

具有抽样性质的双正交子波的逼近性能及其子波抽样的计算¹

张建康 保 铮

(西安电子科技大学雷达信号处理重点实验室 西安 710071)

摘 要 本文主要讨论在具有抽样性质的双正交子波基下 Mallat 算法的逼近性能及其子波系数的计算。当尺度较小以及尺度较大时, 我们依次得到了 Mallat 算法逼近误差的渐近公式和比较精确的定量估计。结果表明: 在这样的子波基下, 直接用均匀抽样点代替子波抽样点而无需进行预先滤波, 其逼近速度可以达到 K 阶, 这里 K 是综合尺度函数的阶。模拟实验也显示出它的优点。

关键词 抽样性质, 双正交子波, Mallat 算法

中图分类号 TN911.7

1 引 言

双正交子波变换由于比正交子波变换在设计上具有较大的自由度以及稳健性强等优点, 在数学和信号处理界受到人们广泛的研究^[1-5]。本文主要讨论具有抽样性质的双正交紧支撑尺度函数的基本性质及其应用。所谓一个尺度函数 $\varphi(x)$ 具有抽样性质是指它满足性质: $\varphi(n) = \delta(n)$, $n \in Z$ 。Shannon 子波 ($\varphi(x)$ 为 sinc 函数) 具有抽样性质, 但不是紧支撑的。本文的中心工作就是要研究当尺度因子 J 较大时 Mallat 投影的渐近逼近性能, 以及当 J 较小时 Mallat 投影误差的定量估计。一般情况下, 这种误差关于尺度 $a = 2^{-J}$ 是线性收敛的, 即使对高阶子波和充分光滑的信号。但是, 对于具有抽样性质的尺度函数来说, 其收敛速度却是非线性的, 这是因为这类函数的特点是子波基与 Shannon 基很接近, 它的频率响应在其通带内几乎是一个平台, 所以具有相对较小带宽的带限信号在通过这样的滤波器时, 在幅度和相位上可以近似地认为都没有失真。从而子波抽样与 Shannon 抽样几乎是一致的, 这一点可大大地简化子波系数的计算, 因此可以用扩大尺度空间的方法来减少 Mallat 投影的逼近误差。本文正是利用这种性质, 依次得到了当尺度较小以及尺度较大时, Mallat 投影逼近误差的渐近公式和比较精确的定量估计。结果表明, Mallat 投影与双正交斜投影^[5]具有同样的渐近逼近阶(关于尺度), 因此, 在这样的子波基下, 直接用 Shannon 采样点代替子波采样点而无需进行预先滤波, 其逼近速度可以达到 K 阶, 这里 K 是综合尺度函数的阶。模拟实验也显示出它的优点。

2 基本性质

在这一节里, 我们讨论具有抽样性质尺度函数的基本性质。贯穿全文, 如不特别声明, 均假设低通滤波器 $H(z)$ 具有如下形式:

$$H(z) = [(1+z)/2]^K Q(z), \quad (1)$$

这里 $Q(1) = \sqrt{2}$, $Q(-1) \neq 0$ 。由它产生的尺度函数 $\varphi(t)$ 满足双尺度方程:

$$\varphi(t) = \sqrt{2} \sum_k h_k \varphi(2t - k). \quad (2)$$

¹ 1998-01-15 收到, 1998-12-11 定稿
国家自然科学基金重点项目 (69831040) 资助课题

性质 1^[6] $\varphi(n) = \delta(n)$, $\varphi(t) \in L^2(\mathbf{R})$ 当且仅当 $h_{2n} = (1/\sqrt{2})\delta(n)$ 或等价于 $H_0(z) = 1/\sqrt{2}$, 而且常函数是在算子 \mathbf{R} 下保持不变的唯一三角多项式, 这里

$$\begin{aligned} \mathbf{R}(a(\omega)) &= h(\omega/2)a(\omega/2) + h(\omega/2 + \pi)a(\omega/2 + \pi) \\ H(z) &= H_0(z^2) + z^2H_1(z^2), \\ H_0(z) &= \sum_n h_{2n}z^n, \quad H_1(z) = \sum_n h_{2n+1}z^n. \end{aligned}$$

