第 20 卷 第 5 期
1998 年 9 月

电子科学学刊
JOURNAL OF ELECTRONICS

Vol.20 No.5
Sept. 1998

相对论效应对 GPS 单点定位精度的影响 [1]

张孟阳 吕保维 宋文淼

(中国科学院电子学研究所 北京 100080)

摘 要 本文研究地球惯性系中相对论效应对 GPS 单点定位精度的影响. 首先从太阳的各向同性 Schwarzschild 度规出发, 计入地球和月球的引力场的贡献, 求得地球惯性系中的度规系数 g_{00} . 然后估算广义和狭义相对论效应对 GPS 的原子钟频率、 GPS 卫星的运行轨道以及 GPS 导航信号传播的影响. 在此基础上计算地球、月球和太阳引力场引起的单点定位误差, 并分析误差各部分的来源和重要程度.

关键词 GPS, 地球惯性系, 相对论效应, 单点定位精度

中图号 TN967.1

1 引 言

GPS 是美国国防部研制的一种空基电子导航和定位系统. 利用空间卫星发播的导航信息, 此系统能为空中、陆上、海上的用户连续、实时地提供精确的三维位置、三维速度和时间信息. 利用双频接收机, GPS 的单点定位精度可以达到 10m 的量级, 相当于 30ns 的授时精度 [1] . 在如此高的精度之下, 广义和狭义相对论效应对时间尺度和物体运动的影响必须加以考虑. 对 GPS 来说, 相对论效应包括对系统原子钟频率、对 GPS 卫星的轨道以及对导航信号传播的影响等. 这些效应对 GPS 的定位精度会产生或多或少的影响. 本文将对这些相对论效应一一加以分析, 并估算由此引起的单点定位误差的量级.

2 地球惯性系中的度规系数

要考虑相对论性问题, 首先必须明确观测者所在的参照系. 对 GPS 来说, 其原子时系统 (即 GPS 卫星上的原子钟与地面跟踪站的原子钟组成的时间系统) 的时间同步问题是在地球惯性系中加以考虑的. 所谓地球惯性系, 就是在太阳引力场中的一条短程线 (这里即地球的运行轨道) 的邻域建立的局部惯性系 [2] . 为计算地球惯性系中的度规系数, 在其中建立坐标系统, 即 Fermi 正则坐标系 [2] . 首先确定坐标基矢, 在太阳引力场中取定一短程线 $G: \boldsymbol{P}(t) = (T(t), R(t), \Theta(t), \Phi(t))$, 在这里就是地球的运行轨道, 其中 t 为相对于地球静止的观察者观测到的时间, T, R, Θ, Φ 为地球在以太阳为原点的球坐标系中的四维坐标. 在 G 上建立一活动标架场 $[e_0, e_1, e_2, e_3]$, 满足要求

$$\boldsymbol{e}_\mu(t) \cdot \boldsymbol{e}_\nu(t) = \eta_{\mu\nu}, \quad \mu, \nu = 0, 1, 2, 3, \tag{1}$$

其中 $\eta_{\mu\nu}$ 为 Lorentz 平直度规 (采用 $\eta_{00} = -1$) , $e_0(t)$ 为地球的四维速度. 考虑到地球作平面运动, 可令 $\mathrm{d}\Theta(t)/\mathrm{d}t = 0$, 并且进一步设 $\Theta(t) = \pi/2$. 利用 (1) 式和太阳的各向同性

[1] 1996-08-09 收到, 1997-09-29 定稿
国家自然科学基金资助课题

Schwarzschild 度规 [3] :

$$\mathrm{d}s^2=-\frac{(1-\mu/(2R))^2}{(1+\mu/(2R))^2}(c\mathrm{d}t)^2+\left(1+\frac{\mu}{2R}\right)^4(\mathrm{d}R^2+R^2\mathrm{d}\Theta^2+R^2\sin^2\Theta\mathrm{d}\Phi^2), \tag{2}$$

