

# 总变分图像复原方程的离散化方法<sup>1</sup>

邹谋炎 刘小军

(中国科学院电子学研究所 北京 100080)

**摘 要** 基于总变分的图像重建和复原导致一类最小化问题, 它归结为解一个非线性椭圆型偏微分方程。为了得到数值解, 必须将问题线性化和离散化。C. R. Vogel 和 M. E. Oman 等人 (1996) 的定点迭代是一个良好的线性化方法, 然而文献中已报道的离散化方法需要微分方程数值解的工具, 比较繁杂。该文提出一种新的离散化方法, 它只需要图像处理中的常规技术。图像反降晰和噪声抑制的实验结果表明该文的结果不亚于文献中报道的结果。

**关键词** 恢复, 重建, 总变分, 定点迭代

**中图分类号** TN911.73

## 1 引 言

总变分最小化方法作为一种非线性规整化方法具有良好的棱边保持特性, 因而得到广泛关注, 被认为是一种对噪声抑制、图像重建和复原有前景的方法。L. Rudin 等人观察到带噪图像的总变分远大于无噪图像的总变分<sup>[1,2]</sup>。他们提出了一种总变分最小化的图像降噪方法。近年来, 人们发展了多种基于总变分的图像重建算法<sup>[3-8]</sup>。我们知道, 基于总变分的图像重建和复原导致一类最小化问题, 它归结为解一个非线性椭圆型偏微分方程。为了得到数值解, 必须将问题线性化和离散化。报道的方法中, 有代表性的线性化方法是 C. R. Vogel 和 M. E. Oman 提出的定点迭代法<sup>[5]</sup>。为了离散化定点迭代方程, 他们提出了有限差分多栅离散化方案 (Cell-Centered Finite Difference, CCFD)<sup>[6]</sup>。他们证实定点迭代算法收敛快, 结果稳健。为了了解 CCFD 方法, 读者必须熟悉微分方程数值解的理论。利用该法建立代数方程绝非简单的事情。我们在研究中发现, 定点迭代方程的离散化有更简单的方法, 只需要图像处理中的常规的技术。因此, 基于总变分的图像重建和复原算法能够更简单地实行。本文将介绍这种方法并以实例验证算法的有效性。

假定图像的降质模型为

$$g = Ku + \xi \quad (1)$$

其中  $g$  是观察图像,  $K$  是降质因子,  $\xi$  是噪声,  $u$  是要恢复的原始图像。基于总变分的图像复原可以归结为最小化问题:

$$\min_u J_T(u) \text{ 服从于 } \|Ku - g\|^2 = \|\xi\|^2 \quad (2)$$

其中

$$J_T(u) = \int_{D_u} \sqrt{\|\nabla u\|^2 + \beta^2} dx dy = \int_{D_u} \sqrt{u_x^2 + u_y^2 + \beta^2} dx dy \quad (3)$$

$u_x = \partial u / \partial x$ ,  $u_y = \partial u / \partial y$ ,  $D_u$  是  $u$  的支持域。  $\beta$  是一个常数, 它可以避免  $J_T(u)$  在  $u_x = u_y = 0$  处不可微。利用拉格朗日乘法, 最小化 (2) 式等价于最小化下面的式子:

$$J(u) = (1/2)\|Ku - g\|^2 + \alpha J_T(u) \quad (4)$$

<sup>1</sup> 2000-01-21 收到, 2000-09-14 定稿  
国家自然科学基金支持 (批准号 69672001)

其中  $\alpha$  是 (2) 式中拉格朗日乘子的倒数。作为规整参数, 它的取值应保证等式约束  $\|Ku - g\|^2 = \|\xi\|^2$  得到满足。用  $T(u) = \nabla J(u)$  表示  $J(u)$  的梯度。最小化 (4) 式导致一个 Euler-Lagrange 方程, 连同 van Neumann 边界条件可以表示为

$$T(u) = K^*(Ku - g) + \alpha L(u)u = 0, \quad x \in D_u \quad (5a)$$

$$\partial u / \partial n = 0, \quad x \in \partial D_u \quad (5b)$$

式中的  $K^*$  是  $K$  的伴随算子,  $x = [x \ y]^T$ 。  $L(u)$  是一个微分算子, 它作用于函数  $w$  定义为

$$L(u)w = -\nabla \cdot \left[ \nabla w / \sqrt{|\nabla u|^2 + \beta^2} \right] \quad (6)$$

