

有矩形波导和线性摆动器的自由 电子激光器的特性研究*

尹元昭

(中国科学院电子学研究所 北京 100080)

摘要 本文研究圆柱电子束通过矩形波导和线性摆动器时产生相干辐射的特性。用线性化弗拉索夫-麦克斯韦方程分析了因对自洽的电子束平衡态引起扰动产生的不稳定性,导出了 TM_{mn} 模的色散方程并数值计算了辐射频率和增长率与电子束能量、轴向磁场、摆动器强度和波长以及电子束半径的关系。

关键词 自由电子激光器,矩形波导,线性摆动器,引导磁场

1 引言

用在自由电子激光器中的摆动器主要有线性摆动器和双螺旋摆动器两种。线性摆动器用现代磁钢组成,磁场强度高,周期可较自由地调整,加工精度高,组装容易,不需要附加电源,既缩小了体积,又不消耗电能,所以在自由电子激光器中用得越来越多。在电子束能量较高的康普顿型自由电子激光器实验中,现在比较普遍地都使用线性摆动器^[1]。由于线性摆动器是平面结构,当然最好配以矩形波导作为电子束的真空通道和电子束与辐射的相互作用区域,以往的理论大多将电子束和辐射看作是一维的,本文则是用弗拉索夫-麦克斯韦方程分析线性摆动器和矩形波导组合的自由电子激光器的工作特性,电子束是柱形的,其几何形位由它的平衡分布函数决定,即我们考虑的是波导和电子束的三维特征。先导出 TM_{mn} 模的色散方程,然后通过数值计算求得辐射频率和增长率与电子束能量和半径、轴向磁场、摆动器强度和波长的关系。

2 TM_{mn} 模的色散方程

用矩形波导和线性摆动器的自由电子激光器的结构示意图如图1所示。线性摆动器的场为

$$\mathbf{B}_w = B_w \cosh(k_w x) \cos(k_w z) \mathbf{e}_x - B_w \sinh(k_w x) \sin(k_w z) \mathbf{e}_z, \quad (1)$$

其中 $k_w = 2\pi/\lambda_w$, λ_w 为摆动器的波长,当 $k_w x \ll 1$ 的条件满足时,可简化为

1993-11-06 收到,1994-04-01 定稿

* 国家自然科学基金资助项目

尹元昭 男,1937年生,研究员,主要从事自由电子激光器,电磁场理论、分形和混沌等领域的研究工作。

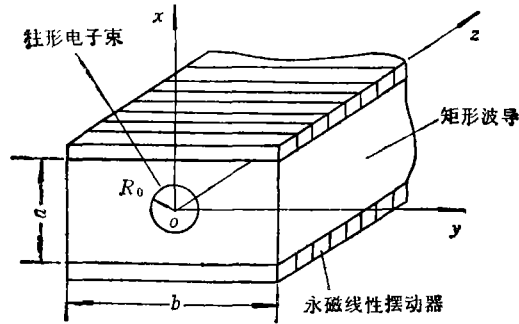


图 1 用矩形波导和线性摆动器的自由电子激光器的结构示意图

$$\mathbf{B}_w = B_w \cos(k_w z) \mathbf{e}_z, \quad (2)$$

设轴向引导磁场为

$$\mathbf{B}_\parallel = B_\parallel \mathbf{e}_z, \quad (3)$$

则解电子在这两个静磁场中的运动方程, 得到^[2]

$$\left. \begin{aligned} v_x &= v_1 \cos(k_w z) - v_1 \cos\left(\frac{\Omega_\parallel}{v_0} z\right), \\ v_y &= v_2 \sin(k_w z) - v_1 \sin\left(\frac{\Omega_\parallel}{v_0} z\right), \\ v_z &= v_0; \\ x &= \frac{v_1}{k_w v_0} \sin(k_w z) - \frac{v_1}{\Omega_\parallel} \sin\left(\frac{\Omega_\parallel}{v_0} z\right), \\ y &= -\frac{v_2}{k_w v_0} \cos(k_w z) + \frac{v_1}{\Omega_\parallel} \cos\left(\frac{\Omega_\parallel}{v_0} z\right), \\ z &= v_0 t. \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

满足初始条件 $t = 0$ 时, $x = y = z = 0$, $v_x = v_y = 0$, $v_z = v_0$. 在满足条件 $\Omega_w / (\Omega_\parallel k_w) \ll 1$ 时可求得下列运动常数:

$$\left. \begin{aligned} p_x &= \gamma_0 m_0 \Omega_\parallel y = c_1, \\ p_y &= \gamma_0 m_0 \Omega_\parallel x + \frac{\Omega_w}{k_w} \gamma_0 m_0 \sin(k_w z) = c_2, \\ p_z &= c_3, \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

