon\Delta y} \left[ \frac{9}{8} \left( H_z|_{i+1/2,j+1/2}^n - H_z|_{i+1/2,j-1/2}^n \right) - \frac{1}{24} \left( H_z|_{i+1/2,j+3/2}^n - H_z|_{i+1/2,j-3/2}^n \right) \right] \quad (1a)$$

$$E_y \Big|_{i,j+1/2}^{n+1/2} = E_y \Big|_{i,j+1/2}^n - \frac{\Delta t}{2\epsilon\Delta x} \left[ \frac{9}{8} \left( H_z \Big|_{i+1/2,j+1/2}^{n+1/2} - H_z \Big|_{i-1/2,j+1/2}^{n+1/2} \right) - \frac{1}{24} \left( H_z \Big|_{i+3/2,j+1/2}^{n+1/2} - H_z \Big|_{i-3/2,j+1/2}^{n+1/2} \right) \right] \quad (1b)$$

$$H_z \Big|_{i+1/2,j+1/2}^{n+1/2} = H_z \Big|_{i+1/2,j+1/2}^n + \frac{\Delta t}{2\mu\Delta y} \left[ \frac{9}{8} \left( E_x \Big|_{i+1/2,j+1}^n - E_x \Big|_{i+1/2,j}^n \right) - \frac{1}{24} \left( E_x \Big|_{i+1/2,j+2}^n - E_x \Big|_{i+1/2,j-1}^n \right) \right] - \frac{\Delta t}{2\mu\Delta x} \left[ \left( \frac{9}{8} E_y \Big|_{i+1,j+1/2}^{n+1/2} - E_y \Big|_{i,j+1/2}^{n+1/2} \right) - \frac{1}{24} \left( E_y \Big|_{i+2,j+1/2}^{n+1/2} - E_y \Big|_{i-1,j+1/2}^{n+1/2} \right) \right] \quad (1c)$$

同样第(n+1/2)步到(n+1)步的 FDTD 公式为

$$E_x \Big|_{i+1/2,j}^{n+1} = E_x \Big|_{i+1/2,j}^{n+1/2} + \frac{\Delta t}{2\epsilon\Delta y} \left[ \frac{9}{8} \left( H_z \Big|_{i+1/2,j+1/2}^{n+1} - H_z \Big|_{i+1/2,j-1/2}^{n+1} \right) - \frac{1}{24} \left( H_z \Big|_{i+1/2,j+3/2}^{n+1} - H_z \Big|_{i+1/2,j-3/2}^{n+1} \right) \right] \quad (2a)$$

$$E_y \Big|_{i,j+1/2}^{n+1} = E_y \Big|_{i,j+1/2}^{n+1/2} - \frac{\Delta t}{2\epsilon\Delta x} \left[ \frac{9}{8} \left( H_z \Big|_{i+1/2,j+1/2}^{n+1/2} - H_z \Big|_{i-1/2,j+1/2}^{n+1/2} \right) - \frac{1}{24} \left( H_z \Big|_{i+3/2,j+1/2}^{n+1/2} - H_z \Big|_{i-3/2,j+1/2}^{n+1/2} \right) \right] \quad (2b)$$

$$H_z \Big|_{i+1/2,j+1/2}^{n+1} = H_z \Big|_{i+1/2,j+1/2}^{n+1/2} + \frac{\Delta t}{2\mu\Delta y} \left[ \frac{9}{8} \left( E_x \Big|_{i+1/2,j+1}^{n+1} - E_x \Big|_{i+1/2,j}^{n+1} \right) - \frac{1}{24} \left( E_x \Big|_{i+1/2,j+2}^{n+1} - E_x \Big|_{i+1/2,j-1}^{n+1} \right) \right] - \frac{\Delta t}{2\mu\Delta x} \left[ \frac{9}{8} E_y \Big|_{i+1,j+1/2}^{n+1/2} - E_y \Big|_{i,j+1/2}^{n+1/2} - \frac{1}{24} \left( E_y \Big|_{i+2,j+1/2}^{n+1/2} - E_y \Big|_{i-1,j+1/2}^{n+1/2} \right) \right] \quad (2c)$$