其中  $\nabla \cdot f$  是向量  $f$  的散度。如果  $f$  是二维向量,  $f = [f_x \ f_y]^T$ ,  $\nabla \cdot f = \partial f_x / \partial x + \partial f_y / \partial y$ , 于是有

$$L(u)u = -\frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{u_x}{\sqrt{u_x^2 + u_y^2 + \beta^2}} \right] - \frac{\partial}{\partial y} \left[ \frac{u_y}{\sqrt{u_x^2 + u_y^2 + \beta^2}} \right] \quad (7)$$

采用 Vogel 等 [6] 提出的定点迭代法求解, (5a) 式可以表示为

$$(K^*K + \alpha L(u^m))u^{m+1} = K^*g, \quad m = 0, 1, \dots \quad (8)$$

这样, 非线性扩散方程 (5a) 式被线性化, 它的求解要简单得多。Vogel 等在文献 [6] 中探讨了迭代算法的全局收敛性和收敛速度。收敛速度跟离散化的电平和规整参数  $\alpha$  的选取有关。我们在实验中也注意到了这个事实。

由于  $L(\cdot)$  是一个椭圆型的差分算子, (8) 式连同边界条件 (5b) 式的离散化是非平凡的。在文献 [6] 中, Vogel 等提出了有限差分多栅离散化方法。本文提出一种不同的离散化方法。我们的方法更简单, 只需要图像处理的常规技术。本文第 2 节介绍我们的离散化方法; 第 3 节介绍算法实施和结果。

## 2 新的离散化方法

算子  $K$  的离散化版本是由降晰函数或点扩展函数 (PSF) 生成的非周期卷积核矩阵。降晰函数记为  $h$ , 并假设它是空间不变的。本文我们采用 Zou Mou-yan(邹谋炎) 和 R. Unbenhauen 提出的非周期反卷积模型 [9]。问题的关键就是要解决  $L(u^m)u^{m+1}$  的离散化问题。

我们来考察下面的式子:

$$L(u^m)u = -\nabla \cdot \left[ \nabla u / \sqrt{|\nabla u^m|^2 + \beta^2} \right] \quad (9)$$

$\nabla u$  是  $u$  的梯度, 对  $\nabla u$  的离散化近似导致矩阵-矢量表达  $Du$ , 这里的  $D$  是由一阶差分算子生成的卷积矩阵,  $u$  是  $u$  的矢量表达。(9) 式括号中的项是梯度除以一个数值, 因而  $L(u^m)u$  的离散化版本应该有形式:

$$L(u^m)u \Leftrightarrow D^T Q_m^{-1} Du \quad (10)$$

其中  $Q_m$  是一个对角矩阵, 它的元可以用数值差分的方法计算,

$$Q_m(k, k) = \sqrt{(u^m(i, j) - u^m(i-1, j))^2 + (u^m(i, j) - u^m(i, j-1))^2 + \beta^2}, \\ k = (i-1)n_y + j, \quad i = 1, 2, \dots, n_x, \quad j = 1, 2, \dots, n_y \quad (11)$$

这里我们假定图像  $u$  的大小是  $n_x \times n_y$ 。注意 (10) 式正是 Vogel 和 Oman 文献 [6] 中的 (37) 式。我们的问题就是如何确定一阶差分卷积矩阵  $D$ 。

假定  $u$  是常值图像 (这仅仅用于推理), 我们有  $Q_m(k, k) = \beta, \forall k$ 。在这种情况下, 可以得到

$$L(u^m)u = -(1/\beta)\nabla \cdot \nabla u = -(1/\beta)\Delta u \Leftrightarrow -(1/\beta)Cu \tag{12}$$

其中  $\Delta$  是拉普拉斯差分算子,  $u$  是  $u$  的向量表达。  $\Delta u$  对应于图像  $u$  和算子  $c$  的卷积,

$$c = \frac{1}{8} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \tag{13}$$

$C$  是由  $c$  生成的卷积核矩阵。(10) 式和 (12) 式应该是一致的, 因此我们有

$$D^T D = -C \tag{14}$$

注意  $D$  和  $C$  都是卷积核矩阵。仔细思考我们发现决定  $D$  存在困难。事实上, 无论  $C$  是由  $c$  生成的块循环矩阵或非周期卷积核矩阵, 它都是不对称的。然而, (14) 式又要求  $C$  是对称的。显然, 一种合理的离散化方法是修改  $D$  和  $C$  使 (14) 式近似得到满足。这个问题缺乏数学上的严格解。下面我们给出它的一个合理的近似解。