性质 2 设 $\varphi(t)$ 具有抽样性质, $\hat{\varphi}(\omega)$ 表示它的 Fourier 变换, 则

$$\hat{\varphi}(0) = 1, \quad \hat{\varphi}^{(k)}(0) = 0, \quad k = 1, 2, \dots, K-1.$$

证明 首先说明 $H^{(k)}(1) = 0$, $k = 1, 2, \dots, K-1$. 由 (1) 式我们有

$$H^{(k)}(-1) = \sum_n (-1)^n n^k h_n = 0, \quad k = 1, 2, \dots, K-1. \quad (3)$$

于是由 (3) 式和性质 1 可得

$$H^{(k)}(1) = \sum_n n^k h_n = \sum_n (2n+1)^k h_{2n+1} = -H^{(k)}(-1) = 0, \quad k = 1, 2, \dots, K-1. \quad (4)$$

其次, 注意到当 $\varphi(t)$ 有适当的衰减, 譬如 $\varphi(t) \ll (1+|t|)^{-K-\epsilon}$, $t \rightarrow +\infty$ 时, $\hat{\varphi}(\omega)$ 具有直到 $K-1$ 阶导数, 因此, 利用 (2) 式和 (4) 式可导出

$$\begin{aligned} \varphi^{(k)}(\omega) \Big|_{\omega=0} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\sum_{i=0}^k C_k^i H^{(i)}(e^{-j\omega/2}) \hat{\varphi}^{(k-i)}\left(\frac{\omega}{2}\right) \right) \Big|_{\omega=0} \\ &= 2^{-k-1/2} H(1) \hat{\varphi}^{(k)}(0) = 2^{-k} \hat{\varphi}^{(k)}(0). \end{aligned}$$

于是, $\hat{\varphi}^{(k)}(0) = 0$, $k = 1, 2, \dots, K-1$.

性质 2 说明尺度函数频率响应 $\hat{\varphi}$ 在 $\omega = 0$ 附近具有 K 阶平坦性, 这一点对于我们分析 Mallat 算法逼近误差的渐近性能及其定量估计至关重要. 下面的性质 3 更清楚地反映了 $\hat{\varphi}(\omega)$ 在 $\omega = 0$ 附近的渐近性能.

性质 3 设 $\varphi(t)$ 具有抽样性质, 则

$$\hat{\varphi}(\omega) = 1 + C(H)/(K!) \omega^K + O(\omega^{K+1}), \quad (5)$$

这里

$$C(H) = \frac{(-j)^K}{(2^K - 1)\sqrt{2}} \sum (2n+1)^K h_{2n+1}. \quad (6)$$

(5) 式和 (6) 式用性质 2 及其证明方法可以直接得到.

性质 4 设 $\eta_m(t) = \sum_k (t-k)^m \varphi(t-k)$, 则

$$\eta_0(t) = 1, \quad (7a)$$

$$\eta_m(t) = 0, \quad m = 1, 2, \dots, K-1, \quad (7b)$$

$$\eta_K(t) = \sum_{k=0} \hat{\varphi}^{(K)}(2k\pi) e^{j2\pi kt}. \quad (7c)$$

证明 注意到将函数 $t^l \varphi(t)$ 在时域上周期化相当于在频域上抽样 (Poisson 方程), 于是

$$\sum_k (t-k)^l \varphi(t-k) = j^l \sum_k \hat{\varphi}^{(l)}(2\pi k) e^{j2\pi kt}. \quad (8)$$

结合性质 2 和 (8) 式便可完成 (7) 式的证明.

