第 9 卷 第 1 期
1987 年 1 月

电子科学学刊
JOURNAL OF ELECTRONICS

Vol. 9, No. 1
Jan., 1987

电介质为各向异性的电容新公式*

陈 燊 年
（华侨大学物理系）

提 要

本文应用位移电流，导出了用张量介电常数的逆矩阵元素和广义正交坐标表示的各向异性的电容特性公式，从而提供计算电容的一种新的简便方法．文中以实例对本文导出的新公式进行了验证．

1. 引言

电容器现在已成为电子设备中大量使用的主要元件之一，但人们对它尚缺乏深入的理论研究，至今尚缺少一个计算其电容的普遍公式．这一点只需与其它三种电子元件的积分形式的已知公式[1]

$$R=\int\rho\frac{dl}{s}$$

$$L_{ii}=\frac{\mu}{4\pi}\oint\oint\frac{d\boldsymbol{l}_i\cdot d\boldsymbol{l}_i'}{r_{ii}}$$

$$M_{ik}=\frac{\mu}{4\pi}\oint\oint\frac{d\boldsymbol{l}_i\cdot d\boldsymbol{l}_k}{r_{ik}}$$

相类比就可看出，对电容元件讲也应存在积分形式的公式．本文从复数形式的位移电流与电场间的关系出发，首先导出了介质为各向异性的电容特性公式，当介质为各向同性的特殊情况，就是上述所指应存在的积分形式的公式．

近年来，愈来愈多的电容器采用各向异性的介质材料，如纤维、层状介质、陶瓷晶体等．它们具有介电常数高、介质耗损小、温度系数范围广等优点．因而，建立较普遍的介质为各向异性的电容特性公式是有实际意义的．

2. 电介质为各向异性的电容特性公式

现研究一个电容器接在角频率为 ω 的稳态正弦电路上．设电容器内的电介质没有松驰极化并且是线性的各向异性材料，若引用广义正交坐标变量 u_1、u_2 和 u_3，则介质中电场强度与电位移矢量同相，其复数形式为

$$\hat{\boldsymbol{E}}(u_1u_2u_3t)=\boldsymbol{E}(u_1u_2u_3)e^{i\omega t},\quad \hat{\boldsymbol{D}}(u_1u_2u_3t)=\boldsymbol{D}(u_1u_2u_3)e^{i\omega t},\tag{1}$$

且它们分量间有关系

$$\hat{D}_n(u_1u_2u_3t)=\sum_{m=1}^{3}\varepsilon_{nm}(u_1u_2u_3)\hat{E}_m(u_1u_2u_3t),\ (n=1、2、3),\tag{2}$$

* 1985 年 7 月 22 日收到，1986 年 7 月 30 日修改定稿．

式中 ε_{nm} 是介电常数张量.

由 (1) 和 (2) 式以及位移电流密度 $\hat{j}^D$ 的定义得

$$\hat{j}_n^D=\frac{\partial\hat{D}_n}{\partial t}=i\omega\sum_{m=1}^{3}\varepsilon_{nm}\hat{E}_m,\ (n=1、2、3). \tag{3}$$

若 $[\varepsilon_{nm}]$ 是非奇异矩阵,则 (3) 式有唯一解

$$\hat{E}_n=\sum_{m=1}^{3}\varepsilon_{nm}^{-1}\frac{\hat{j}_m^D}{i\omega},\quad (n=1、2、3), \tag{4}$$

式中 ε_{nm}^{-1} 是张量介电常数的逆矩阵

$$[\varepsilon_{nm}]^{-1}=\begin{bmatrix}\varepsilon_{11}^{-1} & \varepsilon_{12}^{-1} & \varepsilon_{13}^{-1}\\ \varepsilon_{21}^{-1} & \varepsilon_{22}^{-1} & \varepsilon_{23}^{-1}\\ \varepsilon_{31}^{-1} & \varepsilon_{32}^{-1} & \varepsilon_{33}^{-1}\end{bmatrix} \tag{5}$$

中的元素.

若以 l 表示位于电容器内 $\hat{\boldsymbol{j}}^D$ 的电流线,它在三条广义坐标线上的投影分别记为 l_n, $(n=1、2、3)$,则 (4) 式沿 l_n 的线积分为

$$\int_0^{l_n}\hat{E}_nh_ndu_n=\sum_{m=1}^{3}\int_0^{l_n}\varepsilon_{nm}^{-1}\frac{\hat{j}_m^D}{i\omega}h_ndu_n,\quad (n=1、2、3), \tag{6}$$

式中 $h_n,(n=1、2、3)$ 是广义正交坐标的度量系数.