其中

$$v_1 = \frac{\Omega_w \Omega_\parallel v_0}{\Omega_\parallel^2 - k_w^2 v_0^2}, \quad v_2 = \frac{\Omega_w k_w v_0^2}{\Omega_\parallel^2 - k_w^2 v_0^2}, \quad \Omega_\parallel = \frac{e B_\parallel}{\gamma_0 m_0 c}, \quad \Omega_w = \frac{e B_w}{\gamma_0 m_0 c},$$

$\gamma_0 = (1 - \beta_0^2)^{-1/2}$, $\beta_0 = v_0/c$, e 和 m_0 为电子的电荷数值和静止质量, c 为真空中光速, 电子动量 $\vec{p} = \gamma_0 m_0 \vec{v}$.

由这些运动常数, 我们可选取电子束的平衡分布函数为

$$f^{(0)} = n_0 \oplus (p_0^2 - p^2) \delta(c_1) \delta(c_2) \delta(c_3 - \gamma_0 m_0 v_0), \quad (6)$$

其中 n_0 是电子密度, $p_0 = \gamma_0 m_0 c$, 亥维赛阶跃函数 $\oplus(x) = 1$, 当 $x \geq 0$; $\oplus(x) = 0$,

当 $x < 0$ 。于是电子束的密度分布为

$$n = \int_{-\infty}^{+\infty} f^{(0)} dp = \begin{cases} n_0, & r \leq R_0; \\ 0, & r > R_0. \end{cases}$$

事实上电子束半径有波动, 其最大幅度为 $\Delta R = 2\Omega_w v_0 / (\Omega_w^2 - k_w^2 v_0^2)$ 。但只要远离谐振点, 并有 $\Omega_w \gg \Omega_w$ 或 $k_w v_0 \gg \Omega_w$, 这个波动可略去不计。

由弗拉索夫方程可求得扰动分布函数为

$$\delta f = e \int_{-\infty}^0 d\tau e^{-i\omega\tau} \left[\mathbf{E}(\mathbf{r}') + \frac{\mathbf{v}' \times \mathbf{B}(\mathbf{r}')}{c} \right] \cdot \left[\frac{\partial}{\partial \mathbf{p}} f^{(0)} \right]_{(\mathbf{r}', \mathbf{p}')}, \quad (7)$$

其中矩形波导中 TM_{mn} 模的场分量可展开为

$$\left. \begin{aligned} E_x &= \sum_{i=-\infty}^{+\infty} E_0 \sin k_x \left(x + \frac{a}{2} \right) \sin k_y \left(y + \frac{b}{2} \right) e^{-i(\omega t - k_z z)} = \sum_i \hat{E}_x(\mathbf{r}) e^{-i\omega t}, \\ E_z &= \sum_{i=-\infty}^{+\infty} i \frac{k_y k}{k_c^2} E_0 \cos k_x \left(x + \frac{a}{2} \right) \sin k_y \left(y + \frac{b}{2} \right) e^{-i(\omega t - k_z z)} = \sum_i \hat{E}_z(\mathbf{r}) e^{-i\omega t}, \\ E_y &= \sum_{i=-\infty}^{+\infty} i \frac{k_x k}{k_c^2} E_0 \sin k_x \left(x + \frac{a}{2} \right) \cos k_y \left(y + \frac{b}{2} \right) e^{-i(\omega t - k_z z)} = \sum_i \hat{E}_y(\mathbf{r}) e^{-i\omega t}; \\ B_x &= \sum_{i=-\infty}^{+\infty} -i \frac{k_y}{k_c^2} \frac{\omega}{c} E_0 \sin k_x \left(x + \frac{a}{2} \right) \cos k_y \left(y + \frac{b}{2} \right) e^{-i(\omega t - k_z z)} \\ &= \sum_i \hat{B}_x(\mathbf{r}) e^{-i\omega t}, \\ B_y &= \sum_{i=-\infty}^{+\infty} i \frac{k_x}{k_c^2} \frac{\omega}{c} E_0 \cos k_x \left(x + \frac{a}{2} \right) \sin k_y \left(y + \frac{b}{2} \right) e^{-i(\omega t - k_z z)} \\ &= \sum_i \hat{B}_y(\mathbf{r}) e^{-i\omega t}, \\ B_z &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

