

周期平稳信号处理及其应用¹

李立霞 王文博 王德隽

(北京邮电大学电信工程系 北京 100088)

摘要 周期平稳信号是一类非常重要的非平稳信号,许多信号、干扰都表现出一定的周期平稳性,将信号的这种特性考虑在内的信号处理器,较之传统的信号处理器,可以得到性能上的提高。本文对周期平稳信号处理的基本理论和方法,以及它在各领域中的应用作一概要总结,并在此基础上,对周期平稳信号处理新的发展和方向予以展望。

关键词 信号处理, 周期平稳, 周期自相关, 谱相关密度

中图分类号 TN911.72

1 引言

如果信号 $x(t)$ 的一阶和二阶统计特性不随时间改变,则称之为广义平稳信号,否则称为非平稳信号。许多传统的信号处理器都假定信号是广义平稳的,但事实上,这一假定在某些情况下是不满足的,例如:通信、雷达和声纳系统、遥测等中遇到的随机信号,其统计特性是随时间而变化的,这时便不能再作为广义平稳信号来处理,而应作为非平稳信号来处理。要简洁地表达非平稳信号是不容易的,但当信号统计特性的变化有一定规律时,可以引入周期平稳信号的概念来表达它。周期平稳信号一方面是对平稳信号的推广,另一方面是一类非常重要的非平稳信号的概括,由于它反映了信号的非平稳性,因而可以使许多信号处理器的性能得到改善。

2 周期平稳信号处理基本理论和方法

2.1 周期平稳信号的概念和特点

如果信号 $x(t)$ 的一阶和二阶统计特性随时间的变化呈现出一定的周期性,则称为(广义)周期平稳信号。即

$$\begin{aligned} m_x(t) &= m_x(t + k/\alpha), \\ R_x(t + \tau/2, t - \tau/2) \\ &= R_x(t + k/\alpha + \tau/2, t + k/\alpha - \tau/2), \end{aligned}$$

其中 $m_x(t) = E[x(t)]$ 为 $x(t)$ 的均值, $R_x(t + \tau/2, t - \tau/2) = E[x(t + \tau/2)x^*(t - \tau/2)]$ 为 $x(t)$ 的自相关函数。 $1/\alpha$ 为某一周期²。

¹ 1994-11-07 收到, 1995-12-11 定稿

² 对于某些周期平稳信号,只包含单一周期 T_1 , 则 $T_1 = 1/\alpha_1$, 对于另一些调制信号,呈现多周期 $T_i = 1/\alpha_i$, 则 α 不仅包括 α_i , 还包括它们的和与差。

周期平稳信号有以下特点:

(1) 其统计特性随时间改变, 因而它可以反映信号的非平稳性, 是广义平稳信号描述的推广。

(2) 其统计特性随时间的改变不是任意的而是呈现出一定的周期性, 因而它又是基于客观实际而对非平稳信号描述的一种合理简化。

(3) 在以下讨论中还将看到, 信号的周期平稳性蕴含 $x(t)$ 的频移信号的相关性, 这是周期平稳信号所特有的。

周期平稳信号处理的特色在于: 它一方面反映了信号统计量随时间的变化, 弥补了平稳信号处理的不足; 另一方面认为信号统计量周期变化, 简化了一般的非平稳信号处理。因而它是介于平稳、非平稳信号处理之间的一种解决方案, 能比平稳信号处理得到更满意的结果, 而又比非平稳信号处理更简洁、更易于实时化。在周期平稳信号处理中有周期自相关函数、频移信号相关性、谱相关密度函数等基本概念。

2.2 周期自相关函数 $R_x^\alpha(\tau)$

由于 $R_x(t + \tau/2, t - \tau/2)$ 对于 t 为周期的, 因而可以展开成傅里叶级数:

$$R_x(t + \tau/2, t - \tau/2) = \sum_{\alpha \in \Phi} R_x^\alpha(\tau) \exp(j2\pi\alpha t),$$

其中 $\Phi = \{\alpha: R_x^\alpha(\tau) \neq 0\}$ 。 $R_x(\tau)$ 为傅里叶级数的系数

$$R_x^\alpha(\tau) = (1/T) \int_{-T/2}^{T/2} R_x(t + \tau/2, t - \tau/2) \exp(-j2\pi\alpha t) dt \quad (1)$$