其中 $\mu=M_sG/c^2$ ， M_s 为太阳质量， G 为引力常数， c 为光速。得到 G 上的活动标架场即 Fermi 坐标基矢为

$$\left.\begin{aligned}
e_0&=T'\frac{\partial}{\partial T}+R'\frac{\partial}{\partial R}+\Phi'\frac{\partial}{\partial\Phi},\\
e_1&=\frac{(1+\mu/(2R))^3R'}{(1-\mu/(2R))\sqrt{1+(1+\mu/(2R))^4R^2\Phi'^2}}\frac{\partial}{\partial T}+\frac{(1-\mu/(2R))\,T'}{(1+\mu/(2R))^3\sqrt{1+\left(1+\frac{\mu}{2R}\right)^4R^2\Phi'^2}}\frac{\partial}{\partial R},\\
e_2&=\frac{1}{R\,(1+\mu/(2R))^2}\frac{\partial}{\partial\Theta},\\
e_3&=\frac{(1+\mu/(2R))^2RT'\Phi'}{\sqrt{1+(1+\mu/(2R))^4R^2\Phi'^2}}\frac{\partial}{\partial T}+\frac{(1+\mu/(2R))^2RR'\Phi'}{\sqrt{1+(1+\mu/(2R))^4R^2\Phi'^2}}\frac{\partial}{\partial R}\\
&\quad+\frac{\sqrt{1+(1+\mu/(2R))^4R^2\Phi'^2}}{(1+\mu/(2R))^2R}\frac{\partial}{\partial\Phi},
\end{aligned}\right\} \tag{3}$$

式中撇号表示对 t 的导数。设在短程线 G 近旁的点 P 的 Fermi 正则坐标为 (t,x_1,x_2,x_3) ， x_1,x_2,x_3 分别为 P 点到短程线 G 的距离在 e_1,e_2,e_3 方向上的投影，它们都是小量。于是 Fermi 正则坐标系中的度规系数可由下列 Taylor 级数给出 [2] :

$$\left.\begin{aligned}
g_{00}&=-1+\textstyle\sum_{l,m=1}^3R_{0l0m}|_Gx^lx^m+\cdots;\\
g_{0i}&=\frac{2}{3}\textstyle\sum_{l,m=1}^3R_{0lim}|_Gx^lx^m+\cdots, \qquad i=1,2,3;\\
g_{ij}&=\delta_{ij}+\frac{1}{3}\textstyle\sum_{l,m=1}^3R_{iljm}|_Gx^lx^m+\cdots, \qquad i,j=1,2,3;
\end{aligned}\right\} \tag{4}$$

其中 $R_{\alpha\beta\gamma\delta}$ 是 Fermi 正则坐标系中的 Riemann 曲率张量的分量，它们可由下列熟知的张量变换公式求得

$$R_{\alpha\beta\gamma\delta}=\sum_{\mu',\nu',\sigma',\tau'=0}^{3}R_{\mu'\nu'\sigma'\tau'}(e_\alpha)^{\mu'}(e_\beta)^{\nu'}(e_\gamma)^{\sigma'}(e_\delta)^{\tau'}, \tag{5}$$

其中 $R_{\mu'\nu'\sigma'\tau'}$ 是太阳的球坐标系中的 Riemann 曲率张量的分量，可利用 Cartan 活动标架法和外微分形式 [3] 从 (2) 式的各向同性度规求得

$$\left.\begin{aligned}
R_{0'1'0'1'}&=\frac{8\mu(2R-\mu)^2}{R(2R+\mu)^4}, & R_{0'2'0'2'}&=-\frac{4\mu R(2R-\mu)^2}{(2R+\mu)^4},\\
R_{0'3'0'3'}&=-\frac{4\mu R(2R-\mu)^2}{(2R+\mu)^4}\sin^2\Theta, & R_{1'2'1'2'}&=\frac{\mu(2R+\mu)^2}{4R^3},\\
R_{2'3'2'3'}&=-\frac{\mu(2R+\mu)^2}{2R}\sin^2\Theta, & R_{3'1'3'1'}&=\frac{\mu(2R+\mu)^2}{4R^3}\sin^2\Theta.
\end{aligned}\right\} \tag{6}$$

