

三维非均匀介质成像问题的区域分解方法¹

陈爱新 聂在平*

(北京航空航天大学电子信息工程学院 北京 100083)

*(电子科技大学微波工程系 成都 610054)

摘要 在利用数值方法分析非均匀介质问题时,容易生成大型系数矩阵,从而在求解时常常造成计算机内存不足或者计算时间过长.该文利用区域分解方法对三维非均匀介质成像问题进行分析,通过将求解区域划分为几个子区域,在子区域上以迭代求解子问题的方式解决以上问题.文中给出的迭代收敛速度曲线证明区域分解算法的收敛速度很快.该文对一些复杂的非均匀介质问题给出了模拟测量成像的结果.

关键词 非均匀介质, 区域分解方法, 成像, 数值分析

中图分类号 O441

1 引言

许多电磁场工程问题最终都归结为偏微分方程的求解.在求解偏微分方程边值问题的数值方法中,有限元^[1,2]和有限差分方法^[3]是两种常用的有效方法.但是,对于高维偏微分方程和计算区域又比较大的情形,如果采用这些方法,则会形成一个阶数很大的系数矩阵,不仅计算时间很长,而且还容易导致计算机内存不足.尽管有不少降低存储量的算法,但是,对于大型系数矩阵,求解仍然非常困难.特别是对非均匀介质问题,为了精确地模拟实际电磁场分布,要求网格划分要非常密,因此对内存的要求更高,需要寻求更高效的求解方法.

从 80 年代起,伴随着并行计算机的发展,逐步兴起了区域分解方法^[4,5].这种方法是将复杂的求解区域划分为若干个相对简单的子区域,在每个子区域上建立规模较小的子问题,并行迭代求解每个子问题,从而获得整个区域上的数值解.也就是说,区域分解方法能够将大型问题转化为小型问题、复杂问题转化为简单问题、串行问题转化为并行问题,这样,不仅可以减少计算时间,还可以解决计算机内存不足问题.由于区域分解方法在各个子区域上可以分别采取不同的离散方式,而且也可以采用不同的方法求解,相对于串行计算的常规数值方法而言,这种并行计算方法无疑具有极大的灵活性和优越性.

区域分解方法分为 3 种主要类型:(1)重叠型区域分解方法^[6];(2)非重叠区域分解方法^[7];(3)虚拟区域法.其中前两种区域分解的方法相似,只是在将求解区域划分为若干子区域时,在重叠型区域分解方法中,各子区域之间有部分重叠,而在非重叠区域分解方法中,则没有区域重叠.

本文研究位场问题的区域分解解法,将三维非重叠区域分解方法用于非均匀介质问题,模拟成像仪器在介质中的电阻率响应,并将成像结果与利用有限元方法求得的结果进行比较.本文的重点放在方法应用和算法实现上面,对于方法涉及的理论内容,可以参考有关文献^[5].

2 问题描述

电成像仪的测量环境如图 1 所示,图中模型为三维模型的一个纵剖面图,其中介质 1 为关于中心轴线对称的流体,其它为固态介质.测量时仪器处于介质 1 中,极板贴在介质壁上,从下至上移动测量.每个金属极板上有两排钮扣电极,每排 12 个,两排电极交叉错开,钮扣电极之间以及电极和极板之间由绝缘环分隔(图 2).

¹ 2001-09-18 收到, 2002-01-14 改回

国家“863”计划(863-820-6-1)资助项目

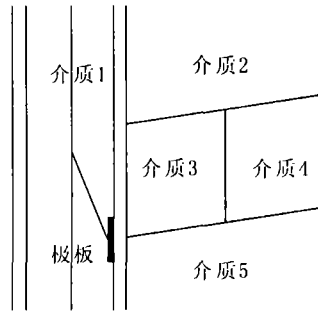


图1 测量模型

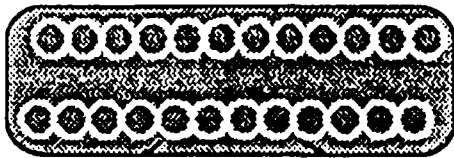


图2 钮扣电极结构图

在测量过程中,借助于液压推靠系统,使极板紧贴介质壁,钮扣电极阵列向固态介质中发射电流,金属极板也发射相同极性的电流,对钮扣电极的电流起着屏蔽和聚焦的作用,因为极板上电位恒定,钮扣电极上的电流大小,就可以反映极板附近介质的电阻率.介质电阻率变化,电极上的电流也跟着变化.记录下各个电极上的电流,并转化为视电阻率,来近似表示极板附近的介质电阻率.

