

# 曲线边界二维电磁场问题的 直线法全波分析

邱才明 刘述章 林为干  
(电子科技大学, 成都 610054)

**摘要** 本文首次将基于矩阵理论的直线法推广到曲线边界的二维电磁场问题。本文方法具有通用性, 精度高, 计算量小的优点。

**关键词** 二维电磁场问题; 矩阵理论; 曲线边界; 全波分析; 直线法

## 1. 引言

直线法被用于求解偏微分方程<sup>[1-3]</sup>, 也用于理论物理<sup>[4]</sup>。直线法是一种半解析半离散的全波分析方法。它不存在基函数和相对收敛问题。1980年, U. Schulz 和 R. Pregla 等人<sup>[4]</sup>建立了基于矩阵理论的直线法全波分析。近十年来, 人们又做了大量的工作。

本文方法是基于矩阵理论的直线法模型, 较文献[5]更易用于导出处理多层介质问题的递推公式, 而且本方法有望用于曲线边界的微波和毫米波多层介质平面传输线。该工作正在进行。

## 2. 准任意区域波动方程的求解

如图1所示, 设区域为 $\Omega$ , 虚拟边界为 $s_i (i=1, 2, 3, 4)$ , 假定 $s_1$ 和 $s_2$ 边界为直线,  $s_3$ 和 $s_4$ 为任意曲线。图2中,  $x_i = x_0 + ih, i=1, 2, \dots, N$ , 其中 $N$ 为离散线总数,  $h$ 为间距。

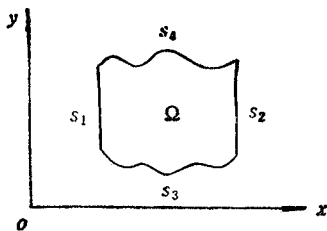


图1 二维曲线区域

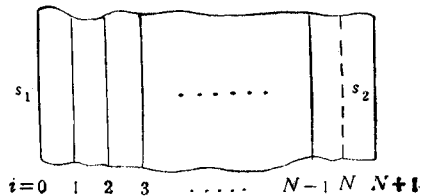


图2 曲线区域的直线划分

若 $\Omega$ 区域波方程为

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + k^2 u = 0 \quad (1)$$

用二阶差分算子代替微分算子 $\partial^2/\partial x^2$ <sup>[4]</sup>, (1)式变为

$$h^2 d^2 u / dy^2 - ([P] - h^2 k^2 [I]) u = -\xi \quad (2)$$

式中

$$\mathbf{u} = [u_1(y), u_2(y), \dots, u_N(y)]^T; \quad \xi = [\xi_1(y), \xi_2(y), \dots, \xi_N(y)]$$

[P] 为三对角矩阵; [I] 为单位矩阵.

同理, 四阶差分近似后的(1)式为

$$[(1 - h^2k^2/12)[I] - [P]/12]h^2d^2\mathbf{u}/dy^2 - [[P] - (1 - h^2k^2/12) \times h^2k^2[I]]\mathbf{u} = -(\xi + h^2\xi''/12) \quad (3)$$

式中  $\xi''$  为  $\xi$  的二阶导数. 为了求解(2)和(3)式, 必须作一线性变换, 使 [P] 对角化. 为此引入变换矢量  $\mathbf{U}$ . 经过一系列线性运算, (2)式成为

$$h^2d^2\mathbf{U}/dy^2 - ([\lambda] - h^2k^2[I])\mathbf{U} = -[T]^{-1}\xi \quad (4)$$

式中

$$\mathbf{U} = [T]^{-1}\mathbf{u}; \quad [\lambda] = [T]^{-1}[P][T]$$

变换矩阵 [T] 和本征值矩阵  $[\lambda]$  只取决于侧面边界. 对于 Dirichlet 和 Neumann 问题, 有解析关系, 如表 1 所示. 表中 D 代表 Dirichlet, N 代表 Neumann.