根据 (5) 式和 (3) 式，结果保留到 $\mu V^2r^2/R^3$ 的量级， V 是地球的运行速度， $V^2\sim\mu/R$ ，$r=\sqrt{x_1^2+x_2^2+x_3^2}$ 是卫星到地球中心的距离。得到 Fermi 正则坐标系中的曲率分量为

$$\left.\begin{aligned}
&R_{0101}=\frac{2\mu}{R^3}-\frac{6\mu^2}{R^4}+\frac{3\mu}{R^3}V^2-\frac{3\mu}{R^3}V_R^2, && R_{0202}=-\frac{\mu}{R^3}+\frac{3\mu^2}{R^4}-\frac{3\mu}{R^3}V^2+\frac{3\mu}{R^3}V_R^2,\\
&R_{0303}=-\frac{\mu}{R^3}+\frac{3\mu^2}{R^4}, && R_{1212}=\frac{\mu}{R^3}-\frac{3\mu^2}{R^4},\\
&R_{2323}=-\frac{2\mu}{R^3}+\frac{6\mu^2}{R^4}-\frac{3\mu}{R^3}V^2+\frac{3\mu}{R^3}V_R^2, && R_{3131}=\frac{\mu}{R^3}-\frac{3\mu^2}{R^4}+\frac{3\mu}{R^3}V^2-\frac{3\mu}{R^3}V_R^2.
\end{aligned}\right\}\tag{7}$$

由 (4) 式就可得到地球惯性系中的度规系数。前面只考虑了太阳的引力场，如果计入地球本身和月球的引力场的影响，度规系数中必须加上与地球和月球的引力场有关的项，由此得到的度规系数 g_{00} 为

$$\begin{aligned}
g_{00}=\ &-1+\left(\frac{2\mu}{R^3}-\frac{6\mu^2}{R^4}+\frac{3\mu}{R^3}V^2-\frac{3\mu}{R^3}V_R^2\right)x_1^2+\left(-\frac{\mu}{R^3}+\frac{3\mu^2}{R^4}-\frac{3\mu}{R^3}V^2+\frac{3\mu}{R^3}V_R^2\right)x_2^2\\
&+\left(-\frac{\mu}{R^3}+\frac{3\mu^2}{R^4}\right)x_3^2+\frac{2\mu_e}{r}+\frac{2\mu_m}{|\boldsymbol{R}-\boldsymbol{R}_m|}-\frac{2\mu_m\boldsymbol{r}\cdot(\boldsymbol{R}-\boldsymbol{R}_m)}{|\boldsymbol{R}-\boldsymbol{R}_m|^3},
\end{aligned}\tag{8}$$

其中 V_R 代表地球的径向速度， $\mu_e=GM_e/c^2$ ， $\mu_m=GM_m/c^2$ ， M_e,M_m 分别为地球和月球的质量， $\boldsymbol{R},\boldsymbol{R}_m$ 分别为太阳到地球和月球的位置矢量。

3 相对论效应对定位精度的影响

3.1 原子钟频率偏移引起的定位误差

根据广义相对论原理，处于不同引力场处的时钟走的快慢也不同[4]。对 GPS 来说，卫星钟频与用户或监控站的钟频差别为

$$\frac{\Delta f}{f_u}=\frac{f_s-f_u}{f_u}=\left[\frac{g_{00}(r)}{g_{00}(r_e)}\right]^{1/2}-1,\tag{9}$$