性质 5 设 $\varphi(t)$ 是满足 (1) 式和 (2) 式的尺度函数, $|\omega| \leq \pi$,

$$\phi(\omega) = \sum_n \varphi(n) e^{-jn\omega}, \quad (9)$$

$$Q = \max |Q(\omega)|, \quad \phi = \max |\phi(\omega)|, \quad (10)$$

则

$$\phi\left(\frac{\omega}{2^J}\right) = \hat{\varphi}\left(\frac{\omega}{2^J}\right) + \delta_1 \left| \frac{\omega}{2^{J+2}} \right|^K, \quad (11a)$$

$$|\delta_1(\omega)| \leq Q\phi. \quad (11b)$$

(11) 式定量反映了尺度函数在零频附近的数字谱逼近模拟谱的精确程度, K 决定着逼近速度和精度. 这一性质对我们后面定量估计预滤波算法的逼近误差至关重要.

证明 首先由尺度方程 (3) 式及 $\phi(\omega)$ 的定义, 可以得到

$$\begin{aligned} \phi(\omega) &= \sqrt{2} \sum_k \sum_n h_k \varphi(2n-k) e^{-jn\omega} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_k \sum_n (1+(-1)^n) h_k \varphi(n-k) e^{-jn\omega/M} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(H\left(\frac{\omega}{2}\right) \phi\left(\frac{\omega}{2}\right) + H\left(\pi + \frac{\omega}{2}\right) \phi\left(\pi + \frac{\omega}{2}\right) \right). \end{aligned} \quad (12)$$

其次, 利用 (1) 式和不等式 $|\sin x| \leq |x|$ ($|x| \leq \pi/2$), 可以导出, 当 $|\omega| \leq \pi$ 和 $J \geq 0$ 时,

$$\left| H\left(\pi + \frac{\omega}{2^J}\right) \right| \leq Q \left| \frac{\omega}{2^{J+2}} \right|^N. \quad (13)$$

结合 (12) 式和 (13) 式产生

$$\phi(\omega/2^J) = (1/\sqrt{2})(H(\omega/2^{-(J+1)})\phi(\omega/2^{-(J+1)}) + \delta_1(\omega)|\omega/2^{-(J+2)}|^K). \quad (14)$$

最后, 反复递归 (14) 式可得

$$\phi\left(\frac{\omega}{2^J}\right) = \hat{\varphi}\left(\frac{\omega}{2^J}\right) + \delta_1(\omega) \left| \frac{\omega}{2^{J+2}} \right|^K,$$

其中 $|\delta_1(\omega)| \leq Q\phi$. 这就完成 (11) 式的证明.

特别当 $\varphi(t)$ 具有抽样性质的尺度函数时, 可得到下面的推论:

推论 $\hat{\varphi}(\omega/2^{-J}) = 1 + \delta_2(\omega)|\omega/2^{-(J+2)}|^K$, 其中 $|\delta_2(\omega)| \leq Q$.

性质 4、性质 5 及其推论是下节研究 Mallat 算法逼近性能的理论根据. 关于具有抽样性质紧支撑尺度函数的构造问题, 文献 [7] 有详细的讨论, 这里不再赘述. 本文所采用的构造方法是直接将正交的 Daubechies 尺度函数作自相关.

3 误差分析

在这节里, 我们仅就 2 带具有抽样性质的双正交尺度函数来讨论 Mallat 算法的逼近误差, 至于一般的 M 带的情况, 在讨论方法上没有本质的差异. 由于离散子波系数 (DWT):

$$c_{J,k} = 2^{J/2} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\tilde{\varphi}(2^J x - k)dx \rightarrow 2^{-J/2} f\left(\frac{k}{2^J}\right), \quad J \rightarrow +\infty,$$

这里 $\tilde{\varphi}$ 表示 φ 的对偶, 而且对于一般的子波, DWT 的系数很难计算, 所以 Mallat 在他的塔式算法中直接用信号的均匀抽样值近似地代替子波系数, 即子波抽样值:

$$c_{J,k} \approx 2^{-J/2} f(k/2^J).$$

虽说这一误差随着 J 的增大而减小, 但是 J 的增大却意味着对信号进行过抽样. 因此有必要对这一误差进行定量分析, 以确定出我们可接受的 J . 为此, 定义 Mallat 投影及其误差:

$$M_J f = \sum_k f\left(\frac{k}{2^J}\right) \varphi(2^J x - k), \quad (15a)$$

$$E_J(f) = f(t) - M_J f, \quad (15b)$$

$$\Delta = \|E_J(f)\|_{L^2(\mathbb{R})}. \quad (15c)$$

本节的主要目的是分析 Mallat 投影渐近逼近性能及其误差上界的定量估计.