称 $R_x^\alpha(\tau)$ 为周期自相关 (Cyclic Autocorrelation) 函数。

对于平稳信号, $R_x(t + \tau/2, t - \tau/2) = R_x(\tau)$, 代入 (1) 式, 有

$$\begin{aligned} R_x^\alpha(\tau) &= (1/T) \int_{-T/2}^{T/2} R_x(\tau) \exp(-j2\pi\alpha t) dt \\ &= R_x(\tau) \delta(\alpha), \end{aligned}$$

可见, $R_x^\alpha(\tau)$ 是对平稳信号自相关函数 $R_x(\tau)$ 的推广: $R_x(\tau) = R_x^\alpha(\tau)|_{(\alpha=0)} = R_x^0(\tau)$ 对于平稳信号, $R_x^\alpha(\tau) \equiv 0$ 对所有非零 α 成立, 但对于非平稳信号, 对所有非零 α , $R_x^\alpha(\tau)$ 不恒等于零。集合 $\Phi = \{\alpha | R_x^\alpha(\tau) \neq 0\}$ 称为周期频率集 (Set of Cycle Frequencies)。

如果信号 $x(t)$ 又是周期各态遍历的, 那么 (1) 式中 $R_x(t + \tau/2, t - \tau/2)$ 中的集平均可由某一实现的极限时间平均来代替, 从而

$$R_x(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} (1/T) \int_{-T/2}^{T/2} x(t + \tau/2) x^*(t - \tau/2) \exp(-j2\pi\alpha t) dt. \quad (2)$$

2.3 频移信号的相关性

下面我们通过对 $R_x^\alpha(\tau)$ 的进一步分析, 得到信号的周期平稳性蕴含着 $x(t)$ 的频移信号的相关性。由 (2) 式

$$\begin{aligned} R_x^\alpha(\tau) &= \lim_{T \rightarrow \infty} (1/T) \int_{-T/2}^{T/2} x(t + \tau/2) x^*(t - \tau/2) \exp(-j2\pi\alpha t) dt \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} (1/T) \int_{-T/2}^{T/2} \{x(t + \tau/2) \exp[-j\pi\alpha(t + \tau/2)]\} \cdot \{x(t - \tau/2) \exp[+j\pi\alpha(t - \tau/2)]\}^* dt \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} (1/T) \int_{-T/2}^{T/2} u(t + \tau/2) v^*(t - \tau/2) dt \\ &= R_{uv}(\tau), \end{aligned} \quad (3)$$

其中 $u(t) = x(t) \exp(-j\pi\alpha t)$, $v(t) = x(t) \exp(+j\pi\alpha t)$ 。对应的频域关系为

$$\left. \begin{aligned} U(f) &= X(f + \alpha/2), \\ V(f) &= X(f - \alpha/2). \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

由 (3) 式, $R_x^\alpha(\tau) = R_{uv}(\tau)$ 又可理解为 $u(t)$ 和 $v(t)$ 的互相关函数。在第 2.1 节中已指出, 信号 $x(t)$ 是周期平稳的, 当且仅当 $R_x^\alpha(\tau)$ 对所有非零 α 不恒等于零。在此处又可理解为, 信号 $x(t)$ 是周期平稳的, 当且仅当 $x(t)$ 频移 $\pm\alpha/2$ (即 $u(t)$ 和 $v(t)$) 是彼此相关的, 即二者的互相关对所有非零 α 不恒等于零。而对平稳信号 $x(t)$, $R_x^\alpha(\tau) \equiv 0$ 对所有非零 α 成立, 显然其频移信号是不相关的。因而 $x(t)$ 的频移信号的相关性是周期平稳信号所特有的。

2.4 谱相关密度函数 $S_x^\alpha(f)$

$x(t)$ 的谱相关密度 (SCD, Spectral Correlation Density) 函数为

$$S_x^\alpha(f) = F[R_x^\alpha(\tau)] = \int_{-\infty}^{\infty} R_x^\alpha(\tau) \exp(-j2\pi f\tau) d\tau. \quad (5)$$

它是功率谱密度 (PSD) 函数的推广。

根据随机信号分析理论, 由 (4) 式得到 $u(t)$ 和 $v(t)$ 的互谱密度函数为

$$\begin{aligned} S_{uv}(f) &= F[R_{uv}(\tau)] \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} R_{uv}(\tau) \exp(-j2\pi f\tau) d\tau. \end{aligned} \quad (6)$$