通过仪器的移动测量,便可得到周向和垂向两个方向的测量数据阵列,以这两个方向为坐标轴标定测量点的位置,以灰度值的高低或色彩的变化表示测量值的大小,就可以得到相应层段介质电阻率成像结果,从而直观反映介质情况.

3 区域分解求解方法

对如下非齐次边值问题

$$\left. \begin{aligned} \Delta u &= f, \quad \text{in } \Omega \\ u|_{\Gamma} &= g \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

其中 $\Omega \subset R^3$ 为一有界开区域, Γ 为其边界.

将区域 Ω 分解为没有重叠区的 m 个子区域,即

$$\Omega = \bigcup_{j=1}^m \Omega_j, \quad \Gamma = \bigcup_{j=1}^m \Gamma_j \quad (2)$$

$m(\geq 2)$ 为子区域总数, $\Omega_i \cap \Omega_j = \emptyset (i \neq j)$. 子区域 $\Omega_j (j = 1, 2, \dots, m)$ 的边界为 $\Gamma_{jt} = \Gamma_j \cup \Gamma'_j$, 其中拟边界 $\Gamma'_j = \Gamma_{jt} \cap \Omega$.

设 $u = u_j(\text{in } \Omega_j)$, $j = 1, 2, \dots, m$ 是(1)式的解,若 Ω_j 与 Ω_i 相邻,令 $\Gamma_{ji} = \Gamma_{jt} \cap \Gamma_{it}$, 则 u_j 满足下列方程:

$$\left. \begin{aligned} \Delta u_j &= f, \quad \text{in } \Omega_j \\ u_j|_{\Gamma_j} &= g \\ u_j|_{\Gamma_{ji}} &= u_i|_{\Gamma_{ji}} \\ \frac{\partial u_j}{\partial n_j} \Big|_{\Gamma_{ji}} &= \frac{\partial u_i}{\partial n_i} \Big|_{\Gamma_{ji}} \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

其中 n_j 是 Γ_{jt} 的外法线方向.

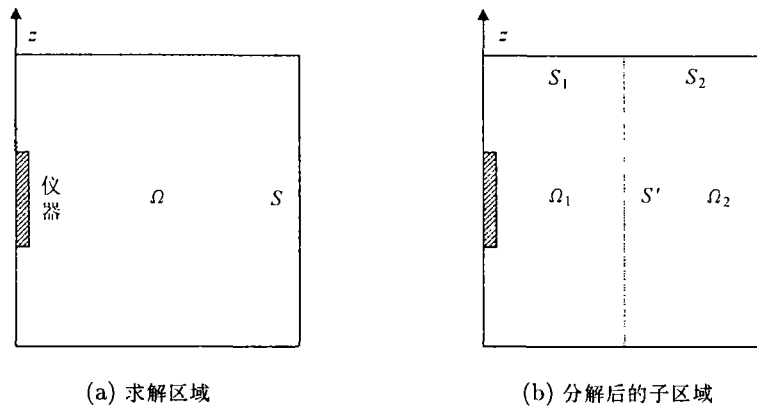


图 3 区域分解示意图

为简单起见, 考虑求解区域分解为两个子区域的情况. 如图 3 所示, 图 3(a) 是三维待求解区域的纵剖面图, 图中 Ω 表示求解区域, S 为其边界, 图 3(b) 是分解后的子区域图, 这两个子区域 Ω_1 和 Ω_2 没有重叠部分, 只有一个虚拟边界 S' , S_1 和 S_2 分别为 Ω_1 和 Ω_2 的边界, 所以有

$$\Omega = \bigcup_{j=1}^2 \Omega_j, \quad S = \bigcup_{j=1}^2 S_j \quad (4)$$

在本文所求解问题中, 位函数 $u(x, y, z)$ 满足以下拉普拉斯方程:

$$\left. \begin{aligned} \nabla \cdot [(1/R)\nabla u] &= 0, \quad \text{in } \Omega \\ u|_S &= g \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

式中 R 表示介质电阻率, g 表示边界 S 上的电位值. 所以可以按以下步骤设计区域分解算法:

(1) 假设在虚拟边界 S' 上, 位函数满足

$$u|_{S'} = v \quad (6)$$

选取初值 v^0 , v^0 可以为任意一组数值, 但为了减少迭代次数, 最好按实际情况选取, 使其最接近真实值.