其中 f_s，f_u 分别表示在地球惯性系中测量的卫星钟频和 GPS 用户或监控站的钟频， r_e 是地球半径。根据狭义相对论的时间膨胀理论，也可以得到

$$\frac{\Delta f}{f_u}\approx-\frac{v_s^2}{2c^2},\tag{10}$$

其中 v_s 是卫星的速度。将狭义相对论和广义相对论效应综合起来，得

$$\begin{aligned}
\frac{\Delta f}{f_u}=\ &\left[\frac{g_{00}(r)}{g_{00}(r_e)}\right]^{1/2}-1-\frac{v_s^2}{2c^2}\\
=\ &-\frac{v_s^2}{2c^2}+[U(r_e)-U(r)]+\frac{\mu_m(\boldsymbol{R}-\boldsymbol{R}_m)}{|\boldsymbol{R}-\boldsymbol{R}_m|^3}\cdot(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_e)\\
&+\left(\frac{\mu}{R^3}-\frac{3\mu^2}{R^4}+\frac{3\mu}{2R^3}V^2-\frac{3\mu}{2R^3}V_R^2\right)(x_{u1}^2-x_1^2)\\
&+\left(-\frac{\mu}{2R^3}+\frac{3\mu^2}{2R^4}-\frac{3\mu}{2R^4}V^2+\frac{3\mu}{2R^3}V_R^2\right)(x_{u2}^2-x_2^2)\\
&+\left(-\frac{\mu}{2R^3}+\frac{3\mu^2}{2R^4}\right)(x_{u3}^2-x_3^2),
\end{aligned}\tag{11}$$

其中考虑到地球是一个扁球体，我们已经用地球的多极引力势 $U(r,\phi,\lambda)$[5] 代替了牛顿势:

$$U(r,\phi,\lambda)=\frac{\mu_e}{r}\left\{1-\sum_{n=2}^{\infty}(\frac{r_e}{r})^n\left[J_nP_n(\sin\phi)-\sum_{m=1}^{n}J_{nm}P_{nm}(\sin\phi)\cos m(\lambda-\lambda_{nm})\right]\right\},\quad(12)$$

这里 λ,ϕ 分别为地心经度、纬度， P_n,P_{nm} 是 Legendre 多项式， J_n,J_{nm} 为系数。利用卫星的轨道方程式 [5] :

$$r=a(1-e\cos E),\quad(13)$$

$$\frac{v_s^2}{2}=\frac{\mu_e}{r}-\frac{\mu_e}{2a},\quad(14)$$

其中 a,e 分别为卫星轨道的半长轴和偏心率， E 为偏近点角. 对 (11) 式积分，可求得在 t 时间内相对论效应引起的时间误差为

$$\begin{aligned}\Delta t=&\int_0^t\frac{\Delta f}{f_u}\mathrm{d}t\\ \approx&\underbrace{\mu_e\left(\frac{1}{r_e}-\frac{3}{2a}\right)t}_{\Delta t_1}\underbrace{-\frac{2\sqrt{aGM_e}}{c^2}e\sin E}_{\Delta t_2}\underbrace{-\mu_eJ_2\left[\frac{1}{r_e}P_2(\sin\phi_u)-\int_0^t\frac{r_e^2}{r^3}P_2(\sin\phi_s)\mathrm{d}t\right]}_{\Delta t_3}\\ &+\underbrace{\frac{\mu_m(\boldsymbol{R}-\boldsymbol{R}_m)}{|\boldsymbol{R}-\boldsymbol{R}_m|^3}\cdot\int_0^t(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_e)\mathrm{d}t}_{\Delta t_4}+\underbrace{\left(\frac{\mu}{2R^3}-\frac{3\mu^2}{2R^4}\right)\int_0^t(3x_{u1}^2-3x_1^2-r_e^2+r^2)\mathrm{d}t}_{\Delta t_5}.\end{aligned}\quad(15)$$