它反映 $u(t)$ 和 $v(t)$ 在频率分量 f 处的互相关程度。由 (3), (5), (6) 式, 有

$$S_x^\alpha(f) = S_{uv}(f)$$

因而 $S_x^\alpha(f)$ 也反映了 $u(t)$ 和 $v(t)$ 在频率分量 f 处的互相关程度。又由于 $u(t)$ 和 $v(t)$ 分别为 $x(t)$ 频移 $\pm\alpha/2$ 而得到, 从而 $S_x^\alpha(f)$ 反映了信号 $x(t)$ 在频率分量 $f \pm \alpha/2$ 处的相关程度。

以上概要介绍了 (二阶) 周期平稳信号处理中的基本概念和方法, 更详细的介绍请参见文献 [1,2]。

3 周期平稳信号处理的应用

周期平稳信号处理在通信、雷达、大气信号处理、生物医学信号处理中均得到应用。例如在通信中, 正弦调幅、调频、调相信号, 各种数字调制信号, 周期变化的多普勒效应等都表现出周期平稳性, 利用这一特性可提高信号处理器的性能。

3.1 信号检测和分类

传统的信号检测方法是基于能量测量的, 由于它一般以测量某一频带的能量为依据, 因而当背景噪声未知或时变时会得到不可靠的结果。另外, 当信号与噪声在时间和频谱上均重叠时, 基于能量测量的传统方法便无能为力。

周期平稳信号处理把 $S_x^\alpha(f)$ 作为周期平稳信号 $x(t)$ 的特征量看待, 就可以克服这一缺陷^[3-5]。信号与噪声的 $S_x^\alpha(f)$ 不同, 不同的信号, 尽管在时间和频谱上都是重叠的, 但由于它们本身载波频率、脉冲速率或键控速率的不同, 使得 $\Phi = \{\alpha | R_x^\alpha(\tau) \neq 0\}$ 不同, 因而仍然是可区分的, 尽管这些信号处于相同的频带。设接收到的信号为 $x(t) = \sum_{i=1}^I S_i(t) + n(t)$, 其中 $n(t)$ 为背景噪声。在 $S_i(t), i = 1 \sim I$ 中, 如果只有 $S_k(t)$ 具有周期频率 α_k , 则 $S_x^{\alpha_k}(f) = S_{S_k}^{\alpha_k}(f)$ 。我们可以利用不同的 $S_x^\alpha(f)$ 在背景噪声和其他干扰信号中检测到我们感兴趣的信号, 或者将许多同时收到的具有不同 $S_x^\alpha(f)$ 的信号分类, 而对于时间和频谱上都重叠的信号, 仅仅利用功率谱 (PSD, $\alpha = 0$ 时的 SCD 函数) 是做不到的。

3.2 系统 / 信道辨识

在以往的系统 / 信道辨识中, 把系统 / 信道输出序列作为平稳过程处理, 此时采用二阶统计特性只能恢复系统传输函数的幅度而不能恢复其相位。要完全恢复系统传输函数必须应用高阶统计特性。高阶统计特性的估计需要相对长的数据, 速度较慢。

如果对系统 / 信道输出过采样, 可得到周期平稳序列, 周期平稳信号处理分析其周期时变的数据相关函数, 可得到相位信息。因而由二阶 (周期) 统计特性 (周期自相关函数) 即可辨识系统 / 信道, 而不必采用高阶统计特性^[6-8]。由于二阶 (周期) 统计特性的估计比高阶统计特性的估计需要较短的数据, 因而利用周期平稳性可得到更快速的系统 / 信道辨识算法。

3.3 信号同步

在通信系统中, 尤其是在日益广泛应用的数字通信系统中, 同步与定时恢复是至关重要的。一般的同步方法是对输入信号进行非线性变换产生一定谱线, 然后用锁相环使恢复的时钟与输入同频同相。目前的同步器多采用平方或延迟乘积来产生谱线。

将输入信号作为周期平稳信号来处理, 通过计算谱相关函数可以找到所有可能被恢复的谱线^[9-11], 增强了同步器设计的灵活性。信号 $x(t)$ 的周期平稳性, 从另一个角度又可理解为 $x(t)$ 经过时不变 (二次) 非线性变换后, 将在 $\{\alpha | R_x^\alpha(\tau) \neq 0\}$ 处产生谱线。因而 $\alpha = 2f_0$ 的谱相关特征, 意味着信号经过二次变换后, 将产生频率为 $\alpha = 2f_0$, 相位为 2θ 的正弦波, 此时周期频率 α 的最大信噪比最佳谱线产生所对应的二次非线性变换核由信号的谱相关函数和噪声的功率谱完全确定。因而对不同的输入信号类型可以设计最佳的谱线产生器, 而不仅限于平方或延迟乘积的一般方法。

