第7卷 第3期 电子科学学刊 Vol. 7, No. 3
1985年5月 JOURNAL OF ELECTRONICS May, 1985

自由空间中的广义柱体并矢格林函数的计算*

潘 生 根
(上海科技大学)

提　　要

本文利用作者前文(1984)给出的方法和技巧，求解了自由空间广义柱体并矢格林函数。所得公式在推导过程中未涉及柱体具体的横截面形状，故具有普遍适用的意义。作为具体运用实例，给出了完纯导电尖劈、半片和椭圆柱体的并矢格林函数去掉 h 积分的表示式。

一、引　　言

用并矢格林函数法处理无限长柱体的散射、电磁偶极子和半片开槽的辐射、半片对电磁波的绕射等问题，需要用到自由空间柱体坐标系统中的并矢格林函数。与波导情况不同，所考虑的区域在整个空间，需要用到 h 域和 λ 域都是连续本征值的矢量波函数。问题的解可有两种不同的表示式，或者是去掉连续谱 λ 积分的表示式，或者是去掉连续谱 h 积分的表示式。在实际应用中，往往一种表示式会比另一种更有用，更便于数值计算。

本文首先用文献[1]建立的并矢算子谱理论，求解了自由空间广义柱体并矢格林函数，所得公式在推导过程中，未涉及柱体的具体的横截面形状，故具有普遍适用的意义。然后代入圆柱体矢量波函数，得到自由空间圆柱并矢格林函数，并应用分布理论中的关系式，证明电型并矢格林函数的附加项的本征函数展开式与文献[2]的 δ 函数表示式相同。最后给出完纯导电尖劈、半片和椭圆柱的并矢格林函数去掉 h 积分的表示式。由于电型并矢格林函数附加项处理困难，据我们所知，目前已发表的有关文献中仅给出去掉 λ 积分的表示式[2,3]，而很多问题的求解要用到去掉 h 积分的表示式，所以本文所得结果有一定的实用价值。

二、自由空间广义柱体并矢格林函数

并矢波动方程是

$$\nabla\times\nabla\times\bar{G}_e(R/R')-k^2\bar{G}_e(R/R')=\bar{I}\delta(R-R'),\tag{1a}$$

$$\nabla\times\nabla\times\bar{G}_m(R/R')-k^2\bar{G}_m(R/R')=\nabla'\times\bar{I}\delta(R-R'),\tag{1b}$$

* 1983年9月22日收到，1984年11月19日修改定稿。

式中 $\bar{G}_e(R/R')$ 是电型并矢格林函数，$\bar{G}_m(R/R')$ 是磁型并矢格林函数，算子 $\nabla'\times$ 表示作用于源坐标和后矢。

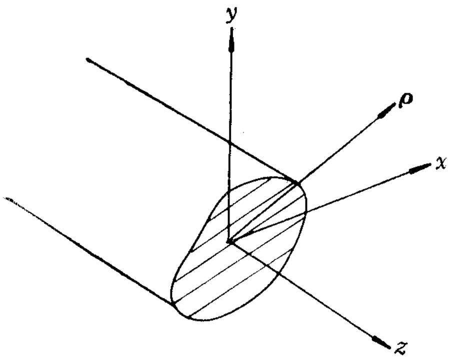

图1 广义柱体

(1b)式是用分布理论严格导出的磁型并矢波动方程的一种新的表示式[1]，它具有物理意义清晰和容易求解的优点。广义柱体的几何形状如图1所示，柱体的横截面的平面坐标矢量为 $\boldsymbol{\rho}$，纵向坐标为 z。

我们首先求解磁型并矢格林函数，引入广义柱体矢量本征函数，定义为

$$\boldsymbol{M}_{\substack{e\\o}V}(\lambda,\ h)=\nabla\times[\Phi_{\substack{e\\o}V}(\lambda,\ h)\hat{z}],\tag{2a}$$

$$\boldsymbol{N}_{\substack{e\\o}V}(\lambda,h)=\frac{1}{k}\nabla\times\nabla\times[\Phi_{\substack{e\\o}V}(\lambda,\ h)\hat{z}],\tag{2b}$$

式中 $\Phi_{\substack{e\\o}V}(\lambda,\ h)$ 满足齐次标量亥姆霍兹（Helmoholtz）方程

$$(\nabla^2+k^2)\Phi_{\substack{e\\o}V}(\lambda,\ h)=0;\tag{3}$$

下标 e、o 表示偶函数和奇函数。本征值方程为

$$K^2=K_{VC\lambda}^2+h^2.\tag{4}$$

因为磁型方程(1b)描述的是无散场，用有旋矢量本征函数 $\boldsymbol{M}$ 和 $\boldsymbol{N}$ 就能构成完备的解，所以广义函数 $\bar{I}\delta(\boldsymbol{R}-\boldsymbol{R}')$ 的完备关系是

$$\begin{aligned}\bar{I}\delta(\boldsymbol{R}-\boldsymbol{R}')=\int_{-\infty}^{\infty}dh\int_0^{\infty}d\lambda\sum_V[C_{MV}\boldsymbol{M}_{\substack{e\\o}V}(\lambda,\ h)\boldsymbol{M}'_{\substack{e\\o}V}(\lambda,\ -h)\\+C_{NV}\boldsymbol{N}_{\substack{e\\o}V}(\lambda,\ h)\boldsymbol{N}'_{\substack{e\\o}V}(\lambda,\ -h)],\end{aligned}\tag{5}$$