3.1 渐近性能

对于光滑信号, 有下面的渐近公式.

定理 1 如果 $f(t) \in C^{K+1}$, $f^{(K)}(t) \in L^2(\mathbb{R})$, 而且对所有 $k: 0 < k < K+2$, $f^{(k)}(t)$ 是有界的, 那么,

$$\|E_J(f)\|_{L^2(\mathbb{R})} = C(\varphi)2^{-JK} \|f^{(K)}\|_{L^2(\mathbb{R})} + O(2^{J(K+1)}), \quad J \rightarrow +\infty, \quad (16a)$$

其中

$$C(\varphi) = \frac{1}{K!} \left(\sum_{k=0}^{K+1} |\varphi^{(k)}(2k\pi)|^2 \right)^{1/2}. \quad (16b)$$

证明 分两步进行.

第一步 研究 $E(t)$ 的性质. 因为 $\sum_k \varphi(t-k) = 1$, 所以

$$E(t) = \sum_k (f(t) - f(k/2^J)) \varphi(2^J t - k). \quad (17)$$

将函数 $f(x)$ 在 $x=t$ 附近 Taylor 展开并利用性质 4, 得到

$$f\left(\frac{n}{2^J}\right) = f(t) + \sum_{m=1}^K \frac{f^{(m)}(t)}{m!} (2^{-J}n - t)^m + \frac{f^{(K+1)}(\xi)}{(K+1)!} (2^{-J}n - t)^{K+1}, \quad (18)$$

从而

$$E(t) = (-1)^N \left[f^{(K)}(t)/(K!) \right] \eta_K(t) + O(2^{-J(K+1)}). \quad (19)$$

第二步 研究 $E(t)$ 的均方误差. 因为 $\eta_K(t) \in L^\infty(R)$, 而且函数 $f^{(K)}(t)$ 的台阶为 $a = 2^{-J}$ 的逼近阶梯样条函数在 $L^2(R)$ 中是稠密的, 所以根据 Lebeque 控制收敛定理只需要针对 $f^{(K)}(t)$ 阶梯逼近函数 $f_J^{(K)}(t)$ 计算积分

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} |f_J^{(K)}(t)\eta_K(2^J t)|^2 dt.$$

由于 $\eta_K(t)$ 是周期为 1 的周期函数, 因此

$$\begin{aligned} I &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} \int_{2^{-J}n}^{2^{-J}(n+1)} |f_J^{(K)}(t)|^2 |\eta_K(2^J t)|^2 dt = \int_0^{2^{-J}} |\eta_K(2^{-J}t)|^2 \sum_{n \in \mathbb{Z}} |f_J^{(K)}(2^{-J}n)|^2 dt \\ &= \int_0^{2^{-J}} |\eta_K(2^J t)|^2 \sum_{n \in \mathbb{Z}} |f_J^{(K)}(2^{-J}n)|^2 dt = \left(\sum_{k=0} |\varphi^{(K)}(2k\pi)|^2 \right) \|f_J^{(K)}(t)\|_{L^2(R)}^2. \end{aligned}$$

于是完成 (16) 式的证明.

最近, M. Unser^[5] 对双正交子波的逼近性能进行了研究, 他得到了下面的渐近公式:

$$\|f - \tilde{P}_a f\| = C_1(\varphi)a^K \|f^{(K)}\| + O(a^{K+1}), \quad (20a)$$

这里 $a = 2^{-J}$, $C_1(\varphi) = (1/K!) \left(\sum_{k \neq 0} |\varphi^{(K)}(2k\pi)|^2 \right)^{1/2}$, 而 $P_a f$ 是信号 $f(t)$ 在 V_J 空间的斜投影:

$$\tilde{P}_a f = a^{-1} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \langle f, \tilde{\varphi}(t/a - k) \rangle \varphi(t/a - k). \quad (20b)$$

把 (16) 式与 (20) 式作比较可以看到: 对于具有抽样性质的尺度函数, Mallat 投影与斜投影逼近的阶相同.

