第 16 卷 第 4 期 电 子 科 学 学 刊 Vol. 16, No. 4
1994 年 7 月 JOURNAL OF ELECTRONICS July, 1994

用复射线展开法计算目标散射场的误差特性分析*

杜惠平 阮颖铮
(电子科技大学微波工程系 成都 610054)

摘要 复射线展开法是计算目标散射场的一种简捷的方法，其可靠性有赖于对误差特性的系统研究. 本文以平面波谱积分为散射场计算的参考标准，以 L^2 空间中由范数定义的距离作为复射线展开法计算结果的误差，从而得到了复射线展开法在目标散射场计算中的误差特性，找到了减小误差的方法并给出这一方法的适用范围.

关键词 复射线展开法，误差分析，电磁散射，平面波谱积分

1 引言

复射线方法是分析高频波场传播及散射特性的一种有效方法[1]. 它通过将射线参考点从实空间解析延拓到复空间而得到一条复空间中的射线. 而在实空间看来，复坐标参考点不仅提供相位参考而且还提供幅度分布参考，因而复射线所表示的是一个定向传播的波束.

复射线展开法首先将任意波前分布展开为一组加权的复射线，通过追踪计算射线场进而求得散射场. 同几何光学射线展开法[2]相比，由于每条复射线均表示一个波束，故在计算中可减少射线数目以简化计算. 因此，复射线展开法已多次应用于散射场分析中[3-5].

本文通过对复射线谱特性及平面波谱积分的讨论，用平面波谱积分作为散射场计算的参考标准，以平方可积 (L^2) 空间中距离来定义复射线展开法计算结果的误差，得出影响误差特性的因素，从而可有效地分析该方法的应用.

2 复射线与平面波谱积分

目标散射场分布可以有效地表示为平面波谱积分的形式. 设有如图 1 所示的二维散射目标 Σ 位于观察面 A 之后，其散射特性可用谱域变换函数 $K(k_x, k_x')$ 表示. 设入射场在观察面 A 处可表示为 E^i，则对应的谱域输入函数为

$$F^i(k_x) = \int_{-\infty}^{\infty} E^i(x)\exp(-jk_x x)\mathrm{d}x, \tag{1}$$

1993-04-07 收到，1993-09-03 定稿
* 国家自然科学基金及国家教委博士点基金资助项目
杜惠平 男，1966 年生，博士生，现从事复射线理论、电磁散射及微波、毫米波天线等方面的研究工作.
阮颖铮 男，1939 年生，教授，博士生导师，现从事电磁射线理论、电磁散射及反雷达隐身技术、微波毫米波天线、相控阵天线、弹性波传播等方面的教学和研究工作.

而A处的频谱输出函数可表示为

$$F^o(k_x) = \int_{-\infty}^{\infty} K(k_x, k'_x) F^i(k'_x) \mathrm{d}k'_x. \tag{2}$$

散射场远场则为

$$E^s = \pi F^o(k_x) H_0^{(2)}(kr)/\lambda \approx F^o(k_x)\exp(-jkr)\exp(j\pi/4)/\sqrt{\lambda r}. \tag{3}$$

利用平面波谱积分同样可以有效地表示复源点场. 设 $z = 0$ 处复源点口径面上场分布为高斯型幅度分布

$$E_0(x) \approx \exp[-kx^2/(2b)],\ b > 0 \quad (\text{二维情形}). \tag{4}$$

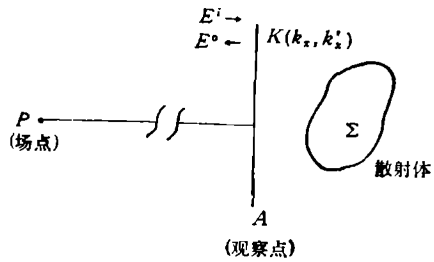

图 1　散射结构

由平面波谱积分可将 $z > 0$ 区域中场表示为[6]

$$E(x, z) = C\int_{-\infty}^{\infty} \exp[jkP(\eta)]\mathrm{d}\eta, \tag{5}$$

式中C为包含各常数因子之常数，且

$$P(\eta) = \eta x + \kappa z + ib\eta^2/2,\ \kappa = (1 - \eta^2)^{1/2}, \tag{6}$$

这里 $\eta = k_x/k$, $\kappa = k_z/k$ 且 $\mathrm{Im}(\kappa) \geqslant 0$. 当 $\eta = 0$ 时取 $\kappa = +1$.