式中 C_{MV}、C_{NV} 分别是矢量本征函数 $\boldsymbol{M}$ 和 $\boldsymbol{N}$ 的归一化常数。由于所考虑的问题在整个空间，所以相应的矢量本征函数在 h 域和 λ 域都具有连续谱。

由广义函数傅里叶变换理论的性质[4]，得

$$\begin{aligned}\nabla'\times\bar{I}\delta(\boldsymbol{R}-\boldsymbol{R}')=\int_{-\infty}^{\infty}dh\int_0^{\infty}d\lambda\sum_V K[C_{MV}\boldsymbol{M}_{\substack{e\\o}V}(\lambda,\ h)\boldsymbol{N}'_{\substack{e\\o}V}(\lambda,\ -h)\\+C_{NV}\boldsymbol{N}_{\substack{e\\o}V}(\lambda,\ h)\boldsymbol{M}'_{\substack{e\\o}V}(\lambda,\ -h)],\end{aligned}\tag{6}$$

式中用了矢量恒等式

$$\boldsymbol{M}_{\substack{e\\o}V}(\lambda,\ h)=\frac{1}{K}\nabla\times\boldsymbol{N}_{\substack{e\\o}V}(\lambda,\ h),\tag{7a}$$

$$\boldsymbol{N}_{\substack{e\\o}V}(\lambda,\ h)=\frac{1}{K}\nabla\times\boldsymbol{M}_{\substack{e\\o}V}(\lambda,\ h).\tag{7b}$$

由算子谱理论导出的并矢方程的一般解为[1]

$$\bar{U}(\boldsymbol{R}/\boldsymbol{R}')=(\mathscr{L}-k^2)^{-1}\bar{\boldsymbol{F}}=\sum\!\!\!\!\!\!\int\frac{\boldsymbol{U}_V\boldsymbol{A}_V}{\lambda_V-k^2},\tag{8}$$

式中 $\sum\!\!\!\!\!\!\int$ 表示对离散谱求和，对连续谱积分。由(8)式可立即写出磁型并矢格林函数

$$\bar{G}_m(\boldsymbol{R}/\boldsymbol{R}')=\int_{-\infty}^{\infty}dh\int_0^{\infty}d\lambda\sum_V\frac{K}{K^2-k^2}[C_{MV}\boldsymbol{M}_{\substack{e\\o}V}(\lambda,\ h)\boldsymbol{N}'_{\substack{e\\o}V}(\lambda,\ -h)$$

$$+ C_{NV}\boldsymbol{N}_{\substack{e\\o}V}(\lambda, h)\boldsymbol{M}'_{\substack{e\\o}V}(\lambda, -h)]. \tag{9}$$

对于无限长的广义柱体，它的横截面沿 $\hat{z}$ 轴无变化，标量波函数可写为

$$\Phi^{\pm}_{\substack{e\\o}V}(\lambda, h) = \varphi_{\substack{e\\o}V}(\rho, \lambda)e^{\pm ihz}, \tag{10}$$

式中 ρ 是垂直于 z 轴的横截面的二维坐标，$\varphi_{\substack{e\\o}V}(\rho, \lambda)$ 是二维标量亥姆霍兹方程的解，由矢量恒等式

$$\nabla \times [\Phi_{\substack{e\\o}V}(\lambda, h)\hat{z}] = [\nabla_t \Phi_{\substack{e\\o}V}(\lambda, h)] \times \hat{z}, \tag{11}$$

$$\nabla \times \nabla \times \boldsymbol{A} = \nabla\nabla \cdot \boldsymbol{A} - \nabla^2 \boldsymbol{A}, \tag{12}$$

并考虑到 $\dfrac{\partial}{\partial z}[\varphi_{\substack{e\\o}V}(\rho, \lambda)] = 0$，则矢量本征函数可写为

$$\boldsymbol{M}_{\substack{e\\o}V}(\lambda, \pm h) = \boldsymbol{m}_{\substack{e\\o}V}(\rho, \lambda)e^{\pm ihz}, \tag{13a}$$

$$\boldsymbol{N}_{\substack{e\\o}V}(\lambda, \pm h) = \boldsymbol{n}^{\pm}_{\substack{e\\o}V}(\rho, \lambda)e^{\pm ihz}, \tag{13b}$$

式中

$$\boldsymbol{m}_{\substack{e\\o}V}(\rho, \lambda) = [\nabla_t \varphi_{\substack{e\\o}V}(\rho, \lambda)] \times \hat{z}, \tag{14a}$$

$$\boldsymbol{n}^{\pm}_{\substack{e\\o}V}(\rho, \lambda) = \frac{1}{K}[\pm ih\nabla_t + \hat{z}K^2_{CV\lambda}]\,\varphi_{\substack{e\\o}V}(\rho, \lambda). \tag{14b}$$