表 1 不同边界组合对应于 [P] 矩阵的本征值  $[\lambda]$  和变换矩阵 [T]

边界条件		$T_{ij}$	$\lambda_i$
$s_1$	$s_2$		
N	D	$\sqrt{\frac{2}{N+1}} \cos \frac{i(j-0.5)\pi}{N+1}$	$4\sin^2 \frac{(j-0.5)\pi}{2N+1}$
D	N	$\sqrt{\frac{2}{N+1}} \sin \frac{i(j-0.5)\pi}{N+1}$	$4\sin^2 \frac{(j-0.5)\pi}{2N+1}$
D	N	$\sqrt{\frac{2}{N+1}} \sin \frac{j\pi}{N+1}$	$4\sin^2 \frac{j\pi}{2(N+1)}$
N	N	$\sqrt{\frac{2}{N+1}} \cos \frac{i(j-1)\pi}{N+1}$	$4\sin^2 \frac{(j-1)\pi}{2(N+1)}$

对(3)式做同样的线性变换, 再与(4)式统一起来, 用下列方程描述:

$$h^2d^2U_i/dy^2 - K_i^2U_i = -F_i, \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (5)$$

式中

$$K_i^2 = \begin{cases} \lambda_i - h^2k^2, & \text{二阶近似} \\ [\lambda_i - (1 - h^2k^2/12)h^2k^2]/[1 - (\lambda_i + h^2k^2)/12], & \text{四阶近似} \end{cases}$$

$$F_i = \begin{cases} [T]^{-1}\xi, & \text{二阶近似} \\ \text{diag}\{1/[1 - (\lambda_i + h^2k^2)/12]\}[T]^{-1}(\xi + h^2\xi''/12), & \text{四阶近似} \end{cases}$$

(5)式的解可写为如下形式:

$$U_i(y) = A_i \text{ch}(K_i y/h) + B_i \text{sh}(K_i y/h) + U_i^{(p)}(y) \quad (6)$$

为了利用图 2 中  $s_3$  和  $s_4$  的边界条件, 首先必须将  $U_i(y)$  反变换到原域中去,

$$\mathbf{u} = [T]\mathbf{U} \quad (7)$$

即

$$u_i(y) = \sum_{i=1}^N T_{ii}(A_i \operatorname{ch}(K_i y/h) + B_i \operatorname{sh}(K_i y/h) + U_i^{(P)}(y)) \quad (8)$$

其中  $2N$  个常数  $A_i$  和  $B_i (i=1, 2, \dots, N)$  可利用边界  $s_3$  和  $s_4$  求解。(8)式是(1)式的半解析解,一旦  $A_i$  和  $B_i$  确定,  $u_i(y)$  便成为坐标  $y$  的解析表达式。

### 3. 任意曲线区域常系数椭圆型偏微分方程

本节处理的区域是如图 3 所示的任意曲线边界。事实上,图 3 可以通过图 2 中  $s_1$  和  $s_2$  的长度为零时得到。假定区域的划分与上节相同,则目前的边值问题就成为椭圆型偏微分方程问题。

$$a \partial^2 u / \partial x^2 + b \partial^2 u / \partial y^2 + cu = f(x, y) \quad (9)$$

$$a, b > 0, (x, y) \in \Omega + s$$

且

$$\left. \begin{aligned} u|_{s_1} &= \varphi_0, & u|_{s_2} &= \varphi_1 \\ u|_{s_3} &= \phi_0, & u|_{s_4} &= \phi_1 \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

按照与上节相同的步骤,(9)式变为

$$b \frac{d^2 \mathbf{u}}{dy^2} + \left( -\frac{a}{h^2} [P] + c [I] \right) \mathbf{u} = \mathbf{f} - \boldsymbol{\xi} \quad (11)$$

式中

$$\mathbf{f} = [f_1(y), f_2(y), \dots, f_N(y)]'$$

作变换  $\mathbf{U} = [T]^{-1} \mathbf{u}$ , (11) 式化简为

$$d^2 U_i / dy^2 - K_i^2 U_i = F_i \quad (12)$$

式中

$$K_i^2 = \frac{a}{bh^2} \lambda_i - \frac{c}{b}; \quad \mathbf{F} = \frac{1}{b} [T]^{-1} (\mathbf{f} - \boldsymbol{\xi})$$

类似于上节,(12)式为  $N$  个无耦合独立方程,其解为

$$U_i(y) = A_i \operatorname{ch}(K_i y) + B_i \operatorname{sh}(K_i y) + U_i^{(P)}(y) \quad (13)$$

式中  $U_i^{(P)}$  是方程的特解,可以解析地求出,故

$$u_i(y) = \sum_{i=1}^N T_{ii}(A_i \operatorname{ch} K_i y + B_i \operatorname{sh} K_i y + U_i^{(P)}(y)) \quad (14)$$

(14)式中的未知系数  $A_i$  和  $B_i$  可由边界  $s_3$  和  $s_4$  求出。这样,在每根离散线上,可得到(9)式的解析表示式。