3.2 定量估计

现在对于带限信号, 我们来尽可能精确地估计 $E_J(f)$ 的上界. 首先由 (15) 式和 Parseval 恒等式得到

$$\begin{aligned} \Delta^2 &= \frac{1}{2\pi} \|\hat{f}(\omega) - \hat{M}_J f\|_2^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \hat{f}(\omega) - \left(\frac{1}{2^J} \sum_k f\left(\frac{k}{2^J}\right) e^{-\frac{ik\omega}{2^J}} \right) \hat{\varphi}\left(\frac{\omega}{2^J}\right) \right|^2 d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-2^J\pi}^{+2^J\pi} \sum_n \left| \hat{f}(2^{J+1}n\pi + \omega) - F\left(\frac{\omega}{2^J}\right) \hat{\varphi}\left(\frac{2^{J+1}n\pi + \omega}{2^J}\right) \right|^2 d\omega, \end{aligned} \quad (21)$$

这里

$$F(\omega) = 2^{-J} \sum_k f\left(\frac{k}{2^J}\right) e^{-jk\omega}.$$

当 $f(x)$ 是一个带限信号: $\text{supp}(\hat{f}(\omega)) \subseteq [-\pi, \pi]$ 时, (21) 式可进一步简化为

$$\Delta = \frac{1}{2\pi} \left[\int_{-\pi}^{\pi} |\hat{f}(\omega)|^2 \left| 1 - \hat{\varphi}\left(\frac{\omega}{2^J}\right) \right|^2 d\omega + \int_{-\pi}^{\pi} |\hat{f}(\omega)|^2 \left(\sum_{k \neq 0} \left| \hat{\varphi}\left(2k\pi + \frac{\omega}{2^J}\right) \right|^2 \right) d\omega \right]. \quad (22)$$

由于

$$\sum_{k \neq 0} |\hat{\varphi}(2k\pi + \omega)|^2 = \sum_k |\hat{\varphi}(2k\pi + \omega)|^2 - |\hat{\varphi}(\omega)|^2 = R(\omega) - |\hat{\varphi}(\omega)|^2, \quad (23)$$

这里

$$r(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)\varphi(x+t)dx, \quad (24)$$

$$R(\omega) = \sum_k r(k)e^{-jk\omega}. \quad (25)$$

将 (23) 式和 (25) 式代入 (22) 式可得

$$\Delta^2 = \frac{1}{2\pi} \left[\int_{-\pi}^{\pi} |\hat{f}(\omega)|^2 \left| 1 - \hat{\varphi}\left(\frac{\omega}{2^J}\right) \right|^2 d\omega + \int_{-\pi}^{\pi} |\hat{f}(\omega)|^2 \left(R\left(\frac{\omega}{2^J}\right) - \left| \hat{\varphi}\left(\frac{\omega}{2^J}\right) \right|^2 \right) d\omega \right]. \quad (26)$$

现在我们来验证 (24) 式所定义的函数 $r(t)$ 也是一个双尺度函数, 因为

$$\begin{aligned} r(t) &= 2 \sum_m \sum_n h_m h_n \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(2x-m)\varphi(2x+2t-n)dx \\ &= \sum_m \sum_n h_m h_n \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)\varphi(x+2t+m-n)dx \\ &= \sum_m \sum_n h_m h_n r(2t+m-n) = \sqrt{2} \sum_k p_k r(2t+k), \end{aligned}$$

这里

$$\begin{aligned} p_k &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_m h_m k_{n+k}, & \sum_k p_k &= \sqrt{2}, \\ P(\omega) &= \sum_k p_k e^{-jk\omega} = \frac{1}{\sqrt{2}} |H(\omega)|^2, & \hat{r}(\omega) &= |\hat{\varphi}(\omega)|^2. \end{aligned}$$