将(13)式代入(9)式，把 z 坐标函数分离出来，并用留数定理算出对连续谱 h 的积分，得

$$\begin{aligned}\bar{\boldsymbol{G}}_m(\boldsymbol{R}/\boldsymbol{R}') = \int_0^\infty d\lambda \sum_V \frac{\pi ik}{h_1}\{&C_{MV}[\boldsymbol{m}_{\substack{e\\o}V}(\rho, \lambda)\boldsymbol{n}^{-}_{\substack{e\\o}V}(\rho', \lambda)e^{ih_1(z-z')}\mu(z-z') \\ &+ \boldsymbol{m}_{\substack{e\\o}V}(\rho, \lambda)\boldsymbol{n}^{+}_{\substack{e\\o}V}(\rho', \lambda)e^{ih_1(z'-z)}\mu(z'-z)] \\ &+ C_{NV}[\boldsymbol{n}^{+}_{\substack{e\\o}V}(\rho, \lambda)\boldsymbol{m}_{\substack{e\\o}V}(\rho', \lambda)e^{ih_1(z-z')}\mu(z-z') \\ &+ \boldsymbol{n}^{-}_{\substack{e\\o}V}(\rho, \lambda)\boldsymbol{m}_{\substack{e\\o}V}(\rho', \lambda)e^{ih_1(z'-z)}\mu(z'-z)]\},\end{aligned} \tag{15}$$

式中 $\mu(z-z')$ 为 Heaviside 符号，即

$$\mu(z-z') = \begin{cases}1, & z \geqslant z'; \\ 0, & z < z'.\end{cases} \tag{16}$$

(15)式整理后，可写为

$$\begin{aligned}\bar{\boldsymbol{G}}_m(\boldsymbol{R}/\boldsymbol{R}') = \int_0^\infty d\lambda \sum_V \frac{\pi ik}{h_1}\{&C_{MV}[\boldsymbol{M}_{\substack{e\\o}V}(\lambda, h_1)\boldsymbol{N}'_{\substack{e\\o}V}(\lambda, -h_1)\mu(z-z') \\ &+ \boldsymbol{M}_{\substack{e\\o}V}(\lambda, -h_1)\boldsymbol{N}'_{\substack{e\\o}V}(\lambda, h_1)\mu(z'-z)] \\ &+ C_{NV}[\boldsymbol{N}_{\substack{e\\o}V}(\lambda, h_1)\boldsymbol{M}'_{\substack{e\\o}V}(\lambda, -h_1)\mu(z-z') \\ &+ \boldsymbol{N}_{\substack{e\\o}V}(\lambda, -h_1)\boldsymbol{M}'_{\substack{e\\o}V}(\lambda, h_1)\mu(z'-z)]\}.\end{aligned} \tag{17}$$

对于电型并矢格林函数，求解的关键是如何得到附加项．通常求附加项的方法是 $\bar{\boldsymbol{G}}_m(\boldsymbol{R}/\boldsymbol{R}')$ 法．此方法的缺点是不易分离出所求的附加项，同时如未能恰当地认出展开式中的奇异项，则电型并矢格林函数 $\bar{\boldsymbol{G}}_e(\boldsymbol{R}/\boldsymbol{R}')$ 的表示式往往会合成得不妥当，且求解的步骤也较繁琐[5]．为了克服这些缺点，我们用下述技巧来求解附加项．具体步骤是先用不完备的并矢正交基 $\boldsymbol{MM}'$ 和 $\boldsymbol{NN}'$ 求出不完备的解 $\bar{\boldsymbol{G}}_{eo}(\boldsymbol{R}/\boldsymbol{R}')$，则完备的电型并矢

格林函数可表示为

$$\bar{\boldsymbol{G}}_e(\boldsymbol{R}/\boldsymbol{R}') = \bar{\boldsymbol{G}}_{eo}(\boldsymbol{R}/\boldsymbol{R}') + \bar{\boldsymbol{G}}_{el}(\boldsymbol{R}/\boldsymbol{R}'), \tag{18}$$

式中 $\bar{\boldsymbol{G}}_{el}(\boldsymbol{R}/\boldsymbol{R}')$ 是待求的附加项，它可由并矢麦克斯韦方程

$$\nabla' \times \bar{\boldsymbol{G}}_e(\boldsymbol{R}/\boldsymbol{R}') = \bar{\boldsymbol{G}}_m(\boldsymbol{R}/\boldsymbol{R}') \tag{19}$$

和分布理论中的恒等式求出．下面就按这样的步骤求解自由空间广义柱体电型并矢格林函数．首先将广义函数 $\bar{\boldsymbol{I}}\delta(\boldsymbol{R}-\boldsymbol{R}')$ 按非完备的并矢基 $\boldsymbol{MM}'$ 和 $\boldsymbol{NN}'$ 展开

$$\bar{\boldsymbol{I}}\delta(\boldsymbol{R}-\boldsymbol{R}') = \int_{-\infty}^{\infty} dh \int_0^{\infty} d\lambda \sum_V [C_{MV}\boldsymbol{M}_{\substack{e\\o}V}(\lambda,h)\boldsymbol{M}'_{\substack{e\\o}V}(\lambda,-h) + C_{NV}\boldsymbol{N}_{\substack{e\\o}V}(\lambda,h)\boldsymbol{N}'_{\substack{e\\o}V}(\lambda,-h)], \tag{20}$$

由(8)式得

$$\bar{\boldsymbol{G}}_{eo}(\boldsymbol{R}/\boldsymbol{R}') = \int_{-\infty}^{\infty} dh \int_0^{\infty} d\lambda \sum_V \frac{1}{K^2-k^2} [C_{MV}\boldsymbol{M}_{\substack{e\\o}V}(\lambda,h)\boldsymbol{M}'_{\substack{e\\o}V}(\lambda,-h) + C_{NV}\boldsymbol{N}_{\substack{e\\o}V}(\lambda,h)\boldsymbol{N}'_{\substack{e\\o}V}(\lambda,-h)]. \tag{21}$$