当 k 很大时，(5)式积分可由鞍点法求出，鞍点 η_s 是方程 $dP(\eta)/d\eta = 0$ 的解，即

$$\eta_s = (i/b)(x - \eta_s z/\kappa_s),\ \kappa_s = \kappa(\eta_s). \tag{7}$$

在近轴区域内（$y^2 \ll z^2 + b^2$）则上式可近似为

$$\eta_s = x/(z - ib),\ |\eta_s| \ll 1.$$

于是得

$$kP(\eta_s) \approx k\{z + y^2/[2(z - ib)]\}. \tag{8}$$

将(8)式代入(5)式后，所得表达式与复源点所产生的近轴场[1]完全相同. (8)式所描述的即由（$0, ib$）处单位复源点所产生近轴区域场的指数部分. 这表明，复射线方法所求得的场等价于平面波谱积分的鞍点贡献，是零阶渐近意义上的平面波谱积分解.

用复射线展开法求解散射场，首先是将入射波场展开为一组复源点场. 在观察面A上以复源点口径场拟合入射波场的结果设为 E^i_1，则对应于(1)—(3)式可求得相应的 F^i_1, F^o_1 及 E^s_1. 且所得结果在零阶渐近意义上等同于复射线方法所求得的对应结果.

3　误差的描述

由(3)式，复射线展开法求得散射场结果与平面波谱积分所得结果间的误差为

$$\Delta E^s = E^s - E^s_1 = C\Delta F^o(k_x),\ C = [\exp(j\pi/4)/\sqrt{\lambda r}]\exp(-jkr), \tag{9}$$

即散射场误差可归结为观察面A上谱输出函数间的误差.

设有函数 $x(t) \in L^2(-\infty, \infty)$，线性算子 $T \in \mathscr{B}(L^2, L^2)$；赋范线性空间 L^2 中范数定义为

$$\|x\| = \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} x^2 \mathrm{d}t},$$

且算子T为

$$(Tx)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} K(t, s) x(s) \mathrm{d}s.$$

显然，由其物理含义可知 $F^i(k_x)$,$F_1^i(k_x)$，$F^o(k_x)$ 及 $F_1^o(k_x)$ 均属 $L^2(-\infty,\infty)$，且积分核为 $K(k_x,k'_x)$ 的积分算子 $T\in\mathscr{B}(L^2,L^2)$，我们以 L^2 中依范数定义的距离来评价 $F^o(k_x)$ 与 $F_1^o(k_x)$ 间的误差，则有

$$\Delta F^o(k_x)=\delta(F^o,F_1^o)=\rho(TF^i,TF_1^i)=\|T(F^i-F_1^i)\| \leqslant\|T\|\cdot\|F^i-F_1^i\|=K_0\rho(F^i,F_1^i)=K_0\Delta F^i. \tag{10}$$

这里已利用了(2)式，即

$$F^o=TF^i.$$

(10)式中

$$K_0=\|T\|=\left[\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}K^2(k_x,k'_x)\mathrm{d}k_x\mathrm{d}k'_x\right]^{1/2}, \tag{11a}$$

$$\Delta F^o=\rho[F^o(k_x),F_0^i(k_x)]=\left[\int_{-\infty}^{\infty}[F^o(k_x)-F_1^o(k_x)]^2\mathrm{d}k_x\right]^{1/2}, \tag{11b}$$

$$\Delta F^i=\rho[F^i(k_x),F_1^i(k_x)]=\left[\int_{-\infty}^{\infty}[F^i(k_x)-F_1^i(k_x)]^2\mathrm{d}k_x\right]^{1/2}. \tag{11c}$$

(10)式表明，在上述定义下谱输出函数间误差与谱输入函数间误差有如下的简单关系：

$$\Delta F^o(k_x)\leqslant K_0\Delta F^i(k_x) \tag{12}$$

且 K_0 仅与散射体 Σ 有关.