3.4 信号到达方向估计

在传统的信号到达方向估计中, 主要依赖于利用信号的空间特性(如空间时延), 例如子空间方法。许多算法, 如 MUSIC 和 ESPRIT, 也是通过寻找信号子空间来估计信号到达方向。这些方法的不足是仅利用了信号的空间特性而忽略了信号的时间特性。

周期平稳信号处理利用信号的周期平稳性, 用时间域和空间域相结合的处理方法, 提高了估计的信噪比, 改善了估计性能^[12-14]。在这种方法中, 一般子空间算法中的相关矩阵由周期互相关矩阵代替, 周期互相关矩阵引入了时间域的处理, 因而它同时考虑了信号的空间特性和时间特性, 利用了周期平稳信号中的谱冗余, 可以从很大程度上去除背景噪声和其它具有不同周期频率的同带干扰的影响, 得到了信噪比的提高。对于噪声和干扰信号的相关特性不需要确切的了解, 从而避免了传统方法的一些限制。

3.5 均衡和干扰 / 串话抑制

自适应滤波器广泛应用于均衡时不变或慢变信道, LMS 型自适应算法收敛速度较慢, 当信道变化很快或衰落很深时, 不能满足要求。RLS 型自适应算法收敛速度较快, 但其数值稳定性有待提高。自适应滤波假定输入是平稳的, 未考虑信号的时变特性, 因而要进一步提高均衡性能, 需要进一步考虑信道的时变模型。

对输入信号按波特率抽样, 我们得到的是平稳信号, 但如果采用过抽样, 得到的是一个周期平稳信号^[17]。利用信号的周期平稳性, 可以克服 LMS 自适应算法收敛慢的不足, 实现对快衰落信道的均衡^[15-17]。在调制信号中, 若干扰和信号处于同一频带, 它们虽然从频谱上不能分开, 但利用它们不同的周期频率集 Φ , 仍能将它们区分开, 并且由于周期平稳信号的谱相关特性, 不仅能去除干扰, 而且可以利用谱相关, 用处于另一频带的干扰较小的信号, 来替代去除干扰过程中受影响的有效信号, 从而从总体上减小有效信号的失真。

以上对比常用的信号处理方法, 阐述了周期平稳信号处理在几个领域应用的优点: 可分类时间和频谱都重叠的信号; 仅由二阶(周期)统计特性即可辨识系统 / 信道; 对不同的输入信号可设计最佳的同步器; 时间域和空间域相结合估计信号到达方向; 实现对快衰落信道的均衡。另外它还应用于到达时间差(TDOA)估计与信号定位; 非线性系统 Volterra 核的辨识; 蜂窝小区(移动)通信的盲自适应天线阵列等。周期平稳信号处理在许多领域得到广泛应用, 值得进一步深入研究。

4 发展方向展望

周期平稳信号处理已在众多领域取得成效, 但它仍在不断发展之中, 有待于在理论上更深入, 并寻求更广泛的应用。在理论上它将向高阶周期平稳信号处理发展, 需要二阶和高阶谱相关函数的快速估计算法; 在应用上, 它与自适应滤波的结合, 用于移动通信系统是值得关注的研究方向。

4.1 高阶周期平稳信号处理

目前的研究主要集中于二阶周期平稳信号处理, 但许多实际信号, 其高阶统计特性呈现一定周期, 称之为高阶周期平稳信号。例如在日益复杂的同步系统中, 采用高阶非线性来产生谱线。要分析类似的问题, 有必要推广到高阶周期平稳信号处理。

4.2 谱相关函数的快速估计算法

尤其对于高阶周期平稳信号处理,它是基于信号的高阶统计特性的,计算量较大,更需要计算其谱相关函数的快速有效算法。

4.3 与自适应信号处理的结合

自适应信号处理已有效地用于均衡、回波抵消等。根据信号的周期平稳特性,周期地改变滤波器,构成周期时变自适应滤波,可以得到更小的均方误差,有效地应用于干扰抑制、最佳时变信号接收等。由于周期平稳信号具有谱相关性,即使干扰与信号处于同一频带,信号被严重干扰,但利用时变自适应滤波也可以以很小的误差恢复,而这一点利用时不变自适应滤波是达不到的。