将(13)式代入(21)式，把 z 坐标函数分离出来，并用留数定理算出对连续谱 h 的积分，得

$$\begin{aligned}\bar{\boldsymbol{G}}_{e0}(\boldsymbol{R}/\boldsymbol{R}') = \int_0^{\infty} d\lambda \sum_V \frac{\pi i}{h_1} \{ & C_{MV}[\boldsymbol{m}_{\substack{e\\o}V}(\rho,\lambda)\boldsymbol{n}^-_{\substack{e\\o}V}(\rho',\lambda)e^{ih_1(z-z')}\mu(z-z') \\ & + \boldsymbol{m}_{\substack{e\\o}V}(\rho,\lambda)\boldsymbol{n}^+_{\substack{e\\o}V}(\rho',\lambda)e^{ih_1(z'-z)}\mu(z'-z)] \\ & + C_{NV}[\boldsymbol{n}^+_{\substack{e\\o}V}(\rho,\lambda)\boldsymbol{m}_{\substack{e\\o}V}(\rho',\lambda)e^{ih_1(z-z')}\mu(z'-z) \\ & + \boldsymbol{n}^-_{\substack{e\\o}V}(\rho,\lambda)\boldsymbol{m}_{\substack{e\\o}V}(\rho',\lambda)e^{ih_1(z'-z)}\mu(z'-z)]\}.\end{aligned} \tag{22}$$

取(22)式的旋度，整理得

$$\begin{aligned}\nabla' \times \bar{\boldsymbol{G}}_{eo}(R/R') = \int_0^{\infty} d\lambda \sum_V \frac{\pi i k}{h_1} \{ & C_{MV}[\boldsymbol{m}_{\substack{e\\o}V}(\rho,\lambda)\boldsymbol{n}^-_{\substack{e\\o}V}(\rho',\lambda)e^{ih_1(z-z')}\mu(z-z') \\ & + \boldsymbol{m}_{\substack{e\\o}V}(\rho,\lambda)\boldsymbol{n}^+_{\substack{e\\o}V}(\rho',\lambda)e^{ih_1(z'-z)}\mu(z'-z)] \\ & + C_{NV}[\boldsymbol{n}^+_{\substack{e\\o}V}(\rho,\lambda)\boldsymbol{m}_{\substack{e\\o}V}(\rho',\lambda)e^{ih_1(z-z')}\mu(z-z') \\ & + \boldsymbol{n}^-_{\substack{e\\o}V}(\rho,\lambda)\boldsymbol{m}_{\substack{e\\o}V}(\rho',\lambda)e^{ih_1(z'-z)}\mu(z'-z)] \\ & + \left(\frac{1}{k}\right) C_{NV}(h_1^2/k^2)\nabla_t\varphi_{\substack{e\\o}V}(\rho,\lambda)\hat{z} \times \nabla_t\varphi_{\substack{e\\o}V}(\rho',\lambda) \\ & \times [-e^{ih_1(z-z')}\delta(z-z') + e^{ih_1(z'-z)}\delta(z'-z)] \\ & + \left(\frac{1}{k}\right) C_{NV}(ih_1)\left(\frac{k^2_{CV\lambda}}{k^2}\right)\varphi_{\substack{e\\o}V}(\rho,\lambda)\hat{z} \\ & \times \nabla_t\varphi_{\substack{e\\o}V}(\rho',\lambda)[e^{ih_1(z-z')}\delta(z-z') + e^{ih_1(z'-z)}\delta(z'-z)] \\ & + \left(\frac{1}{k}\right) C_{MV}\boldsymbol{m}_{\substack{e\\o}V}(\rho,\lambda)\hat{z} \times \boldsymbol{m}_{\substack{e\\o}V}(\rho',\lambda)[-e^{ih_1(z-z')}\delta \\ & \times (z-z') + e^{ih_1(z'-z)}\delta(z'-z)]\}.\end{aligned} \tag{23}$$

利用分布意义下的恒等式

$$-e^{ih_1(z-z')}\delta(z-z')+e^{ih_1(z'-z)}\delta(z'-z)=0, \tag{24a}$$

$$e^{ih_1(z-z')}\delta(z-z')+e^{ih_1(z'-z)}\delta(z'-z)=2\delta(z-z') \tag{24b}$$

和并矢方程(19)式，得到待求的附加项

$$\bar{\boldsymbol{G}}_{el}(\boldsymbol{R}/\boldsymbol{R}')=-\int_0^\infty d\lambda\sum_V C_{NV}\left(\frac{2\pi K_{CV\lambda}^2}{k^2}\right)\varphi_{\substack{e\\o}V}(\rho,\ \lambda)\varphi_{\substack{e\\o}V}(\rho',\ \lambda)\delta(z-z')\hat{z}\hat{z}. \tag{25}$$

将(22)式和(25)式代入(18)式，就得到自由空间广义柱体电型并矢格林函数．由于在推导过程中，未涉及柱体横截面的具体形状，所以解得的结果具有普遍适用的意义．具体地讲，只要将所考虑问题的坐标系中的标量波函数 $\Phi_{\substack{e\\o}V}(\rho,\ \lambda)$ 代入，就能得到相应的磁型和电型并矢格林函数的解．上述结果的另一优点是可用散射叠加法构造出适合各类边界条件的并矢格林函数．

三、一些具体的结果

为了进行比较，我们首先求出自由空间圆柱并矢格林函数，应用分布理论中的关系式证明它与文献[2]的结果相同，然后给出完纯导电尖劈、半片和椭圆柱并矢格林函数去掉 h 积分的表示式．