### 3 高阶 ADI-FDTD 公式的稳定性分析

为了分析上述高阶 ADI-FDTD 公式的稳定性, 定义各场分量的表达式为

$$E_x(l, J) = \psi_A \xi_l \exp j(k_x l \Delta x + k_y J \Delta y) \quad (3a)$$

$$E_y(l, J) = \psi_B \xi_l \exp j(k_x l \Delta x + k_y J \Delta y) \quad (3b)$$

$$H_z(l, J) = \psi_C \xi_l \exp j(k_x l \Delta x + k_y J \Delta y) \quad (3c)$$

式中  $\xi_l$  为增长因子,  $l$  ( $l=1, l=2$ ) 为上述分步。

为了求第一分步的增长因子, 将式(3a)~(3c)代入第一分步的差分方程(1a)~(1c), 简化后得下列方程组:

$$\psi_A(\xi_1 - 1) = \frac{j\Delta t}{24\epsilon\Delta y} \psi_C \left( 27 \sin \frac{k_y \Delta y}{2} - \sin \frac{3k_y \Delta y}{2} \right) \quad (4)$$

$$\psi_B(\xi_1 - 1) = -\frac{j\Delta t \xi_1}{24\epsilon\Delta x} \psi_C \left( 27 \sin \frac{k_x \Delta x}{2} - \sin \frac{3k_x \Delta x}{2} \right) \quad (5)$$

$$\psi_C(\xi_1 - 1) = \frac{j\Delta t}{24\mu\Delta y} \psi_A \left( 27 \sin \frac{k_y \Delta y}{2} - \sin \frac{3k_y \Delta y}{2} \right) - \frac{j\Delta t \xi_1}{24\mu\Delta x} \psi_B \left( 27 \sin \frac{k_x \Delta x}{2} - \sin \frac{3k_x \Delta x}{2} \right) \quad (6)$$

式(4)~式(6)中消去  $\psi_A \sim \psi_C$ , 可得

$$p\xi_1^2 - 2\xi_1 + q = 0 \quad (7)$$

这里

$$p = 1 + \left( \frac{\Delta t}{24\sqrt{\epsilon\mu}\Delta x} \left( 27 \sin \frac{k_x \Delta x}{2} - \sin \frac{3k_x \Delta x}{2} \right) \right)^2$$

$$q = 1 + \left( \frac{\Delta t}{24\sqrt{\epsilon\mu}\Delta y} \left( 27 \sin \frac{k_y \Delta y}{2} - \sin \frac{3k_y \Delta y}{2} \right) \right)^2$$

于是, 可以得到第一分步的场量的增长因子:

$$\xi_1 = (1 \pm j\sqrt{pq-1})/p \quad (8)$$

同样, 第二分步的增长因子满足下列方程组:

$$q\xi_2^2 - 2\xi_2 + p = 0 \quad (9)$$

可以得到第二分步的场量的增长因子:

$$\xi_2 = (1 \pm j\sqrt{pq-1})/q \quad (10)$$

于是, 总的增长因子  $\xi$  为

$$|\xi| = |\xi_1||\xi_2| = \sqrt{q/p}\sqrt{p/q} = 1 \quad (11)$$

显然, 从上面的推导可以看出, 高阶 ADI-FDTD 交替方向隐式技术将每一时间步的计算分为两个分步, 并使两个分步的增长因子相互抵消, 从而保持总的增长因子为 1。

### 4 数值色散误差分析

为了分析高阶 ADI-FDTD 公式的数值色散误差, 我们把第一、第二分步的增长因子表示成指数形式:

$$\xi_1 = \xi_{10} e^{\pm j\varphi_1} \quad (12)$$

$$\xi_2 = \xi_{20} e^{\pm j\varphi_2} \quad (13)$$

这里  $\xi_{10} = \frac{1}{\xi_{20}} = \sqrt{\frac{q}{p}}$ ,  $\varphi_1 = \varphi_2 = \tan^{-1}(\sqrt{pq-1})$ 。

我们知道增长因子的相位决定着色散误差<sup>[11]</sup>, 为了得到高阶 ADI-FDTD 方法的数值色散误差, 我们把式(12) 和式(13) 代入下式:

$$\xi = \xi_1 \xi_2 = e^{j\omega\Delta t} \quad (14)$$

这里  $\xi$  为一个迭代周期总的增长因子,  $\omega = 2\pi f$  为角频率,

经过简单的计算可以得到高阶 ADI-FDTD 方法的数值色散关系:

$$\begin{aligned} \tan^2 \frac{\omega\Delta t}{2} = & \left( \frac{c\Delta t}{24\Delta x} \left( 27 \sin\left(\frac{k_x\Delta x}{2}\right) - \sin\left(\frac{3k_x\Delta x}{2}\right) \right) \right)^2 \\ & + \left( \frac{c\Delta t}{24\Delta y} \left( 27 \sin\left(\frac{k_y\Delta y}{2}\right) - \sin\left(\frac{3k_y\Delta y}{2}\right) \right) \right)^2 \\ & + \left( \frac{c\Delta t}{24\Delta x} \left( 27 \sin\left(\frac{k_x\Delta x}{2}\right) - \sin\left(\frac{3k_x\Delta x}{2}\right) \right) \right)^2 \\ & \cdot \left( \frac{c\Delta t}{24\Delta y} \left( 27 \sin\left(\frac{k_y\Delta y}{2}\right) - \sin\left(\frac{3k_y\Delta y}{2}\right) \right) \right)^2 \end{aligned} \quad (15)$$