(2) 在子区域 Ω_1 上求解第一类边值问题:

$$\left. \begin{aligned} \nabla \cdot [(1/R)\nabla u_1] &= 0, \quad \text{in } \Omega_1 \\ u_1^n|_{S_1} &= g \\ u_1^n|_{S'} &= v^n \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

其中边界值 g 在 S_1 上有两个取值: 在纽扣电极上, $g = 1$; 在纵向边界上, $g = 0$.

(3) 在子区域 Ω_2 上求解第二类边值问题:

$$\left. \begin{aligned} \nabla \cdot [(1/R)\nabla u_2] &= 0, \quad \text{in } \Omega_2 \\ u_2^n|_{S_2} &= g \\ \frac{\partial u_2^n}{\partial n_2} \Big|_{S'} &= \frac{\partial u_1^n}{\partial n_2} \Big|_{S'} \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

其中 n_2 为子区域 Ω_2 在拟边界 S' 上的法线方向, 由 Ω_2 指向 Ω_1 。边界值 g 在 S_2 上的取值为 0。

(4) 调整虚拟边界值:

$$v^{n+1} = \theta^n u_2^n|_{S'} + (1 - \theta^n)v^n \quad (9)$$

式中 θ^n 为第 n 次迭代的松弛因子, 可以输入或由下式确定。

$$\theta^n = 2/(2 + 1/\tau^n + \sigma^n) \quad (10)$$

其中 τ^n 和 σ^n 分别为

$$\tau^n = \sup[\tau^{n-1}, (u_2^n|_{S'}, u_2^n|_{S'}) / (v_1^n, v_1^n)] \quad (11)$$

$$\sigma^n = \sup[\sigma^{n-1}, (v_1^n, v_1^n) / (u_2^n|_{S'}, u_2^n|_{S'})] \quad (12)$$

式中 (\cdot, \cdot) 表示内积。此时, 迭代的收敛速度为

$$2(1 + 1/\tau^n)/(1 + \sigma^n) \quad (13)$$

(5) 循环执行第 (2)~(4) 步, 直至迭代结果满足精度要求。

4 计算实例

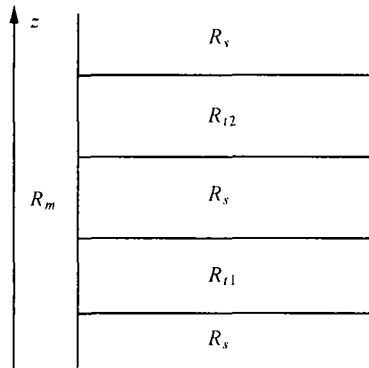


图 4 水平介质模型

实例 1 测量一个 5 层水平介质模型的电阻率响应 (图 4), 模型中流体电阻率 $R_m = 1.0\Omega \cdot m$, 下面介质电阻率 $R_{t1} = 50\Omega \cdot m$, 上面介质电阻率 $R_{t2} = 100\Omega \cdot m$, 其它介质电阻率 $R_s = 2.0\Omega \cdot m$ 。图 5 和图 6 是分别应用有限元和区域分解方法进行分析得到的测量结果, 左图中的 R_a 表示电阻率响应的数值, 右图中的图像是其灰度表示结果。从图中可以看出, 区域分解方法与有限元方法的结果吻合得很好, 能够真实地反映介质模型。对电阻率值不同的各个介质层, 通过在曲线图上对应层段响应幅度的高低和灰度图上亮度的明暗两种方式加以反映。