圆柱坐标系中的标量波函数是

$$\Phi_{\substack{e\\o}n}(\lambda,\ h)=J_n(\lambda r)\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}n\phi e^{ihz}, \tag{26}$$

式中 $J_n(\lambda r)$ 是整数阶贝塞尔函数，r、ϕ 是圆柱坐标中径向和角向变量．本征值方程是 $k^2=\lambda^2+h_1^2$，归一化常数为 $C_{MV}=C_{NV}=\dfrac{2-\delta_0}{4\pi^2\lambda}$．将(26)式代入(2)式，得

$$\boldsymbol{M}_{\substack{e\\o}n}(\lambda,h_1)=\left[\mp\frac{nJ_n(\lambda r)}{r}\begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix}n\phi\hat{r}-\frac{\partial J_n(\lambda r)}{\partial r}\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}n\phi\hat{\phi}\right]e^{ih_1z}, \tag{27a}$$

$$\boldsymbol{N}_{\substack{e\\o}n}(\lambda,h_1)=\frac{1}{k}\left[ih_1\frac{\partial J_n(\lambda r)}{\partial r}\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}n\phi\hat{r}\mp\frac{ih_1n}{r}J_n(\lambda r)\begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix}n\phi\hat{\phi}+\lambda^2J_n(\lambda r)\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}n\phi\hat{z}\right]e^{ih_1z}. \tag{27b}$$

将(27)式代入(17)、(22)和(25)式，得自由空间圆柱磁型并矢格林函数

$$\begin{aligned}\bar{\boldsymbol{G}}_m(\boldsymbol{R}/\boldsymbol{R}')=\int_0^\infty d\lambda\sum_n\frac{\pi ik}{h_1}\left(\frac{2-\delta_0}{4\pi^2\lambda}\right)\{[&\boldsymbol{M}_{\substack{e\\o}n}(\lambda,h_1)\boldsymbol{N}'_{\substack{e\\o}n}(\lambda,-h_1)\\&+\boldsymbol{N}_{\substack{e\\o}n}(\lambda,h_1)\boldsymbol{M}'_{\substack{e\\o}n}(\lambda,-h_1)]\mu(z-z')+[\boldsymbol{M}_{\substack{e\\o}n}(\lambda,\\&-h_1)\boldsymbol{N}'_{\substack{e\\o}n}(\lambda,h_1)+\boldsymbol{N}_{\substack{e\\o}n}(\lambda,-h_1)\boldsymbol{M}'_{\substack{e\\o}n}(\lambda,h_1)]\mu(z'-z)\}\end{aligned} \tag{28a}$$

和电型并矢格林函数

$$\begin{aligned}\bar{\boldsymbol{G}}_e(\boldsymbol{R}/\boldsymbol{R}')=\int_0^\infty d\lambda\sum_n\frac{\pi i}{h_1}\left(\frac{2-\delta_0}{4\pi^2\lambda}\right)\{[&\boldsymbol{M}_{\substack{e\\o}n}(\lambda,\ h_1)\boldsymbol{M}'_{\substack{e\\o}n}(\lambda,\ -h_1)\\&+\boldsymbol{N}_{\substack{e\\o}n}(\lambda,h_1)\boldsymbol{N}'_{\substack{e\\o}n}(\lambda,-h_1)]\mu(z-z')+[\boldsymbol{M}_{\substack{e\\o}n}(\lambda,-h_1)\end{aligned}$$

$$\times \boldsymbol{M}'_{\substack{e\\o}n}(\lambda,\ h_1) + \boldsymbol{N}_{\substack{e\\o}n}(\lambda,\ -h_1)\boldsymbol{N}'_{\substack{e\\o}n}(\lambda,\ h_1)]\mu(z'-z)\}$$
$$+ \bar{\boldsymbol{G}}_{el}(\boldsymbol{R}/\boldsymbol{R}'), \tag{28b}$$

式中

$$\bar{\boldsymbol{G}}_{el}(\boldsymbol{R}/\boldsymbol{R}') = -\int_0^\infty d\lambda \sum_n \left(\frac{2-\delta_0}{4\pi^2\lambda}\right)\left(\frac{2\pi\lambda^2}{k^2}\right) J_n(\lambda r)\frac{\cos}{\sin}n\phi J_n(\lambda r')\frac{\cos}{\sin}n\phi'\delta(z-z')\hat{z}\hat{z}. \tag{29}$$

(27)式和(28)式中的正规项与文献[2]给出的结果相同，但附加项(29)式则在形式上有些不同，它是 δ 函数的本征函数展开式．由分布理论中的关系式

$$\frac{\delta(r-r')\delta(\phi-\phi')}{r} = \int_0^\infty J_n(\lambda r)J_n(\lambda r')\lambda d\lambda \sum_n \left(\frac{2-\delta_0}{2\pi}\right)\frac{\cos}{\sin}n\phi\frac{\cos}{\sin}n\phi', \tag{30}$$

(29)式可重新写为

$$\bar{\boldsymbol{G}}_{el}(\boldsymbol{R}/\boldsymbol{R}') = -\frac{1}{k^2}\frac{\delta(r-r')\delta(\phi-\phi')\delta(z-z')}{r}\hat{z}\hat{z}, \tag{31}$$