我们把时间误差分成 5 部分加以讨论，分别估算其数量级，以及相对应的伪距误差和单点定位误差. 伪距误差可如下计算:

$$m_r=c\Delta t,\quad(16)$$

由此引起的单点定位误差为 [1]

$$m_p=\mathrm{PDOP}\times m_r,\quad(17)$$

其中 PDOP 是几何精度因子，与所选择的卫星的几何分布有关，其值在 1 到 6 之间的可能性最大 [1] ，本文取 PDOP= 6 。 (15) 式中 Δt_1 部分是地球的牛顿引力势引起的时间误差，是所有各项中影响最大的，一天中可累积达到 38.4μs ，相当于 11.5km 的伪距误差， 69km 的单点定位误差，由于 Δt_1 部分使卫星钟频增大一个常量 0.00455Hz ，因此可调整卫星钟频消去它。 Δt_2 部分是由卫星轨道的偏心率 e (约为 0.02) 造成的，它随时间变化，但不积累，最大可达到 45.8ns ，相当于 13.7m 的伪距误差， 82.3m 的单点定位误差。 Δt_3 部分是地球多极引力势中二阶项引起的时间误差 ($J_2=1.083\times10^{-3}$) ，估计其上界，一天中可累计达到 64ns ，相当于 19.2m 的伪距误差， 115m 的单点定位误差，地球多极势中三阶以上项造成的误差比二阶项造成的误差小三个数量级 ($J_3\sim10^{-6}$) ，仅可造成分米量级的定位误差。 Δt_4 是月球引力场引起的时间误差，粗略估计其一天中将累积达到 0.65ns ，相当于 0.2m 的伪距误差， 1.2m 的单点定位误差。 Δt_5 是太阳引力场造成的时间误差，一天大约累积为 1.3×10^{-2}ns ，相当于 3.8mm 的伪距误差， 1cm 的单点定位误差。太阳、地球和月球之间的相互作用引起的定位误差非常小，不可能反应出来，故本文没有考虑。

3.2　卫星近地点前移引起的定位误差

广义相对论效应对 GPS 卫星的运行轨道也有影响，进而影响卫星星历和定位精度．这里只需考虑地球的 Schwarzschild 场，可以得到卫星每绕地球转动一周 (大约 12h) 其近地点的前移数值为 [4]

$$\Delta E = \frac{6\pi\mu_e}{a(1-e^2)}. \tag{18}$$

可以从 GPS 的基本定位原理来推导卫星的近地点前移等效的伪距误差。对下面的基本定位关系式 [1] 变分：

$$r_p = \left[\sum_{i=1}^{3}(x_i - x_{ui})^2\right]^{1/2} + b - c\Delta t_s, \tag{19}$$

其中 r_p 表示测得的卫星到用户的伪距， b 为用户时钟偏差 ($\times c$)， Δt_s 为卫星钟差．得到

$$\delta r_p - \frac{\sum_{i=1}^{3}(x_i - x_{ui})}{\left[\sum_{i=1}^{3}(x_i - x_{ui})^2\right]^{1/2}}\delta x_i = -\frac{\sum_{i=1}^{3}(x_i - x_{ui})}{\left[\sum_{i=1}^{3}(x_i - x_{ui})^2\right]^{1/2}}\delta x_{ui} + \delta b - c\delta\Delta t_s. \tag{20}$$

从 (20) 式左边可以看出，卫星近地点前移等效的伪距误差大约为

$$m_r = r\Delta E \approx \frac{6\pi\mu_e}{1-e^2}. \tag{21}$$

卫星每绕地球转动一周造成的等效伪距误差约为 0.08m ，单点定位误差为 0.5m 。

3.3　导航信号传播延迟引起的定位误差

根据广义相对论原理，由于受太阳引力的影响， GPS 信号在从卫星到地球表面的传播过程中会产生时间延迟和方向偏折．时间延迟的一个典型值 [4] 对应的伪距误差为

$$\Delta r_p = 4\mu \ln\frac{R_s + \sqrt{R_s^2 - r_0^2}}{r_0} + 2\mu\left(\frac{R_s - r_0}{R_s + r_0}\right)^{1/2}, \tag{22}$$