实例 2 一个由 11 层高、低电阻率薄互层 (高层阻层和低阻层交替出现的薄层状介质) 组成的倾斜介质模型 (图 7(a)), 互层倾向与极板中心法线方向垂直, 倾角 $\theta = 45^\circ$, 流体电阻率 $R_m = 1.0\Omega \cdot m$, 高层阻层电阻率 $R_t = 100\Omega \cdot m$, 低阻层电阻率 $R_s = 2.0\Omega \cdot m$ 。图 7(b) 是其模拟测量成像结果, 从成像图上可以清楚地看到明暗相间的薄互层, 图像中的薄互层界面反映了介质模型中介质的倾斜程度。

对以上算例, 考察算法的迭代收敛速度。图 8 是利用区域分解方法求解以上问题时迭代次数与相对误差的关系曲线, 图中相对误差的定义为

$$\text{err} = \|\Delta u^n\|/\|u^n\| \quad (14)$$

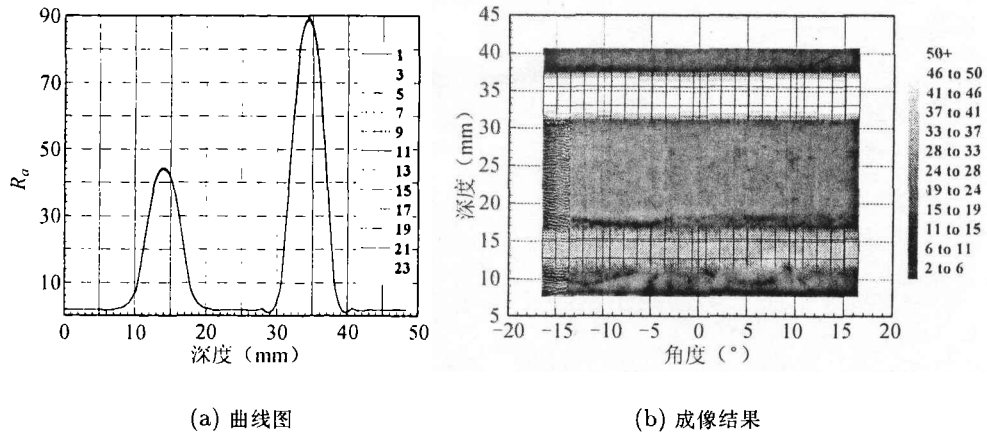


图 5 有限元曲线图和成像结果

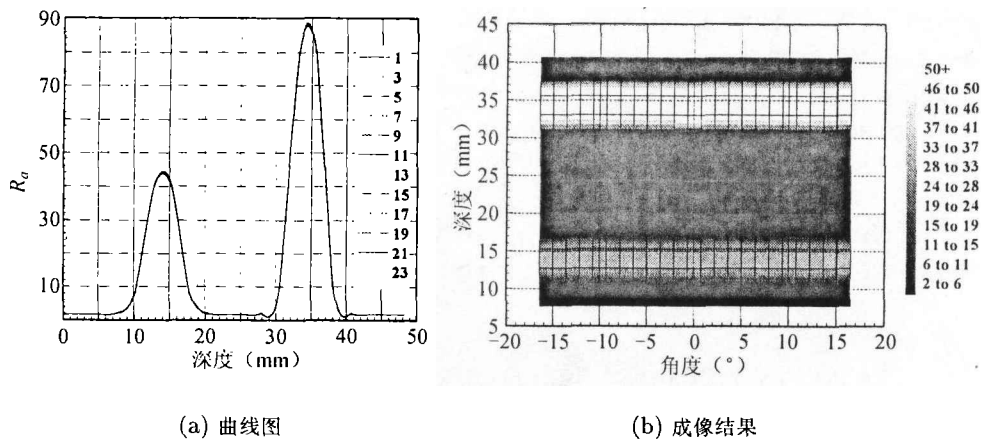


图 6 区域分解曲线图和成像结果

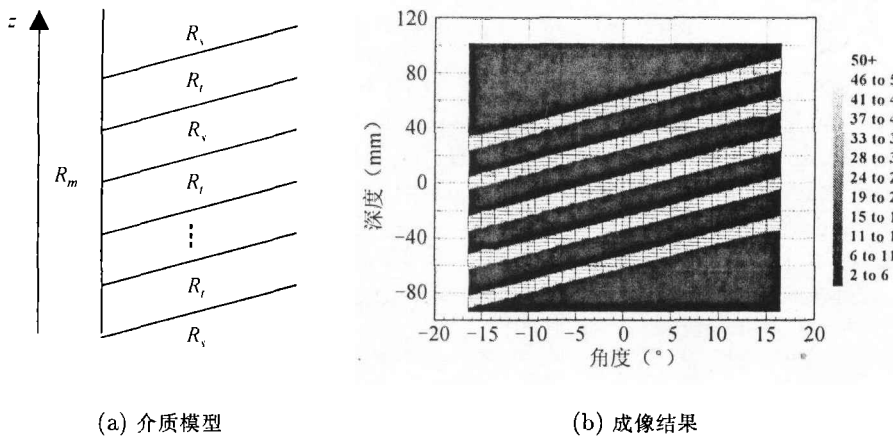


图 7 倾斜介质模型和成像结果

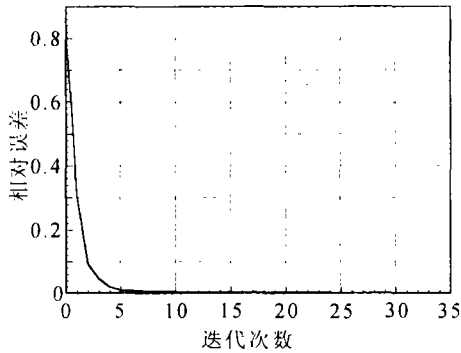


图 8 迭代次数和相对误差的关系

其中 u^n 表示第 n 次迭代后得到的求解区域 Ω 上的位函数向量, $\Delta u^n = u^n - u^{n-1}$, $\|\cdot\|$ 表示范数, 范数的定义为

$$\|a\| = \sqrt{a \cdot a} \quad (15)$$

图中曲线的迭代收敛精度控制为 $\text{err} < 10^{-3}$, 可以看出, 误差随迭代次数的增加而很快下降, 算法经过比较少的迭代过程就达到了收敛。

参 考 文 献

- [1] P. P. Silvester, R. L. Ferrari, Finite Elements for Electrical Engineers, Cambridge, Cambridge University Press, 1990, chapter 9.
- [2] 金建铭著(美), 王建国译, 电磁场有限元方法, 西安, 西安电子科技大学出版社, 1998, 第五章.
- [3] 高本庆, 时域有限差分法, 北京, 国防工业出版社, 1995, 第二章.
- [4] J. H. Bramble, J. E. Pasciak, A. H. Schatz, The construction of preconditioners for elliptic problems by substructuring I, Mathematics of Computation, 1986, 46(174), 361-369.