这就得到了与文献[2]相同的结果．(29)式和(31)式在分布意义下是相等的．

对自由空间完纯导电的尖劈、半片和椭圆柱，目前文献中仅给出去掉 λ 积分的表示式，作为补充和实际应用的需要，用第二节的结果给出去掉 h 积分的表示式．导电尖劈的标量波函数是

$$\Phi_{\substack{e\\o}V}(\lambda,\ h) = J_V(\lambda r)\frac{\cos}{\sin}V\phi e^{ihz}, \tag{32}$$

式中 $J_V(\lambda r)$ 是 V 阶贝塞尔函数，$V=\dfrac{n}{(2-\phi_0/\pi)}$，$n=0,1,2,\cdots$；$\phi_0$ 是导电尖劈的劈角，当 $\phi_0=0$ 时，尖劈退化为半片． 本征值方程是 $k^2=\lambda^2+h_1^2$，归一化常数为

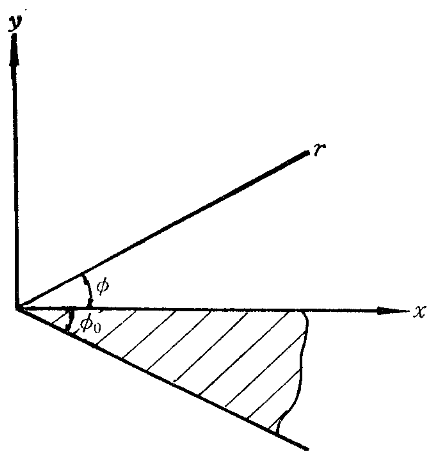

图 2 完纯导电尖劈的截面图

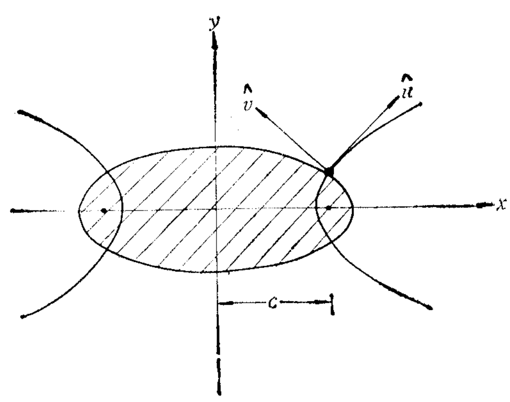

图 3 椭圆柱的截面图

$C_{MV}=C_{NV}=\dfrac{2-\delta_0}{2\pi(2\pi-\phi_0)\lambda}$．取完纯导电尖劈的边界相应于 $\phi=0$ 和 $\phi=2\pi-\phi_0$，如图 2 所示．

将(32)式代入(2)式，得

$$\boldsymbol{M}_{\substack{e\\o}V}(\lambda, h_1) = \left[\mp\frac{VJ_V(\lambda r)}{r}\begin{matrix}\sin\\\cos\end{matrix}V\phi\hat{r} - \frac{\partial J_V(\lambda r)}{\partial r}\begin{matrix}\cos\\\sin\end{matrix}V\phi\hat{\phi}\right]e^{ih_1z}, \tag{33a}$$

$$\boldsymbol{N}_{\substack{e\\o}V}(\lambda, h_1) = \frac{1}{k}\left[ih_1\frac{\partial J_V(\lambda r)}{\partial r}\begin{matrix}\cos\\\sin\end{matrix}V\phi\hat{r} \mp \frac{ih_1V}{r}J_V(\lambda r)\begin{matrix}\sin\\\cos\end{matrix}V\phi\hat{\phi}\right.$$
$$\left. + \lambda^2 J_V(\lambda r)\begin{matrix}\cos\\\sin\end{matrix}V\phi\hat{z}\right]e^{ih_1z}. \tag{33b}$$

由边界条件确定下标 e 或 o 后，将(33)式代入(17)、(22)和(25)式便求出自由空间完纯导电尖劈和半片的磁型并矢格林函数

$$\bar{\boldsymbol{G}}_m(\boldsymbol{R}/\boldsymbol{R}') = \int_0^\infty d\lambda\sum_V\left(\frac{\pi ik}{h_1}\right)\left(\frac{2-\delta_0}{2\pi(2\pi-\phi_0)\lambda}\right)\{[\boldsymbol{M}_{oV}(\lambda, h_1)\boldsymbol{N}'_{oV}(\lambda, -h_1)$$
$$+ \boldsymbol{N}_{eV}(\lambda, h_1)\boldsymbol{M}_{eV}(\lambda, -h_1)]\mu(z-z')$$
$$+ [\boldsymbol{M}_{oV}(\lambda, -h_1)\boldsymbol{N}'_{oV}(\lambda, h_1) + \boldsymbol{N}_{eV}(\lambda, -h_1)$$
$$\times \boldsymbol{M}'_{eV}(\lambda, h_1)]\mu(z'-z)\} \tag{34a}$$

和电型并矢格林函数

$$\bar{\boldsymbol{G}}_e(\boldsymbol{R}/\boldsymbol{R}') = \int_0^\infty d\lambda\sum_V\frac{\pi i}{h_1}\left(\frac{2-\delta_0}{2\pi(2\pi-\phi_0)\lambda}\right)\{[\boldsymbol{M}_{eV}(\lambda, h_1)\boldsymbol{M}'_{eV}(\lambda, -h_1)$$
$$+ \boldsymbol{N}_{oV}(\lambda, h_1)\boldsymbol{N}'_{0V}(\lambda, -h_1)]\mu(z-z')$$
$$+ [\boldsymbol{M}_{eV}(\lambda, -h_1)\boldsymbol{M}'_{eV}(\lambda, h_1) + \boldsymbol{N}_{oV}(\lambda, -h_1)\boldsymbol{N}'_{0V}(\lambda, h_1)]$$
$$\times \mu(z'-z)\} + \bar{\boldsymbol{G}}_{el}(\boldsymbol{R}/\boldsymbol{R}'), \tag{34b}$$