又 $k_z = k + s k_w$, s 为整数, $k_x = m\pi/a$, $k_y = n\pi/b$, $k_c = (k_x^2 + k_y^2)^{1/2}$, (7)式的积分将沿下述未扰动轨道进行:

$$\left. \begin{aligned} v'_x &= v_x - v_1 \cos k_w z + v_1 \cos \frac{\Omega_w}{v_0} z + v_1 \cos k_w (z + v_0 \tau) \\ &\quad - v_1 \cos \frac{\Omega_w}{v_0} (z + v_0 \tau), \\ v'_y &= v_y - v_2 \sin k_w z + v_2 \sin \frac{\Omega_w}{v_0} z + v_2 \sin k_w (z + v_0 \tau) \\ &\quad - v_2 \sin \frac{\Omega_w}{v_0} (z + v_0 \tau), \\ v'_z &= v_0; \\ x' &= x - \frac{v_1}{k_w v_0} \sin k_w z + \frac{v_1}{\Omega_w} \sin \frac{\Omega_w}{v_0} z + \left(v_x - v_1 \cos k_w z + v_1 \cos \frac{\Omega_w}{v_0} z \right) \tau \\ &\quad + \frac{v_1}{k_w v_0} \sin k_w (z + v_0 \tau) - \frac{v_1}{\Omega_w} \sin \frac{\Omega_w}{v_0} (z + v_0 \tau), \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

$$\left. \begin{aligned} y' &= y + \frac{v_2}{k_\omega v_0} \cos k_\omega z - \frac{v_1}{Q_\parallel} \cos \frac{Q_\parallel}{v_0} z + \left(v_y - v_2 \sin k_\omega z + v_1 \sin \frac{Q_\parallel}{v_0} z \right) \tau \\ &\quad - \frac{v_2}{k_\omega v_0} \cos k_\omega (z + v_0 \tau) + \frac{v_1}{Q_\parallel} \cos \frac{Q_\parallel}{v_0} (z + v_0 \tau), \\ z' &= z + v_0 \tau, \end{aligned} \right\}$$

其中 $\tau = t' - t$ 。当 $\tau = 0$ 时, $v'_x = v_x, v'_y = v_y, v'_z = v_z, x' = x, y' = y, z' = z$ 。

TM 模的波动方程为

$$\begin{aligned} \sum_i (\omega^2 - c^2 k_x^2 - c^2 k_z^2) E_0 \sin k_x (x + a/2) \sin k_y (y + b/2) e^{i k_z z} \\ = 4\pi c^2 i (k_x \rho - \omega j_z / c^2), \end{aligned} \quad (10)$$

其中电荷密度 ρ 和电流密度 \mathbf{J} 分别为

$$\left. \begin{aligned} \rho &= \hat{\rho} e^{-i\omega t} = -e \int_{-\infty}^{+\infty} \delta f d\mathbf{p}, \\ \mathbf{J} &= \hat{\mathbf{J}} e^{-i\omega t} = -e \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{v} \delta f d\mathbf{p}. \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

将(8)和(9)式代入(7)式, 完成积分求得 δf , 将 δf 代入(11)式求得 ρ 和 \mathbf{J} , 再由(10)式求得色散方程:

$$\begin{aligned} (\omega^2 - c^2 k_x^2 - c^2 k_z^2) (\omega - k_{x+1} v_0 - 2l k_\omega v_0 - 2l Q_\parallel)^2 \\ - 2\omega^2 F \frac{k_x^2}{k_z^2} \omega \frac{v_1 v_2}{v_0^2} \beta_0^2 c (k_{x+1} + 2l k_\omega) \left\langle \sin^2 k_x \left(x + \frac{a}{2} \right) \sin^2 k_y \left(y + \frac{b}{2} \right) \right\rangle \\ \cdot J_l \left(\frac{k_x v_2}{k_\omega v_0} \right) J_l \left(\frac{k_y v_2}{k_\omega v_0} \right) J_l \left(\frac{k_x v_1}{k_\omega v_0} \right) J_l \left(\frac{k_y v_1}{k_\omega v_0} \right), \end{aligned} \quad (12)$$

其中

$$\begin{aligned} \langle \sin^2 k_x (x + a/2) \sin^2 k_y (y + b/2) \rangle \\ = \frac{1}{\pi R_0^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{R_0} \sin^2 k_x \left(r \cos \theta + \frac{a}{2} \right) \sin^2 k_y \left(r \sin \theta + \frac{b}{2} \right) r dr d\theta \end{aligned}$$