我们来考察  $z = u * c$ 。如果图像  $u$  的大小是  $n_x \times n_y$ ,  $z$  的大小应该是  $(n_x + 2) \times (n_y + 2)$ 。我们把图像  $z$  的四条最外边缘删去, 得到的结果记为  $\hat{z}$ , 那末  $\hat{z}$  的尺寸是  $n_x \times n_y$ 。显然,  $\hat{z}$  是  $z$  的一个很好的近似。用矩阵向量的形式表示,  $\hat{z}$  可记为  $\hat{z} = \hat{C}u$ , 其中  $\hat{C}$  有  $n_x$  行和  $n_x$  列。利用 (13) 式不难证明,  $\hat{C}$  可以具体地表达为

$$\hat{C} = \frac{1}{8} \begin{bmatrix} C_0 & I_{n_y} & & & \\ I_{n_y} & C_0 & I_{n_y} & & \\ & I_{n_y} & C_0 & I_{n_y} & \\ & & I_{n_y} & \ddots & \ddots \\ & & & \ddots & \ddots & I_{n_y} \\ & & & & I_{n_y} & C_0 \end{bmatrix} \tag{15}$$

其中  $I_{n_y}$  是  $n_y \times n_y$  的单位矩阵, 而

$$C_0 = \begin{bmatrix} -4 & 1 & & & \\ 1 & -4 & 1 & & \\ & 1 & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & 1 \\ & & & 1 & -4 \end{bmatrix} \tag{16}$$

$C_0$  的大小是  $n_y \times n_y$ 。我们称  $\hat{C}$  是  $c$  的紧缩卷积核矩阵 (SCKM, Shrunken Convolution Kernel Matrix)。事实上,  $\hat{C}$  可以从  $c$  的非周期卷积核矩阵删除那些只含有 1 的行得到。显然, 对于恢复问题,  $C$  可以由  $\hat{C}$  代替。因此, (14) 式可以由下式代替

$$D^T D = -\hat{C} \tag{17}$$

这样,  $\hat{C}$  是对称的,  $D$  的确定就变得合理。不要忘记  $D$  是一个卷积核矩阵。形如 (17) 式的卷积核矩阵的求解问题还没有现成的技术。假定  $d$  是一个离散型的一阶差分算子, 它有下面的形式

$$\mathbf{d} = \begin{bmatrix} -a & b & 0 \\ b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (18)$$

其中  $a$  和  $b$  是需要确定的常数。考虑卷积  $w = u * d$ ， $w$  的大小应当是  $(n_x + 2) \times (n_y + 2)$ 。我们删去  $w$  的四条最外边，结果记为  $\hat{w}$ ，它的大小是  $n_x \times n_y$ 。图像  $\hat{w}$  显然是  $w$  的一个很好的近似。用矩阵的形式表示， $\hat{w} = \hat{D}u$ ，其中  $\hat{D}$  有  $n_x$  行和  $n_y$  列，容易证明它有如下形式：

$$\hat{D} = \begin{bmatrix} D_0 & & & & \\ D_1 & D_0 & & & \\ & & D_1 & \ddots & \\ & & & \ddots & D_0 \end{bmatrix} \quad (19)$$

$D_1 = bI_{n_y}$ ，以及

$$D_0 = \begin{bmatrix} -a & & & & & & & & \\ b & -a & & & & & & & \\ & b & & & & & & & \\ & & \ddots & \ddots & & & & & \\ & & & & b & -a & & & \\ & & & & & & & & \end{bmatrix}_{n_y \times n_y} \quad (20)$$

根据 (17) 式， $D$  的合理解可以由最小化问题：

$$\min_{a,b} \|\hat{D}^T \hat{D} + \hat{C}\|_F^2 \quad (21)$$

来得到，其中  $\|\bullet\|_F$  代表 Frobenius 范数。根据  $\hat{D}$  和  $\hat{C}$  的特别结构不难证明，最小化问题 (21) 式可以简化为最小化下列价格函数：

$$f(a,b) = 64(a^2 + 2b^2 - 1/2)^2 + 224(1/8 - ab)^2 + 98b^4 \quad (22)$$

这个价格函数是非凸的并且不止一个极值点。限定  $0 \leq a, b \leq 2$ ，使用全局优化方法<sup>[12]</sup>求得全局最优解是  $a=0.665$  和  $b=0.1755$ 。由于  $\hat{D}^T \hat{D} \cong -\hat{C}$ ，显然 (10) 式可以由式  $L(u^m)u \Leftrightarrow \hat{D}^T Q_m^{-1} \hat{D}u$  的离散化形式近似代替。因此，(8) 式定点迭代法的离散近似形式为

$$[F^T F + \alpha \hat{D}^T Q_m^{-1} \hat{D}]u^{m+1} = F^T g, \quad m = 0, 1, \dots \quad (23)$$