式中

$$\bar{\boldsymbol{G}}_{el}(\boldsymbol{R}/\boldsymbol{R}') = -\int_0^\infty d\lambda\sum_V\left(\frac{2-\delta_0}{2\pi(2\pi-\phi_0)\lambda}\right)\left(\frac{2\pi\lambda^2}{k^2}\right)J_V(\lambda r)\sin V\phi J_V(\lambda r')$$
$$\times \sin V\phi'\delta(z-z')\hat{z}\hat{z}. \tag{35}$$

利用分布理论中的关系式

$$\frac{\delta(r-r')\delta(\phi-\phi')}{r} = \int_0^\infty J_V(\lambda r)J_V(\lambda r')\lambda d\lambda\sum_V\frac{2-\delta_0}{(2\pi-\phi_0)}\sin V\phi\sin V\phi', \tag{36}$$

则(35)式可改写为

$$\bar{\boldsymbol{G}}_{el}(\boldsymbol{R}/\boldsymbol{R}') = -\frac{1}{k^2}\frac{\delta(r-r')\delta(\phi-\phi')\delta(z-z')}{r}\hat{z}\hat{z}. \tag{37}$$

椭圆柱体的标量波函数是

$$\Phi_{\substack{e\\o}m}(\lambda, h) = S_{\substack{e\\o}m\lambda}(v)R_{\substack{e\\o}m\lambda}(u)e^{ihz}, \tag{38}$$

式中 $S_{\substack{e\\o}m\lambda}(v)$ 和 $R_{\substack{e\\o}m\lambda}(u)$ 分别表示角向和径向的椭圆柱体波函数；变量 u、v 和参数 c 的定义如图 3 所示．本征值方程是 $k^2=\lambda^2+h_1^2$；归一化常数为 $C_{MV}=C_{NV}=\dfrac{1}{\pi^2\lambda I_{\substack{e\\o}m\lambda}}$，式中 $I_{\substack{e\\o}m\lambda}=\int_0^{2\pi}S^2_{\substack{e\\o}m\lambda}(v)dv$.

将(38)式代入(2)式，得

$$\boldsymbol{M}_{\substack{e\\o}m}(\lambda, h_1) = \frac{1}{c\sqrt{\cos h^2u-\cos^2v}}\left[R_{\substack{e\\o}m\lambda}(u)\frac{\partial S_{\substack{e\\o}m\lambda}(v)}{\partial v}\hat{\boldsymbol{u}}\right.$$

$$-S_{\substack{e\\o}m\lambda}(v)\frac{\partial R_{\substack{e\\o}m\lambda}(u)}{\partial u}\hat{v}\Big]e^{ih_1z}, \tag{39a}$$

$$\boldsymbol{N}_{\substack{e\\o}m}(\lambda,h_1)=\frac{1}{k_c\sqrt{\cosh^2u-\cos^2v}}\Big[ih_1S_{\substack{e\\o}m\lambda}(v)\frac{\partial R_{\substack{e\\o}m\lambda}(u)}{\partial u}\hat{u}$$
$$+ih_1R_{\substack{e\\o}m\lambda}(u)\frac{\partial S_{\substack{e\\o}m\lambda}(v)}{\partial v}\hat{v}+c\sqrt{\cosh^2u-\cos^2v}\,\lambda^2R_{\substack{e\\o}m\lambda}(u)S_{\substack{e\\o}m\lambda}(v)\hat{z}\Big]e^{ih_1z}. \tag{39b}$$

将(39)式代入(17)、(22)和(25)式，得到自由空间椭圆柱磁型并矢格林函数

$$\bar{\boldsymbol{G}}_m(\boldsymbol{R}/\boldsymbol{R}')=\int_0^\infty d\lambda\sum_m\left(\frac{\pi ik}{h_1}\right)\left(\frac{1}{\pi^2\lambda I_{\substack{e\\o}m\lambda}}\right)\{[\boldsymbol{M}_{\substack{e\\o}m}(\lambda,h_1)\boldsymbol{N}'_{\substack{e\\o}m}(\lambda,-h_1)$$
$$+\boldsymbol{N}_{\substack{e\\o}m}(\lambda,h_1)\boldsymbol{M}'_{\substack{e\\o}m}(\lambda,-h_1)]\mu(z-z')$$
$$+[\boldsymbol{M}_{\substack{e\\o}m}(\lambda,-h_1)\boldsymbol{N}'_{\substack{e\\o}m}(\lambda,h_1)+\boldsymbol{N}_{\substack{e\\o}m}(\lambda,-h_1)\boldsymbol{M}'_{\substack{e\\o}m}(\lambda,h_1)]$$
$$\times\mu(z'-z)\} \tag{40a}$$