$\omega_0^2 = 4\pi e^2 n_0 / (\gamma_0 m_0)$ 为等离子体频率, $F = \pi R_0^2 / (ab)$ 为电子束充填因子, J_l 为 l 阶第一类贝塞尔函数, 在推导中我们还用了正交归一化公式

$$\frac{1}{\lambda_\omega} \int_0^{\lambda_\omega} e^{i k_m z} e^{-i k_n z} dz = \begin{cases} 1, & m = n, \\ 0, & m \neq n \end{cases}$$

和级数乘积的对角线近似。

3 结果和讨论

从色散方程可见, 辐射频率 ω_r 和传播常数 k_r 由下列两个方程

$$\left. \begin{aligned} \omega^2 &= c^2 k_x^2 + c^2 k_z^2, \\ \omega &= k_{x+1} v_0 + 2l (k_\omega v_0 + Q_\parallel) \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

联解求得。我们只对最低阶模式感兴趣, 所以取 $s = 0$ 和 $l = 0$, 于是从(13)式解得

$$\omega_r = \gamma_0^2 \beta_0 c k_w + \gamma_0 \beta_0 c (\gamma_0^2 \beta_0^2 k_w^2 - k_c^2)^{1/2},$$

$$k_r = \gamma_0^2 \beta_0^2 k_w + \gamma_0 (\gamma_0^2 \beta_0^2 k_w^2 - k_c^2)^{1/2}.$$

这里我们只取高频解。

对色散方程进行数值计算, 以 TM_{11} 模为例得到辐射频率 ω_r 和增长率 ω_i 与电子束能量和半径、轴向磁场、摆动器强度和波长的关系, 如图 2—图 6 所示 ($a = 2\text{cm}$, $b = 4\text{cm}$, 电子束电流 10A).

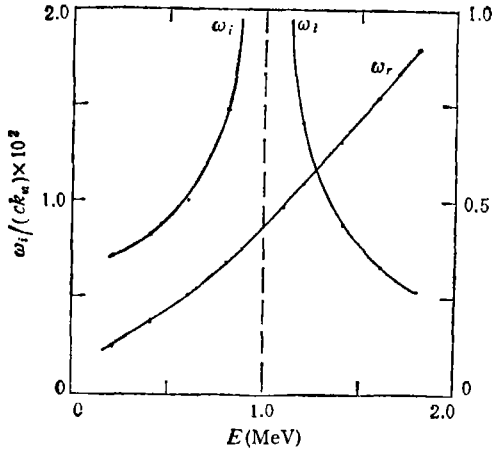


图 2 辐射频率和增长率与电子束能量 E 的关系
 $R_0 = 0.5\text{cm}$, $B_z = 10\text{kG}$, $B_w = 1\text{kG}$, $\lambda_w = 3\text{cm}$

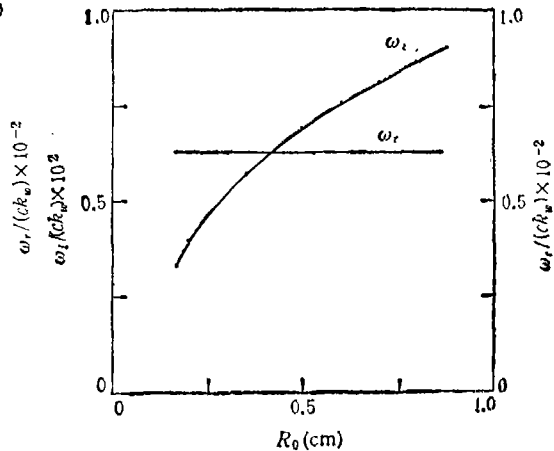


图 3 辐射频率和增长率与电子束半径的关系
 $E = 1\text{MeV}$, $B_z = 10\text{kG}$, $B_w = 1\text{kG}$, $\lambda_w = 3\text{cm}$

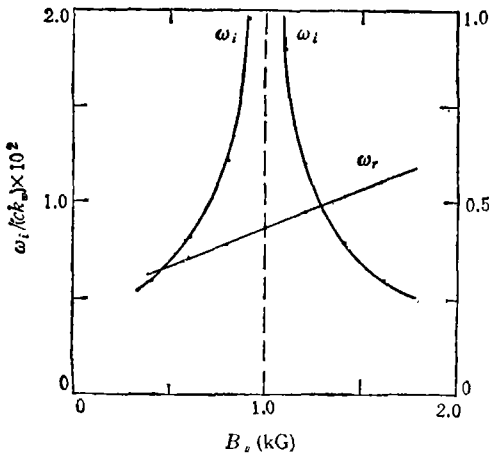


图 4 辐射频率和增长率与轴向磁场的关系
 $E = 1\text{MeV}$, $B_w = 1\text{kG}$, $R_0 = 0.5\text{cm}$, $\lambda_w = 3\text{cm}$