### 4. 具体应用举例

为证明方法的有效性,现分析如图 4 所示的方-圆过渡波导。方圆过渡波导的边值问题为

$$\left. \begin{aligned} \partial^2 u / \partial x^2 + \partial^2 u / \partial y^2 + k_c^2 u &= 0 \\ \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=-d, d} &= 0, \quad \frac{\partial u}{\partial n} \Big|_{y=\pm\sqrt{R^2-x^2}} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

(15)式的解为

$$u_i(y) = \sum_{i=1}^N T_{ii}[(A_i \operatorname{ch}(K_i y/h) + B_i \operatorname{sh}(K_i y/h))] \quad (16)$$

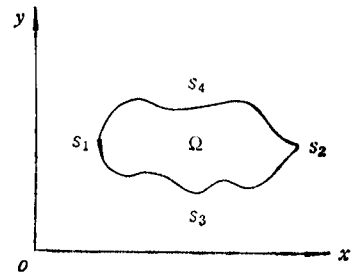


图 3 任意二维曲线区域

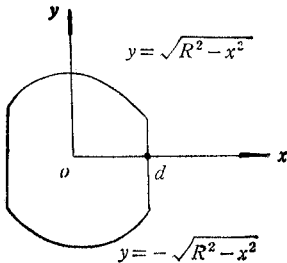


图4 方-圆过渡波导

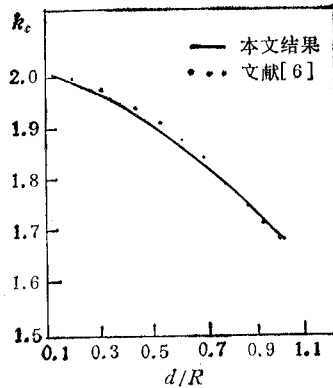


图5 方-圆过渡波导的主模特性

式中

$$T_{ji} = \sqrt{\frac{2}{N+1}} \cos \frac{i(j-1)\pi}{N+1}; \quad \lambda_i = 4 \sin^2 \frac{(i-1)\pi}{2(N+1)}$$

$$K_i^2 = [\lambda_i - h^2 k_c^2 / 12] h^2 k_c^2 / [1 - (\lambda_i + h^2 k_c^2) / 12]$$

利用  $\partial u / \partial n|_{y=\pm\sqrt{R^2-x^2}} = 0$ , 得

$$\begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} \\ G_{21} & G_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [A] \\ [B] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (17)$$

式中  $[A] = [A_1, A_2, \dots, A_N]'$ ;  $[B] = [B_1, B_2, \dots, B_N]'$ ;  $G_{ij}, (i, j = 1, 2)$  为  $N \times N$  阶系数矩阵。(17)式的系数行列式为零; 即  $\det[G(k_c)] = 0$ , 可求出截止波数  $k_c$ , 如图5所示。计算结果与文献[6]一致。

## 5. 结论

本文利用基于矩阵理论的直线法模型解决了曲边界上二维电磁场问题, 同时, 应用该方法分析了具体实例。计算结果与文献吻合良好。这说明本工作的正确性。具体计算中表明, 该方法具有通用, 准确和收敛快的优点。

## 参 考 文 献

- [1] O. A. Liskovets, The method of lines, Review, Differential'nye Uraveniya, Vol.1, No.12, (1965), pp.1662—1678.
- [2] B. P. Demidowitsch et al., Numerical methods of analysis (in German), VEB Wissenschaften, Berlin, (1968), Chapter 5.
- [3] S. G. Michlin et al., Naeherungsmethoden zur Loesung von Differential und Integral-Gleichungen, Teubner, Leipzig, (1969), pp. 238—243.
- [4] U. Schulz, The method of lines—A new technique for the analysis of planar microwave structures (in German), Ph. D. Thesis, Fern University, Hagen, FRG, (1980).
- [5] 洪伟, 电子科学学报, 9(1987)4, 309—316.
- [6] 徐金平, 李嗣范, 电子学报, 18(1990)4, 25—29.
- [7] N. Marcuvitz, Waveguide Handbook, McGraw-Hill, New York, (1951), pp. 317.

## FULL-WAVE ANALYSIS OF 2-D BOUNDARY VALUE PROBLEMS WITH CURVED BOUNDARIES BY METHOD OF LINES

Qiu Caiming   Liu Shuzhang   Lin Weigan

*(University of Electronic Science and Technology of China, Chengdu 610054)*

**Abstract**      The 2-D EM boundary value problems with curved boundaries are first treated by the method of lines based on the matrix theory. The method presented here has following advantages: generality, high accuracy and small computations.

**Key words**      2-D boundary value problems; Matrix theory; Curved boundaries; Full-wave analysis, Method of lines