和电型并矢格林函数

$$\bar{\boldsymbol{G}}_e(\boldsymbol{R}/\boldsymbol{R}')=\int_0^\infty d\lambda\sum_m\left(\frac{\pi i}{h_1}\right)\left(\frac{1}{\pi^2\lambda I_{\substack{e\\o}m\lambda}}\right)\{[\boldsymbol{M}_{\substack{e\\o}m}(\lambda,h_1)\boldsymbol{M}'_{\substack{e\\o}m}(\lambda,-h_1)$$
$$+\boldsymbol{N}_{\substack{e\\o}m}(\lambda,h_1)\boldsymbol{N}'_{\substack{e\\o}m}(\lambda,-h_1)]\mu(z-z')$$
$$+[\boldsymbol{M}_{\substack{e\\o}m}(\lambda,-h_1)\boldsymbol{M}'_{\substack{e\\o}}(\lambda,h_1)+\boldsymbol{N}_{\substack{e\\o}m}(\lambda,-h_1)$$
$$\times\boldsymbol{N}'_{\substack{e\\o}m}(\lambda,h_1)]\mu(z'-z)\}+\bar{\boldsymbol{G}}_{el}(R/R'), \tag{40b}$$

式中

$$\bar{\boldsymbol{G}}_{el}(\boldsymbol{R}/\boldsymbol{R}')=-\int_0^\infty d\lambda\sum_m\left(\frac{1}{\pi^2\lambda I_{\substack{e\\o}m\lambda}}\right)\left(\frac{2\pi\lambda^2}{k^2}\right)S_{\substack{e\\o}m\lambda}(v)R_{\substack{e\\o}m\lambda}(u)S_{\substack{e\\o}m\lambda}(v')$$
$$\times R_{\substack{e\\o}m\lambda}(u')\delta(z-z')\hat{z}\hat{z}. \tag{41}$$

角向和径向的椭圆柱体波函数可写成贝塞尔函数的级数形式[6]

$$S_{em\lambda}(v)R_{em\lambda}(u)=\sqrt{\frac{\pi}{2}}\sum_n{}'(i)^{n-m}D_n^m\cos n\phi J_n(\lambda r), \tag{42a}$$

$$S_{om\lambda}(v)R_{om\lambda}(u)=\sqrt{\frac{\pi}{2}}\sum_n{}'(i)^{n-m}F_n^m\sin n\phi J_n(\lambda r). \tag{42b}$$

将(42)式代入(41)式，利用恒等关系(28)式，得

$$\bar{\boldsymbol{G}}_{el}(\boldsymbol{R}/\boldsymbol{R}')=-\frac{1}{k^2}\frac{\delta(r-r')\delta(\phi-\phi')\delta(z-z')}{r}\hat{z}\hat{z}. \tag{43}$$

为了便于计算，将 δ 函数从圆柱坐标变换到椭圆柱坐标[7]

$$\frac{\delta(r-r')\delta(\phi-\phi')\delta(z-z')}{r}=\frac{\delta(v-v')\delta(u-u')\delta(z-z')}{c^2(\cosh^2u-\cos^2v)}, \tag{44}$$

则(43)式可重新写为

$$\bar{\boldsymbol{G}}_{el}(\boldsymbol{R}/\boldsymbol{R}')=-\frac{1}{k^2}\frac{\delta(v-v')\delta(u-u')\delta(z-z')}{c^2(\cosh^2u-\cos^2v)}\hat{z}\hat{z}. \tag{45}$$

上述推导的另一个结果是得到关系式

$$\frac{\delta(v-v')\delta(u-u')}{c^2(\cos h^2 u-\cos^2 v)}=\int_0^\infty d\lambda\sum_m\left(\frac{2\lambda}{\pi I_{\substack{e\\o}m\lambda}}\right)S_{\substack{e\\o}m\lambda}(v)R_{\substack{e\\o}m\lambda}(u)S_{\substack{e\\o}m\lambda}(v')R_{\substack{e\\o}m\lambda}(u'). \tag{46}$$

四、结　　论

本文用算子法求解了自由空间广义柱体并矢格林函数，给出了完纯导电尖劈、半片和椭圆柱并矢格林函数去掉 h 积分的表示式，作为已发表有关文献中给出的去掉 λ 积分表示式的补充[2,3]，所得结果有一定的实用价值．还利用分布理论中的关系式，证明了电型并矢格林函数的附加项的本征函数展开式与 δ 函数表示式相同．

参　考　文　献

[1] 潘生根，电子科学学刊，**6**(1984)，181.

[2] C. T. Tai, Math. Note 28, Weapons Systems Laboratory, Kirland AFB, Albuquerque, NM, July 1973.

[3] C. T. Tai, Dyadic Green's Functions in Electromagnetic Theory, Scranton, PA: Intext Educational, 1971, Chapt. 7—10.

[4] V. S. Vladimirov, Generalized Functions in Mathematical Physics, Moscow, Mir Publishers, 1979, p. 110.

[5] C. T. Tai，来华讲学专题文选，华东师范大学编，1979年11月，第92页.

[6] J. A. Stratton, Electromagnetic Theory, McGraw-Hill, 1941, p. 386.

[7] V. S. Vladimirov, Generalized Functions in Mathematical Physics, Moscow, Mir Publishers, 1979, p. 26.

COMPUTATION OF DYADIC GREEN'S FUNCTIONS FOR GENERALIZED CYLINDERS IN FREE SPACE

Pan Shenggen

(Shanghai University of Science and Technology)

Dyadic Green's function is useful for solving the boundary problems in electromagnetic theory. The key problem involved is how to deal with the additional term in the electric dyadic Green's function in the source region. In this paper, dyadic Green's functions for generalized cylinders in free space are derived with the technique given by the author (1984). The dyadic Green's functions for perfectly conducting wedges, half-planes and elliptic cylinders, whose integrals of continuous spectral h have been elliminated, are given particularly.