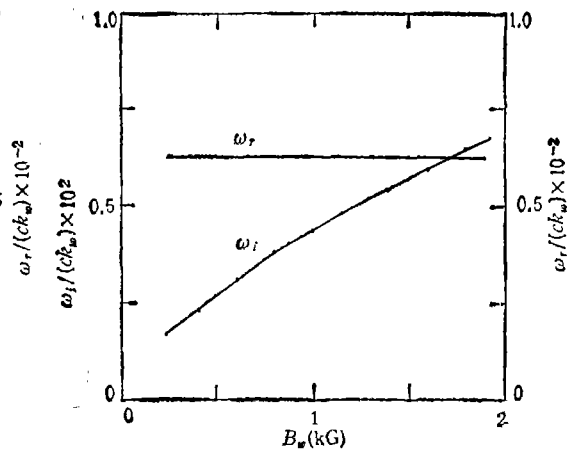


图 5 辐射频率和增长率与摆动器强度的关系
 $E = 1\text{MeV}$, $B_z = 10\text{kG}$, $R_0 = 0.5\text{cm}$, $\lambda_w = 3\text{cm}$

由图可见, 除了自由电子激光器的一般特征外, 最显著的特点是存在谐振特性, 即当 $\omega_{\text{H}} - k_w v_0 \rightarrow 0$ 时, 增长率 $\omega_i \rightarrow \infty$ 。当然我们的理论只在远离谐振点处成立, 但实验上可以通过适当选择参量, 趋近谐振点来提高增益。

其次,由(4)式可见,电子运动除了由摆动器引起的分量外,还有由轴向磁场引起的分量,

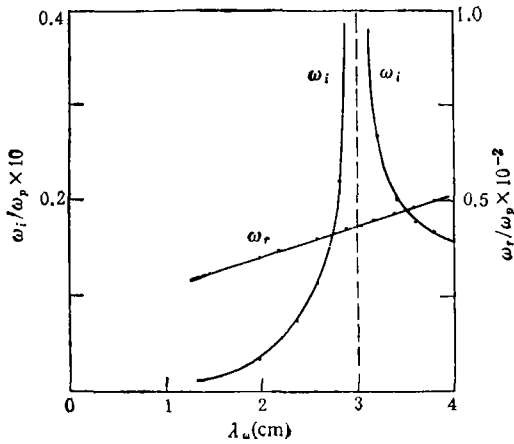


图 6 辐射频率和增长率与摆动器波长的关系
 $E = 1\text{MeV}$, $B_z = 10\text{kG}$, $B_w = 1\text{kG}$, $R_0 = 0.5\text{cm}$

本文只考虑前者,即自由电子激光模,而不考虑后者,即回旋模。但是本文的方法可以对回旋模作类似的计算。因为回旋模不具有双重多普勒频率上漂移特性,其工作频率一般低于自由电子激光模,所以就省略了。但在实验中如何区别这两种工作模式,并抑制回旋模的增长,避免回旋模对自由电子激光模的竞争是一个重要的课题。

第三,从图 3 可见电子束半径 R_0 对增长率和稳定特性有很大影响。当 R_0 增大时增长率增大但辐射频率基本上保持不变。这和圆柱电子束通过圆柱波导和纵向摆动器时的结果^[3]相似。

参 考 文 献

- [1] Xie Jialin, et al, Striving for first laser of Beijing FEL, First Asian Symposium on Free Electron Laser. Beijing, China, May 27—30, 1993, 36.
 [2] Yin Y Z, Bekefi G. J. Appl. Phys., 1984, 55(1):33—42.
 [3] Davidson R C, Yin Y Z. Phys. Rev., 1984, 30(6):3078—3091.

CHARACTERISTIC STUDY OF A FREE ELECTRON LASER WITH LINEARLY POLARIZED WIGGLER AND RECTANGULAR WAVEGUIDE

Yin Yuanzhao

(Institute of Electronics, Academia Sinica, Beijing 100080)

Abstract The characteristics of coherent radiation produced by a cylindrical electron beam passing through a rectangular waveguide and linearly polarized wiggler is studied. The instability analysis is based on the linearized Vlasov-Maxwell equations for the perturbations about a self-consistent beam equilibrium. The dispersion equation of $\text{TM}_{m,n}$ mode is deduced and by making use of numerical calculation the radiation frequency and growth rate as a function of electron beam energy and radius, axial magnetic field, wiggler field and wave length are presented and discussed.

Key words Free electron laser, Rectangular waveguide, Linearly polarized wiggler, Axial magnetic field