最后, 针对尺度函数 $\varphi(t)$ 和 $r(t)$ 利用性质 4, 那么从 (26) 式我们得到:

定理 2 设 $f(x)$ 是一个带限信号, 即 $\text{supp}(\hat{f}(\omega)) \subseteq [-\pi, \pi]$ 时, $\varphi(x)$ 是一个具有抽样性质的双正交尺度函数, 且满足 Riesz 条件, 则

$$\Delta \leq (1 + R^2)^{1/2} Q E_K(f) 2^{-K(2+J)}, \quad (27)$$

这里 Q 由 (10) 式确定, 而且 $R = \max |\hat{r}(\omega)|$, $E_K(f) = \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \omega^{2K} |\hat{f}(\omega)|^2 d\omega \right)^{1/2}$. 实际上, $E_K(f)$ 描述了信号频谱的分散和集中程度, $E_K(f)$ 越大, $f(x)$ 的频谱越分散; $E_K(f)$ 越小, 频谱越集中. 现在对于给定的精度, 利用 (27) 式可以由低到高, 在所有具有抽样性质的尺度函数中, 逐层 (即按每个尺度因子) 寻找较优的子波基, 使得误差满足所给的要求.

4 模拟实验

本节选用由 Daubechies 尺度函数作自相关产生的具有抽样性质的尺度函数类 $A_k(t)$ (图 1):

$$A_K(t) = \int \varphi(x)\varphi(x-t)dx.$$

这里 φ 是任一个具有 K 阶的 Daubechies 尺度函数, 信号取为 $s(t) = \text{sinc}(t)$, 在 V_2 空间逼近信号 $s(t)$, 并对于 $J = 2, K = 1 \sim 12$, 逐个计算 Δ 的上界 ε_u :

表 1

K	ε_u
1	0.03523091850605
2	0.00460134349580
3	$7.524411154470262 \times 10^{-4}$
4	$1.318056323359339 \times 10^{-4}$
5	$2.385486830042372 \times 10^{-5}$
6	$4.402292041903112 \times 10^{-6}$
7	$8.232249081793823 \times 10^{-7}$
8	$1.554373936154746 \times 10^{-7}$
9	$2.956739873341598 \times 10^{-8}$
10	$5.657508034323382 \times 10^{-9}$
11	$1.087713158178506 \times 10^{-9}$
12	$2.099550045723355 \times 10^{-10}$

$$\varepsilon_u = 2^{\kappa(J+2)}(1+R^2)^{1/2}QE_K(s).$$

计算结果见表 1. 从表中我们看出: 当 $K \geq 3$ 时, 相应的误差 ε_u 小于千分之一, 这说明信号 $s(t)$ 几乎落在 $V_2(A_2(t))$ 空间. 类似地可计算出 $J = 1$ 时的误差上界, 不过这时需要较大的 K 才能使误差满足要求, 至于 $J = 0$ 时误差就更大^[8]. 现在我们在 $V_2(A_2(t))$ 空间逼近原信号 $s(t)$, M_2s 表示信号在 $V_2(A_2(t))$ 空间的 Mallat 投影, 即

$$M_2s = \sum_n s\left(\frac{n}{4}\right)A_2(4t-n).$$

实验结果见图 2.