上式中  $c$  为光速。不难发现, 当  $\Delta x$ ,  $\Delta y$ ,  $\Delta t$  趋近于零时, 上式变为

$$k_x^2 + k_y^2 = \omega^2 / c^2 \quad (16)$$

此式刚好是无耗媒质中的理想色散关系式。另一方面, 文献 [11] 中给出了普通 ADI-FDTD 的数值色散关系式:

$$\begin{aligned} \tan^2 \left( \frac{\omega\Delta t}{2} \right) = & \left( \frac{c\Delta t}{\Delta x} \sin\left(\frac{k_x\Delta x}{2}\right) \right)^2 + \left( \frac{c\Delta t}{\Delta y} \sin\left(\frac{k_y\Delta y}{2}\right) \right)^2 \\ & + \left( \frac{c\Delta t}{\Delta x} \sin\left(\frac{k_x\Delta x}{2}\right) \right)^2 \left( \frac{c\Delta t}{\Delta y} \sin\left(\frac{k_y\Delta y}{2}\right) \right)^2 \end{aligned} \quad (17)$$

对比式(15)和式(17), 发现它们的色散关系表达式不同, 后面通过数值分析会发现, 本文所给出的高阶 AD-FDTD 比普通的 ADI-FDTD 的色散要小。可以通过式(15)从数量上估算出空间步长和时间步长对平面波相速的影响。假设波矢  $k$  与  $x$  轴的夹角为  $\theta$ , 则  $k_x = k \cos \theta$ ,  $k_y = k \sin \theta$ , 式(15)通过牛顿迭代算法可以得到波矢  $k$ , 用归一化相速度误差来表示由于离散化产生的色散误差:

$$\frac{|v_p - v|}{v} = \frac{|k - k_{\text{final}}|}{k_{\text{final}}} = \frac{|\sqrt{\omega^2/c^2 - k_{\text{final}}^2}|}{k_{\text{final}}} \quad (18)$$

这里  $k_{\text{final}}$  是牛顿迭代最后的值。对于标准的 FDTD 来说, 时间步长必须满足 CFL 条件:

$$\Delta t \leq \Delta t_{\text{max}}^{\text{FDTD}} = \frac{1}{c\sqrt{1/\Delta x^2 + 1/\Delta y^2}} \quad (19)$$

为了后面讨论的方便定义  $\text{CFLN} = \Delta t / \Delta t_{\text{max}}^{\text{FDTD}}$ 。另外令标准 FDTD 空间步长  $\Delta l^{\text{FDTD}} = \lambda / N$  (本文  $N$  取 15), ADI-FDTD 的空间步长为:  $\Delta l = \Delta l^{\text{FDTD}} / R$ , 本文提出的高阶 ADI-FDTD 算法的归一化相速度误差, ADI-FDTD 算法的归一化相速度误差与 CFLN 的关系如图 1, 图 2 所示, 为便于对比, 图中还给出了采用标准 FDTD 算法的色散关系。

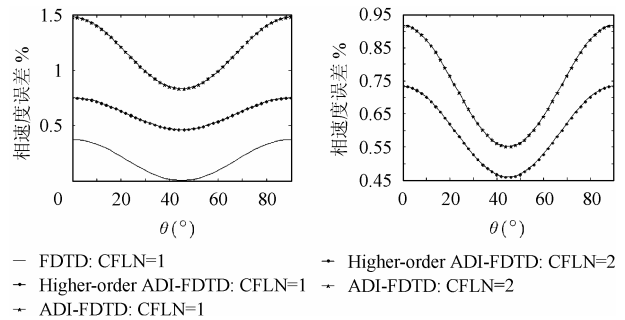


图 1 高阶 ADI-FDTD、ADI-FDTD 和 FDTD 相速度对比图  
图 2 高阶 ADI-FDTD 和 ADI-FDTD 相速度对比图

在图 1 中, 采用的是标准网格(即  $R=1$ ), 同时采用传统 FDTD 的时间步长(CFLN=1), 从图 1 可以看出, 采用本文提出的高阶 ADI-FDTD 的色散误差介于传统 FDTD 和 ADI-FDTD 的色散误差之间, 尽管其色散误差比传统 FDTD 略大, 但是与 ADI-FDTD 相比, 其精度有较大的提高。在图 2 中, 采用的是细网格(即  $R=2$ ), 同时 CFLN=2, 即采用的时间步长为传统 FDTD 的时间步长的 2 倍, 由于在此情况下, 计算传统 FDTD 的色散误差已没有意义, 所以在图 2 中我们只给出高阶 ADI-FDTD 和 ADI-FDTD 的色散误差。从图 2 中可以看出, 在 CFLN=2 的情况下, 与图 1 取 CFLN=1 相比, 其色散误差有变大的趋势, 但是与 ADI-FDTD 相比, 其精度仍然有较大的改进。