利用傅氏变换的有关性质，可进而将谱输入函数间的误差转化为入射波场间的拟合误差．推导可得

$$\rho[F^i(k_x),F_1^i(k_x)]=\left\{\int_{-\infty}^{\infty}[E^i(x)-E_1^i(x)]^2\mathrm{d}x\right]^{1/2}. \tag{13}$$

以 δ_s 表示散射场误差 ΔE^s，δ_i 表示入射波场的拟合误差，则有

$$\delta_s\leqslant K_1\delta_i, \tag{14}$$

这里，$K_1=CK_0$ 且

$$\delta_i=\left[\int_{-\infty}^{\infty}[E^i(x)-E_1^i(x)]^2\mathrm{d}x\right]^{1/2}, \tag{15}$$

$$\delta_s=C\Delta F^o(k_x), \tag{16}$$

而C及 K_0 定义则分别同(9)式及 (11a) 式．因而，散射场误差既与入射波场的拟合精度有关，又与散射体谱变换函数有关.

同样地，由散射体谱变换函数按 (11a) 式表示的 K_0 因子也可化为由散射体格林函数来定义，这里不再赘述.

4 分析举例

作为上述分析的一个简单例子，不妨考察单位平面波正入射在宽度为 $2a$ 的无限长导电直条带上的情形．这时有

$$E^i=\begin{cases}1, & |x|\leqslant a;\\ 0, & |x|>a;\end{cases} \tag{17}$$

且有 $K_0=2a$，即以复射线展开法计算其散射场时，远场计算误差

$$\delta_s\leqslant 2aC\delta_i. \tag{18}$$

当 a 为有限值时，对于给定的误差要求 δ_s，总可以找到一组合适的复射线展开系数，使得对应的 δ_i 能通过上式满足给定的误差要求.

5 结论

由上面的讨论可以得出以下结论：

(1) 上述误差的定义是均方根误差的连续化表示，能客观反映出复射线展开法在计算目标散射场时的误差特性。

(2) 当散射体具有 K_0 为有限值这一条件时，对应远场辐射可以用复射线展开法计算，且计算误差随复射线展开精度的提高而减小。

(3) 为使 K_0 为有限值，则单位平面波入射时，散射体在观察面形成的出射场应为平方可积函数。考虑到波场及边界条件的线性性质，则要求散射体表面光滑或分段光滑。

(4) 上述有关讨论虽然只针对二维情形，但同样的过程及结论也适用于三维情形。

参　考　文　献

[1] 阮颖铮编著. 复射线理论及其应用. 北京：电子工业出版社，1991，第四章.
[2] Ling H, Chou R C, Lee S W. IEEE Trans. on AP, 1989, AP-37(2):194—205.
[3] 阮颖铮. 电子学报，1989，17(3): 89—94.
[4] Ruan Y Z, Feng W L. IEE Proc. -F, 1991, 138(5): 397—399.
[5] Ruan Y Z, Du H P. J. Electronics (China), 1993, 10(1):71—78.
[6] Felsen L B. Philips Res. Rep., 1975, 30(1):169—184.

ERROR ANALYSIS OF COMPLEX RAY EXPANSION METHOD FOR TARGET SCATTERING FIELD COMPUTATION

Du Huiping　Ruan Yingzheng
(University of Electronic Science and Technology of China, Chengdu 610054)

Abstract　The complex ray expansion is a simple approach for target scattering field computation, whose effectiveness depends on the systematic investigation of its error. In this paper, plane wave spectral integral is used as a standard reference and the "distance" defined by norm in L^2 space is introduced as the error function for comparison between the two methods, and then the error characteristics of complex ray expansion appoach for target scattering field computation are obtained. The way to decrease the error and the application range of the complex ray expansion method are also obtained.

Key words　Complex ray expansion, Error analysis, Electromagnetic scattering, Spectral integral