其中  $F$  是降晰函数生成的非周期卷积核矩阵， $g$  是  $g$  的矢量形式。需要说明的是，在推导离散化近似过程中，我们没有处理边界条件 (5b) 式。这个条件是限定解在边界法向的梯度是零。如果观测图像有有限支持域，利用有限支持域作为限制，就自动保证解满足边界条件。在一般情况下，如果不能保证解在边界法向的梯度是零，就会出现误差。不过，边界截断引起反卷积误差是图像复原领域中的普遍性问题，不能认为是本文方法才有的缺点。

### 3 算法实现和计算例子

容易验证  $\hat{D}^T \hat{D}$  是非奇异的， $Q_m^{-1}$  的存在表明  $\hat{D}^T Q_m^{-1} \hat{D}$  是非奇异和正定的。因而， $\alpha \hat{D}^T Q_m^{-1} \hat{D}$  作为原来病态方程的一个规整化项是合理的。矩阵  $\alpha \hat{D}^T Q_m^{-1} \hat{D}$  有三对角块的形式，每个块的大小是  $n_x \times n_x$ ，主对角块是三对角矩阵，而次对角块是二对角矩阵。

可以采用预定条件共轭梯度法 (PCG) 来解方程 (23) 式, 其中一种做法可以参考文献 [6], 但我们发现, 使用简单的共轭梯度法也能很快收敛. 需要确定参数  $\alpha$  以使等式约束  $\|Ku - g\|^2 = \|\xi\|^2$  成立. 原则上说, 用一维搜索的方法可以寻找最佳值, 但那样的工作量太大. 许多研究者发现恢复结果对参数  $\alpha$  的值并不敏感. 因此  $\alpha$  的值可以通过简单方法近似地确定. 我们在实验中取  $\alpha$  的值为观测图像信噪比的倒数, 结果比较好. 还有另一种可选择的方法如下: (21) 式可以近似为

$$\left[ B^T B + \frac{\alpha}{q} A^T A \right] u = B^T g \quad (24)$$

仿效 Charalambous 等人的推导 [11],  $\alpha$  的值可以通过求下式的零点值来确定.

$$\varphi(\lambda) = \frac{1}{4n_x n_y} \sum_{\mu=0}^{2n_x-1} \sum_{\nu=0}^{2n_y-1} \left[ \frac{|D(\mu, \nu)|^2 |G(\mu, \nu)|}{\lambda |H(\mu, \nu)|^2 + |D(\mu, \nu)|^2} \right]^2 - \|\xi\|^2 \quad (25)$$

其中  $G(\mu, \nu)$  是  $g$  的傅氏变换, 傅氏变换尺寸为  $2n_x \times 2n_y$ . 若  $\varphi(\lambda) = 0$ , 则  $\alpha$  的最佳值为  $\alpha = q/\lambda$ . 由于  $\varphi(\lambda)$  的第一部分是  $\lambda$  的单调降函数,  $\varphi(\lambda)$  只有一个零点. 利用一维搜索容易求得最佳的  $\alpha$  值.

**例 1** 图 1(a) 是原始图像 (同文献 [6], 图 1(a) 1(c), 1(d) 采用反灰度级显示). 图像的大小是  $320 \times 320$ , 散焦降晰算子的直径为 50, 如图 1(b) 所示. 在降晰图像上叠加了均匀分布噪声使得  $\text{SNR}=30\text{dB}$ . 降质后的图像如图 1(c) 所示. 读者需注意, 由于散焦降晰函数的尺寸很大, 用常规的图像复原技术 (如 Weiner 滤波、空间自适应规整化、最大熵等等) 不大可能获得可接受的复原效果. 使用本文方法时, 我们取  $\beta=0.01\max(Q'_m)$ , 其中

$$Q'_m(i, j) = \sqrt{(u^m(i, j) - u^m(i-1, j))^2 + (u^m(i, j) - u^m(i, j-1))^2}$$