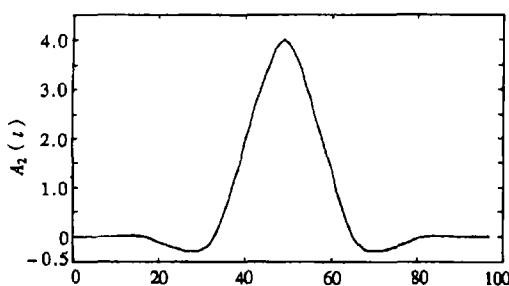


图 1 尺度函数 $A_2(t)$

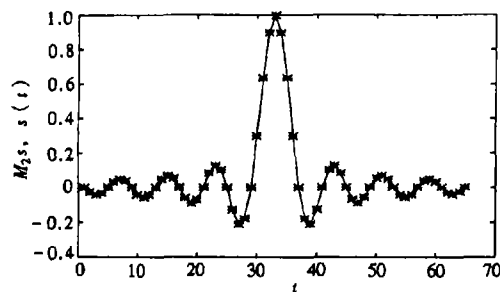


图 2 实线表示信号 $s(t)$, 星号表示 M_2s

5 结 论

本文对于具有抽样性质的双正交子波, 获得了尺度较小时光滑信号 Mallat 投影误差的一个渐近公式, 并对于带限信号, 比较精确地估计出尺度较大时 Mallat 投影误差的上界, 最后进行了模拟实验, 结果表明: 对于能量归一的低频信号, 一般情况下, 选用由 D_2 的自相关构成的具有抽样性质尺度函数 $A_2(t)$ 并把信号放在 $V_2(A_2(t))$ 空间, 子波抽样近似地取为传统意义下

的 Shannon 抽样, 其误差小于百分之一, 但对于能量集中在低频且带宽较窄的信号来说, 放在 V_1 空间甚至 V_0 空间就可以了, 具体误差的定量分析, 只要把本文中讨论的频率上限 π 改为问题中的最高频率即可。

参 考 文 献

- [1] Cohen A, Daubechies I, Feauveau J C. Bi-orthogonal bases of compactly supported wavelets. *Comm. Pure Appl. Math.* 1992, 45(2): 485-560.
- [2] Vetterli M, Herley C. Wavelets and filter banks: Theory and design. *IEEE Trans. on SP*, 1994, SP-42(11): 2915-2925.
- [3] Cohen A. Biorthogonal Wavelets. *Wavelets: A Tutorial in Theory and Applications*, C. K. Chui, Ed. New York: Academic. 1992, 123-152.
- [4] Feauveau J C, Mathieu P. Recursive biorthogonal wavelet transform for image coding. *Proc. Int. Conf. Acoust., Speech and Signal Processing*, Toronto, Canada: 1991, 2649-2652.
- [5] Unser M. Approximation power of biorthogonal wavelet expansions. *IEEE Trans. on SP*, 1996, SP-44(3): 519-527.
- [6] Shensa M J. The discrete wavelet transform: Wedding the Atrous and Mallat algorithm. *IEEE Trans. on SP*. 1992, SP-40(10): 2464-2482.
- [7] Aldroubi A, Unser M. Families of Wavelet Transforms in Connection With Shannon's Sampling Theory and Gabor Transform. *Wavelets: A Tutorial in Theory and Applications*, C. K. Chui, Ed. New York: Academic, 1992, 509-528.
- [8] 张建康, 保铮, 于宏毅. M 带离散小波变换中正交小波的逼近性能分析. *中国科学 (E 辑)*, 1997, 27(6): 556-541.

APPROXIMATION PERFORMANCE OF BIORTHOGONAL WAVELET WITH SAMPLING PROPERTY AND COMPUTATION OF WAVELET SAMPLING POINTS

Zhang Jiankang Bao Zheng

(Key Lab. for Radar Signal Processing, Xidian University, Xi'an 710071)

Abstract The focus in this paper is on the discussion of the approximation performance of the Mallat algorithm under biorthogonal wavelet bases with sampling property. The asymptotic formulae of the approximation errors of the Mallat algorithm and sharper quantitative estimation of the upper bounds are given for relatively small scale and relatively large scale, respectively. The results demonstrate that under such wavelet bases, the rate of decay of the Mallat project, directly replacing wavelet sampling points by uniform sampling points without prefiltering, reaches K order, where K is the order of a synthesis scaling function. The final experiments also show its advantages.

Key words Sampling points, Biorthogonal wavelets, Mallat algorithm

张建康: 男, 1960 年生, 博士, 研究兴趣为: 子波变换及其应用, 多速率信号处理, 算术变换和快速算法, 数据压缩.

保 铮: 男, 1927 年生, 教授, 博士生导师, 中国科学院院士, 中国电子学会会士, 主要研究领域: 雷达信号处理.