

扭转矩形波导主模传播常数的变分解¹

谢拥军 梁昌洪

(西安电子科技大学 601 室 西安 710071)

摘 要 本文应用非标准本征值问题的变分方法求解了扭转矩形波导的传播常数, 并同传统的微扰解做了比较。结果表明, 变分解既没有不易处理的无穷级数, 且在二阶近似时, 其精度超过了微扰解的精度, 在扭转角周期较大时则更显优越。

关键词 扭转波导, 非标准本征值, 传播常数

中图分类号 TN814

1 引言

关于扭转矩形波导的分析, 一般放在扭转坐标系中, 此时波方程形式较为复杂^[1,2], 其分析方法一般采用微扰法。但如果扭转角周期较大时, 微扰法的误差便值得注意了。应用 Lindell 的非标准本征值理论^[3], 将传播常数视为非标准本征值并用变分法求解, 从而提高求解精度是本文的目的。

2 扭转波导中 TE 波的波动方程

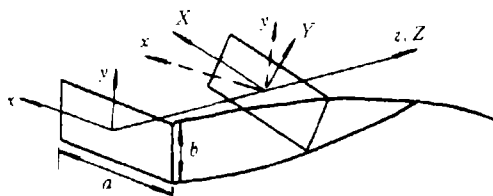


图 1 扭转的矩形波导

图 1 示出了一个沿直线均匀扭转的矩形波导, 其中 x, y 轴是固定的, X, Y 轴是旋转的。设 L 是扭转波导扭转一周的距离, 则其角周期为 $P = 2\pi/L$, 且有

$$\left. \begin{aligned} X &= x \cos Pz + y \sin Pz, \\ Y &= y \cos Pz - x \sin Pz, \\ Z &= z. \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

考虑到 TE 波的特点, 在 xyz 坐标系中的波方程

$$\left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \right) + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} + k^2 \psi = 0; \quad (2)$$

¹ 1994-11-14 收到, 1995-05-02 定稿

转化到 XYZ 坐标系中为

$$(1 + P^2 Y^2) \frac{\partial^2 \psi}{\partial X^2} + (1 + P^2 X^2) \frac{\partial^2 \psi}{\partial Y^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial Z^2} + k^2 \psi + 2P(Y \frac{\partial^2 \psi}{\partial X \partial Z} - X \frac{\partial^2 \psi}{\partial Y \partial Z}) - P^2(X \frac{\partial \psi}{\partial X} + Y \frac{\partial \psi}{\partial Y} + 2XY \frac{\partial^2 \psi}{\partial X \partial Y}) = 0; \quad (3)$$

其中 $k^2 = \omega^2 \mu_0 \epsilon_0$ 。

3 传播常数的变分解

由

$$\psi = \psi_0(X, Y) \exp(-j\beta Z), \quad (4)$$

则 (3) 式化为

$$\mathbf{A}\psi_0 = (1 + P^2 Y^2) \frac{\partial^2 \psi_0}{\partial X^2} + (1 + P^2 X^2) \frac{\partial^2 \psi_0}{\partial Y^2} + (k^2 - \beta^2)\psi_0 - j2P\beta(Y \frac{\partial \psi_0}{\partial X} - X \frac{\partial \psi_0}{\partial Y}) - P^2(X \frac{\partial \psi_0}{\partial X} + Y \frac{\partial \psi_0}{\partial Y} + 2XY \frac{\partial^2 \psi_0}{\partial X \partial Y}) = 0, \quad (5)$$

于是可得泛函

$$\mathbf{F} = \langle \psi_0^a, \mathbf{A}\psi_0 \rangle, \quad (6)$$

积分在波导横截面上进行. 文献 [3] 已证明, 泛函 \mathbf{F} 与非标准本征值 β 同时达到稳定, 则只需求解泛函 \mathbf{F} , 即得传播常数.