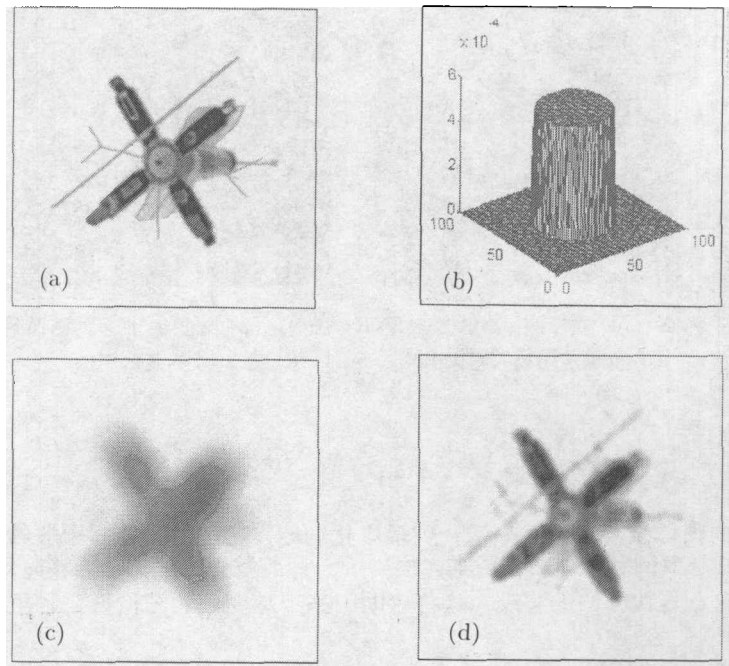


图 1 (a) 原始图像 (b) 散焦图像 (c) 降质图像 (d) 恢复图像

规整参数  $\alpha$  通过对观测图像信噪比 SNR 的估计得到, 取  $\alpha=5/\text{SNR}$ 。用共轭梯度法解 (24) 式。每次定点迭代进行 30 次循环。三次定点迭代后 (即  $m=0, 1, 2$ ), 达到收敛。恢复的图像如图 1(d) 所示。读者不妨将这个结果与文献 [6] 公布的结果相比较。

**例 2** 图像降噪问题。定点迭代方程式 (21) 变为

$$\left[ I + \alpha \hat{D}^T Q_m^{-1} \hat{D} \right] u^{m+1} = g, \quad m = 0, 1, \dots \quad (26)$$

采用共轭梯度法 (没有预定条件) 解 (26) 式。我们简单地取  $\alpha = \max(Q'_m)$ 。实验中我们发现噪声的低频部分对恢复结果影响很大, 为了减少这一影响, 我们采用下面的方法修正  $Q_m^{-1}$ ,

$$Q_m^{-1}(k, k) = \begin{cases} (Q_m(k, k))^{-1} Q_m(k, k) > 0.1 \max Q_m \\ (0.1 \max Q_m)^{-1} \end{cases} \quad (27)$$

图 2(a) 和 2(c) 是两幅叠加了均匀噪声的图像, 信噪比分别是 10dB 和 5dB。恢复的图像如图 2(b) 和 2(d) 所示。算法经过了三次定点迭代后收敛。

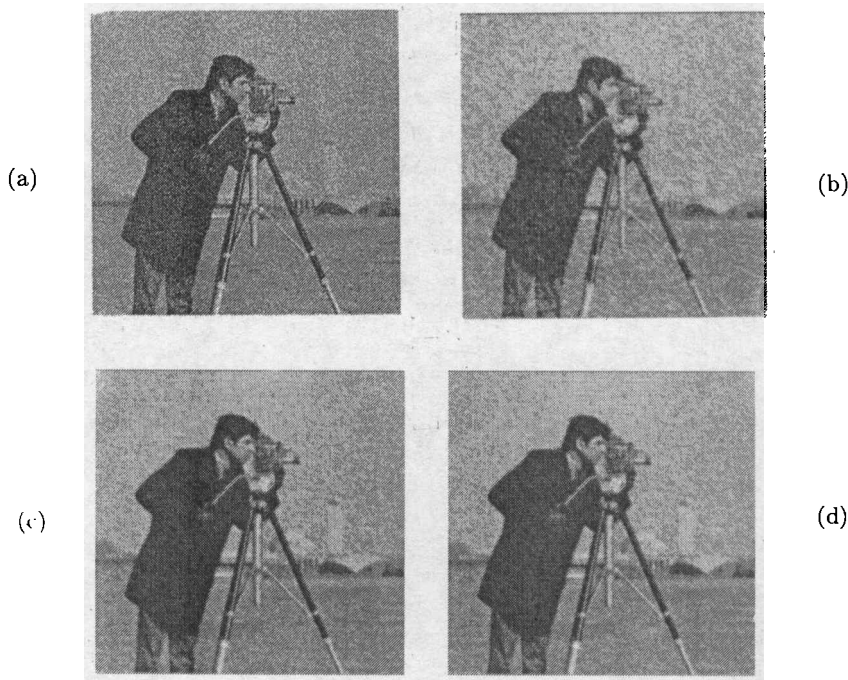


图 2 (a) 受噪声污染的图像 SNR=10dB (b) 图 2(a) 恢复的图像  
(c) 受噪声污染的图像 SNR=5dB (d) 图 2(c) 恢复的图像