其中 R_s 是卫星到太阳的距离， r_0 是太阳到信号传播路径的最短距离．粗略计算

$$r_0 = R_s\cos\frac{r - r_e}{2R_s} \approx R_s\left[1 - \frac{(r - r_e)^2}{8R_s^2}\right], \tag{23}$$

$$\Delta r_p \approx \frac{5\mu(r - r_e)}{2R_s}. \tag{24}$$

伪距误差大约为 1m ，单点定位误差为 6m 。

信号从卫星到地球表面的方向偏折为

$$\Delta\phi = \frac{4\mu}{r_0}. \tag{25}$$

大约为 $8\times10^{-3}('')$ ，可以忽略。

4　结　论

本文详细讨论了广义和狭义相对论效应对 GPS 的时间系统、卫星运行轨道和导航信号传播的影响，以及由此引起的单点定位误差．从第 3 节的估算可以看出，相对论效应中对

GPS 的定位精度影响最大的因素是地球的牛顿引力势和卫星的运动速度 (Δt_1)，它在一天中累积达到几十千米的量级，所幸的是它可以轻易得到消除。卫星轨道的偏心率和地球多极引力势中的二阶项对定位精度的影响 (Δt_2 和 Δt_3) 也可在短时间内达到几十米的量级，必须加以考虑。地球多极势中三阶以上项、太阳和月球 (Δt_4 和 Δt_5) 的引力场以及相对论效应造成的卫星轨道近地点前移、GPS 信号的传播延迟等对定位精度的影响在 0.1m 到 1m 的量级，在目前的系统精度 (~10m) 下它们的影响不大，但是如果将来对 GPS 的定位精度要求更高的话，这几项的影响必须认真加以考虑。至于其它的一些效应，如地球自转的影响等，由于非常小，可以忽略不计。

参 考 文 献

[1] 周忠谟，易杰军． GPS 卫星测量原理与应用．北京：测绘出版社， 1992 年，第六章．

[2] Manasse F K, Misner C W. Fermi normal coordinates and some basic concepts in differential geometry. Journal of Mathematical Physics, 1963, 4(6): 735-745.

[3] Misner C W, Thorne K S, Wheeler J A. Gravitation. San Fransisco: W. H. Freeman and Company, 1973, Part III, Chapter 14.

[4] Weinberg S. Gravitation and Cosmology, Principles and Applications of the General Theory of Relativity. New York: John Wiley, 1972, Chapter 8.

[5] 章仁为．静止卫星的轨道和姿态控制．北京：科学出版社， 1987 年，第二章．

RELATIVISTIC EFFECTS ON POINT-POSITIONING PRECISION IN THE GPS

Zhang Mengyang Lu Baowei Song Wenmiao

(*Institute of Electronics, Academia Sinica, Beijing* 100080)

Abstract The relativistic effects on point-positioning precision in the GPS are studied with reference to an earth centered inertial coordinate system. First, the metric coefficient g_{00} in the earth centered inertial system is obtained from the sun's Schwarzschild isotropic metric, with the gravitation of the earth and the moon taken into account. Then the general and special relativistic effects on the GPS atomic frequency standards, the GPS satellites' orbits and the propagation of the GPS navigation signals are estimated, based on which the point-positioning errors caused by the gravitation of the earth, the moon and the sun are evaluated, and the sources and importance of each components of the errors are analysed.

Key words GPS, Earth centered inertial system, Relativistic effects, Point-positioning precision

张孟阳： 男， 1967 年生，博士生，现主要从事 GPS 理论和应用，以及电磁散射和逆散射理论的研究．

吕保维： 男， 1916 年生，研究员，中科院院士，博士生导师，现主要从事 GPS 理论、电磁理论和宇宙学的研究．

宋文淼： 男， 1938 年生，研究员，博士生导师，现主要从事电磁理论的研究．