4 数值结果和讨论

为了求解主模的传播常数, 令

$$\psi_0 = \alpha_0 \sin \frac{\pi}{a} X, \quad (7)$$

代入 (6) 式, 可选 $\psi_0^a = \psi_0$, 由 Ritz 解法, 可得一阶近似解为

$$\beta = [k^2 + \pi^2/a^2(1 + P^2 b^2/12)]^{1/2}. \quad (8)$$

令

$$\psi_0 = \alpha_1 \sin \frac{\pi}{a} X + \alpha_2 \sin \frac{\pi}{b} Y, \quad (9)$$

代入 (6) 式, 由 Ritz 解法, 可得二阶近似解为

$$\beta = \{[-B_0 + (B_0^2 - 4A_0 C_0)^{1/2}]/(2A_0)\}^{1/2}, \quad (10)$$

其中

$$A_0 = a^2 b^2 / 4,$$

$$B_0 = 4(-\frac{ab}{2} Q_1 - \frac{ab}{2} Q_2 - P^2 a^3 b^3) + [\frac{8P}{\pi^2} (a^2 - b^2)]^2,$$

$$C_0 = 4Q_1 Q_2,$$

$$Q_1 = -\frac{\pi^2}{2a} (b + \frac{P^2 b^3}{12}) + \frac{ab}{2} + P^2 a^3 b (\frac{1}{24} + \frac{1}{4\pi^2}) + \frac{k^2 ab}{2} - \frac{P^2 a^2 b}{4} - \frac{P^2 ab^2}{4},$$

$$Q_2 = -\frac{\pi^2}{2b} (a + \frac{P^2 a^3}{12}) + \frac{ab}{2} + P^2 b^3 a (\frac{1}{24} + \frac{1}{4\pi^2}) + \frac{k^2 ab}{2} - \frac{P^2 a^2 b}{4} - \frac{P^2 ab^2}{4}.$$

表 1 扭转矩形波导主模传播常数变分解与微扰解的比较 ($a=22.48\text{mm}, b=11.80\text{mm}$)

$\lambda(\text{m})$	$L(\text{m})$	一阶变分解	二阶变分解	二阶微扰解	二阶变分解与微扰解的相对误差 %
0.038	1.0	88.320	88.170	88.298	0.14
	0.5	88.168	87.553	88.079	0.6
	0.3	87.807	86.091	87.558	1.70
0.035	1.0	112.641	112.503	112.668	0.15
	0.5	112.522	111.958	112.628	0.60
	0.3	112.239	110.673	112.535	1.68
0.032	1.0	137.891	137.756	137.891	0.10
	0.5	137.794	137.245	138.066	0.60
	0.3	137.563	136.847	138.320	1.08

可见, 虽然 (10) 式比较复杂, 但却避开了微扰解不易处理的无穷级数.

变分解与文献 [1] 中取二阶近似的微扰解数值结果的对比如表 1。从表中可以看出, 由于 Ritz 法求得的是真实解的上限, 因此二阶变分解是比微扰解更精确的解, 且随着扭转周期增大, 两者的差别更大, 这是由于此时场的扰动已经很大, 微扰法已不够准确. 另外, 可见随着扭转角周期增大, 传播常数在变小.

参 考 文 献

- [1] Lewin L, Chang D C, Kuester E F. *Electromagnetic Wave and Curved Structures*, Peter Peregrinus LTD, 1977, Chap.3.
- [2] 连汉雄编著. 电磁场理论的数学方法. 北京: 理工大学出版社, 1990, 第十一章.
- [3] Lindell I V. *IEEE Trans. on MTT*, 1982, MTT-30(8): 1194-1204.

A VARIATIONAL SOLUTION OF THE PROPAGATION COEFFICIENT OF THE DOMINANT MODE IN TWISTED RECTANGULAR WAVEGUIDE

Xie Yongjun Liang Changhong

(*Department of Microwave and Telecommunication Engineering, Xidian University, Xi'an 710071*)

Abstract A variational expression of the propagation coefficient of the dominant mode in twisted rectangular waveguide is derived on the basis of the theory of the nonstandard eigenvalue problems, and the numerical results are compared with that of perturbation approach. It illustrates that there is no infinite series in the variational expression, and the variational results are more accurate than the perturbational ones, especially when the twisted angular period becomes bigger.

Key words Twisted waveguide, Nonstandard eigenvalue, Propagation coefficient

谢拥军: 男, 1968年生, 博士, 现从事电磁场理论研究和应用工作.

梁昌洪: 男, 1943年生, 教授, 博士生导师, 现从事电磁场理论和微波技术的教学和科研工作.