- [5] 吕涛, 石济民, 林振宝, 区域分解算法——偏微分方程数值解新技术, 北京, 科学出版社, 1997, 205-223.
- [6] 陈爱新, 聂在平, 二维位场重叠型区域分解方法, 电波科学学报, 1998, 13(4), 382-387.
- [7] 陈爱新, 聂在平, 二维位场非重叠区域分解方法, 电波科学学报, 1999, 14(增), 244-247.

DOMAIN DECOMPOSITION METHOD APPLIED TO
THREE-DIMENSIONAL INHOMOGENEOUS MEDIA IMAGING

Chen Aixin Nie Zaiping*

(School of Electrical Eng., Beijing Univ. of Aeronaut. and Astronaut., Beijing 100083, China)

*(Dept. of MW Eng., Univ. of Electron. Sci. and Tech. of China, Chengdu 610054, China)

Abstract When numerical methods are used to solve the inhomogeneous media problems, generally, the large coefficient matrixes are generated. This results in the shortage of memory or very long computing time. In this paper, the domain decomposition method is applied to three-dimensional inhomogeneous media imaging. By means of dividing the domain into a few subdomains and iteratively solving the small problems on these subdomains, the large problem can be efficiently solved. The iterative curve shows the fast convergence rate. The imaging results of some complex inhomogeneous media problems are given in this paper.

Key words Inhomogeneous media, Domain decomposition method, Imaging, Numerical analysis

陈爱新: 男, 1970年生, 副教授, 研究方向为非均匀介质中的场与波.

聂在平: 男, 1946年生, 教授, 博士生导师, 研究方向为电磁辐射、散射与逆散射研究.