4.4 在移动通信中的应用

在目前的 GSM 和 CDMA 数字蜂窝移动通信系统中, GSM 采用最小频移键控 (GMSK) 调制, CDMA 采用相对相移键控 (QPSK) 调制,这些数字调制信号都具有周期平稳性。移动通信具有恶劣而复杂的信道,各种衰落和码间干扰均存在。并且,移动用户的移动性有很大差异,既有低速步行用户,也有高速车载用户。因此,移动通信的信道可用线性时变模型表示,当车载用户车速很高时,信道变化很快,衰落很深。周期平稳信号处理利用数字调制信号的周期平稳性,使之相比于其它基于平稳信号模型的方法更适合快变、深衰落的信道。

5 结束语

本文对周期平稳信号处理的基本理论和方法,以及它在各领域中的应用作了概要总结,并对其新的发展和方向予以展望。周期平稳信号处理应用广泛而有效,值得深入研究。

参 考 文 献

- [1] Gardner W A. IEEE SP Magazine, 1991, 8(2): 14-36.
- [2] Gardner W A. IEEE Trans. on SP, 1991, SP-39(2): 424-430.
- [3] Gardner W A. IEEE Trans. on Commun., 1992, COM-40(1): 149-159.
- [4] Lslam M K, Hafez H M, Coll D C. Detection of multilpe users of direct sequence spread spectrum signal by cyclic spectral analysis, Proc. of the 43rd IEEE Veh. Technol. Conf. Secaucus, NJ, USA: May, 1993, P811-814.
- [5] Gardner W A, Spooner C M. IEEE Trans. on Commun., 1993, COM-40 (6): 905-916.
- [6] Gelli G, Lzzo L, Napolitano A, Paura L. Signal Processing, 1993, 31(5): 17-29.
- [7] Hatzinakos D. Blind system identification based on the complex cepstrum of the cyclic autocorrelation, ISCAS'1993, Chicago, IL, USA: Vol.1 P726-729.
- [8] Baceala L A, Roy S. IEEE SP Letters, 1994, 1(6): 89-91.
- [9] Elmirghanl J, Cryan R, Clayton M. Microwave Opt. Technol. Lett., 1992, 5(14): 739-742.
- [10] Elmirghanl J M H, Cryan R A. IEE Proc.-I, 1994, 141(6): 379-389.
- [11] Riba J, Vazquez G. Signal Processing, 1994, 40(1): P21-37.
- [12] Xu G, Kailath T. IEEE Trans. on SP, 1992, SP-40(7): 1775-1786.
- [13] Mauck K D. Wideband cyclic MUSIC, ICASSP'1993, Minneapolis. MN, USA: Vol.4 P288-291.
- [14] Schell S V. IEEE Trans. on SP, 1994, SP-42(11): 3043-3050.
- [15] Tong L, Xu G, Kailath T. IEEE Trans. on IT, 1994, IT-40(2): 340-349.

- [16] Tsatsanis M K, Giannakis G B. Blind equalization of rapidly fading channels via exploitation of cyclostationarity and higher-order statistics, ICASSP'1993, Minneapolis, MN, USA: Vol.4 P85-88.
- [17] Abdrahman M, Falconer D D. IEEE J. of Sel. Areas Commun., 1992, SAC-10(3): 640-649.

CYCLOSTATIONARY SIGNAL PROCESSING: THEORY AND APPLICATIONS

Li Lixia Wang Wenbo Wang Dejun

(*Beijing University of Posts and Telecommunications, Beijing 100088*)

Abstract Cyclostationary signal is an important class of non-stationary signal. Many signals and/or interferences show certain degree of cyclostationarity. Therefore, signal processors considering this property of the signal can obtain many performance advantages over conventional signal processors. This paper first reviews some fundamental conceptions and methods of cyclostationary signal processing theory, followed by a comparatively thorough summary of its applications. Finally, directions of future development and application are discussed.

Key words Signal processing, Cyclostationary, Cyclic autocorrelation, Spectral correlation density

李立霞：女，1969年生，博士生，现从事信号处理与子波变换及其应用的研究工作。

王文博：男，1965年生，副教授，现从事数字信号处理及其在通信中应用的研究和开发工作。

王德隽：男，1927年生，教授，长期从事滤波理论和数字信号处理及其在通信中的应用的研究工作。