## 4 结 论

基于总变分的图像恢复和重建导致一类最小化问题, 它归结为解一个非线性椭圆型偏微分方程。需要有一种有效的数值化方法。本文提出了一种离散化方法, 它能够简化 C. R. Vogel 和 M. E. Oman 的定点迭代方法的实现。这将有助于基于总变分的图像恢复和重建方法在实际中的应用。

## 参 考 文 献

- [1] L.I. Rudin, S. Osher, Feature-oriented image enhancement using shock filters, *SIAM J. Num. Anal.*, 1990, 27, 919-940.
- [2] L.I. Rudin, S. Osher, E. Fatemi, Nonlinear total variation based noise removal algorithms, *Physica D*, 1992, 60, 259-268.
- [3] T. F. Chan, H. M. Zhou, R. H. Chan, Continuation method for total variation denoising problems, In *SPIE 1995*, vol.2563, *Advanced Signal Processing Algorithms*, F. T. Luk, Ed., San Diego, CA, 1995,
- [4] Y. Li, F. Santosa, A computational algorithm for minimizing total variation in image restoration, *IEEE Trans. on Image Processing*, 1996, 5(6), 987-995.
- [5] C. R. Vogel, M. E. Oman, Iterative methods for total variation denoising, *SIAM J. Sci. Comput.*, 1996, 17(1), 227-238.
- [6] C. R. Vogel, M. E. Oman, Fast, robust total variation-based reconstruction of noisy, blurred images, *IEEE Trans. on Image Processing*, 1998, 7(6), 813-824.
- [7] R. E. Ewing, J. Shen, A multigrid algorithm for the cell-centered finite difference scheme, in *Proc. 6th Copper Mountain Conf. Multigrid Methods. NASA Conf. Pub. 3224*, April, 1993.
- [8] T. F. Chan, Chiu-Kwong, Total variation blind deconvolution, *IEEE Trans. on Image Processing*, 1998, 17(3), 370-375.
- [9] Zou Mou-yan, R. Unbenhauen, On the computational model of a kind of deconvolution problems, *IEEE Trans. on Image Processing*, 1995, 4(10), 1464-1467.
- [10] E. H. Golub, C. F. Van Loan, *Matrix Computations*, Baltimore, MD: Johns Hopkins Univ. Press, 1989.
- [11] C. Charalambous, F. K. Ghaddar, K. Kouris, Two iterative image restoration algorithms with application to nuclear medicine, *IEEE Trans. on Medical Imaging*, 1992, 11(1), 2-8.
- [12] Zou Mou-yan, Zou Xi, Global optimization: An auxiliary cost function approach, *IEEE Trans. on Systems, Man, and Cybernetics, Part A*, 2000, 30(3), 347-354.

A DISCRETIZATION METHOD FOR TOTAL VARIATION  
BASED IMAGE RESTORATION EQUATION

Zou Mouyan    Liu Xiaojun

*(Institute of Electronics, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100080, China)*

**Abstract** Total variation based image restoration and reconstruction lead to a kind of minimization problem that turns out to be a nonlinear integro-differential equation of elliptic type. An effective linearization and discretization method is essential for solving the problem. The fixed point iteration proposed by C. R. Vogel and M. E. Oman(1996) is an elegant scheme of linearization. For discretization of the problem, however, the reported methods mostly involve the skills in numerical solutions of differential equations that are not amiable for the image processing community. In this paper, a discretization method is presented that needs only conventional technique for image processing. The method can simplify the implementation of the fixed point iteration scheme. The experimental results of image restoration and image denoising are used to justify the method.

**Key words** Restoration, Reconstruction, Total variation, Fixed point iteration

邹谋炎: 男, 1941年生, 研究员, 博士生导师, 研究方向为信号和图像处理理论和算法.  
刘小军: 男, 1972年生, 博士生, 研究方向为图像分析和处理.