### 5 结束语

最近提出的 ADI-FDTD 方法从根本上消除了 Courant 稳定条件的限制, 使得 FDTD 方法中时间步长的选择不依赖 Courant 稳定条件, 但是研究发现与传统的 FDTD 相比, ADI-FDTD 色散比较严重, 本文给出高阶 ADI-FDTD 算法, 即在 ADI-FDTD 迭代公式的基础上对时间的差分仍然采用二阶中心差分格式, 而对空间的差分则采用四阶中心差分格式; 并解析地证明了所给出的高阶 ADI-FDTD 算法仍然满足无条件稳定方程; 同时对增长因子相位的分析, 得到数值色散关系, 最后对其进行了数值色散分析。研究表明与普通 ADI-FDTD 相比, 其色散误差较小。

### 参考文献

- [1] Yee K S. Numerical solution of initial boundary value problem involving Maxwell's equations in isotropic media [J]. *IEEE Trans. on AP.*, 1966, 14(5): 302 - 307.
- [2] Krumpholz M, Katehi L P B. MRTD: New time-domain schemes based on multiresolution analysis [J]. *IEEE Trans. on Microwave Theory& Tech.*, 1996, 44(4): 555 - 571.
- [3] Liu Q H. The pseudospectral time-domain (PSTD) method: A new

- algorithm for solution of Maxwell's equations [C] Proc. IEEE Antennas and Propag. Soc. Int. Symp., 1997, 1: 122 – 125.
- [4] Kondylis G D, De Flaviis F, Pottier G J, *et al.* A memory-efficient formulation of the finite-difference time-domain method for the resolution of Maxwell's equations [J]. *IEEE Trans. on Microwave Theory & Tech.*, 2001, 49(7): 1310 – 1320.
- [5] Zheng F, Chen Z, Zhang J. A finite-difference time-domain method without the Courant stability conditions [J]. *IEEE Microw Guided Wave Lett.*, 1999, 9(11): 441 – 443.
- [6] Zheng F, Chen Z, Zhang J. Toward the development of a three-dimensional unconditionally stable finite-difference time-domain method [J]. *IEEE Trans. on Microwave Theory & Tech.*, 2000, 48(9): 1550 – 1558.
- [7] Namiki T. A new FDTD algorithm based on alternating-direction implicit method [J]. *IEEE Trans. on Microwave Theory & Tech.*, 1999, 47(10): 2003 – 2007.
- [8] Namiki T. 3-D ADI-FDTD method — Unconditionally stable time-domain algorithm for solving full vector Maxwell's equations [J]. *IEEE Trans. on Microwave Theory & Tech.*, 2000, 48(10): 1743 – 1748.
- [9] Namiki T, Ito K. Investigation of numerical errors of the two-dimensional ADI-FDTD method [J]. *IEEE Trans. on Microwave Theory & Tech.*, 2000, 48(11): 1950 – 1956.
- [10] Georgakopoulos S V, Birtcher C B, *et al.* Higher-order finite-difference schemes for electromagnetic radiation, scattering, and penetration, part I: theory [J]. *IEEE Trans. on AP, Magazine*, 2002, 49(1): 134 – 142.
- [11] Sun G and Trueman C W. Analysis and numerical experiments on the numerical dispersion of two-dimensional ADI-FDTD [J]. *IEEE Antennas and Wireless Propagation Lett.*, 2003, 2(7): 78 – 81.

徐利军: 男, 1977 年生, 博士生, 目前主要从事电磁散射方向的研究。

袁乃昌: 男, 1965 年生, 国防科技大学电子科学与技术系主任, 教授, 博士生导师, 中国电子学会高级会员, 中国电子学会雷达分会天线专委会委员, 八六三 308 主题发展战略研究组成员, 美国 Advanced Science 协会会员, 美国纽约科学院院士。先后在 IEEE-MTT、IEE Proceeding-H、电子学报等国内外刊物上发表论文 60 余篇, 出版专著两本。主要研究领域为微波毫米波电路、相控阵天线、电磁散射及超宽带技术等。