若以 $S(u_1u_2u_3)$ 表示电容器内通过坐标点 $(u_1u_2u_3)$ 的等位面, 则对于任意形状的电容器,可把上述的 $\hat{\boldsymbol{j}}^D$ 理解为通过 $S(u_1u_2u_3)$ 的平均密度, 它在广义坐标线上的分量为[2]

$$\hat{j}_n^D=\frac{\hat{I}_n^D}{S_n(u_1u_2u_3)}\quad (n=1、2、3), \tag{7}$$

式中 $S_n(u_1u_2u_3)$ 是 $S(u_1u_2u_3)$ 的分量, $\hat{I}_n^D$ 是通过 $S_n(u_1u_2u_3)$ 的位移电流强度.

设介质内没有自由电荷分布, 则在电容器两电极间的区域内, $\boldsymbol{D}$ 的通量管的任一横截面的通量都相等,任一横截面的 $\hat{\boldsymbol{D}}$ 通量对时间的微商,亦即位移电流强度也必相等.因而,把 (7) 式代入 (6) 式,在右边被积函数中 $\hat{I}_n^D$ 为恒量,可提到积分号外,又依全电流连续性,可作变换[3] $\hat{I}_n^D=\hat{I}_n$, $\hat{I}_n$ 为电容器极板上的传导电流 $\hat{I}$ 的一个组成部分. 于是,由 (6) 式得

$$\int_0^{l_n}\hat{E}_nh_ndu_n=\sum_{m=1}^{3}\frac{\hat{I}_m}{i\omega}\int_0^{l_n}\varepsilon_{nm}^{-1}\frac{h_ndu_n}{S_m(u_1u_2u_3)},\ (n=1、2、3). \tag{8}$$

引入复电压 $\hat{V}$, 其分压为

$$\hat{V}_n=\int_0^{l_n}\hat{E}_nh_ndu_n,\quad (n=1、2、3). \tag{9}$$

把 (8) 式表成矩阵形式为

$$[\hat{V}]=\frac{1}{i\omega}\left[\frac{1}{C}\right][\hat{I}]. \tag{10}$$

可见,稳态正弦电路只含一个各向异性电容元件时,电路的欧姆定律表现为一个矩阵方程的形式. (10) 式中复阻抗矩阵

$$\frac{1}{i\omega}\left[\frac{1}{C}\right]=\frac{1}{i\omega}\begin{bmatrix}\frac{1}{C_{11}} & \frac{1}{C_{12}} & \frac{1}{C_{13}} \\ \frac{1}{C_{21}} & \frac{1}{C_{22}} & \frac{1}{C_{23}} \\ \frac{1}{C_{31}} & \frac{1}{C_{32}} & \frac{1}{C_{33}}\end{bmatrix}$$

包含一个倒电容矩阵 $\left[\frac{1}{C}\right]$，其元素的倒数

$$C_{nm}=\frac{1}{\int_0^{l_n}\varepsilon_{nm}^{-1}\frac{h_n du_n}{S_m(u_1u_2u_3)}}，(n、m=1、2、3) \tag{11}$$

就是我们所期望导出的介质为各向异性的电容特性公式.

当某种各向异性介质的三个主轴与广义正交三个坐标线重合时，(5)式简化成对角矩阵而且等于

$$[\varepsilon_{nm}]^{-1}=\begin{bmatrix}\frac{1}{\varepsilon_{11}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\varepsilon_{22}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\varepsilon_{33}}\end{bmatrix}.$$

相应地，此时 (11) 式通过 ε_{nn} 表出为

$$C_{nn}=\frac{1}{\int_0^{l_n}\frac{h_n du_n}{\varepsilon_{nn}(u_1u_2u_3)S_n(u_1u_2u_3)}}，(n=1、2、3). \tag{12}$$

当电容器为同心球形、同轴柱形和平行板等对称形状时，显然 (12) 式中可取在两电极间的任意一条电位降落为积分路径.

例　求平行板晶体电容器的电容[4]

设晶体三个主轴与三个直角坐标轴一致，且令与平板法线平行的晶体主轴为 z 轴，则有

$$\varepsilon_{nm}=0\quad(n\neq m)\ 和\ S_z=S,$$

S 是平板面积. 若 d 表示平行板和晶体的共同厚度，则选用直角坐标系统后，由 (12) 式得

$$C=\frac{1}{\int_0^d\frac{dz}{\varepsilon_{zz}S}}=\frac{\varepsilon_{zz}S}{d}.$$

3. 电介质为各向同性的电容特性公式

显然，当 $\varepsilon_{11}=\varepsilon_{22}=\varepsilon_{33}=\varepsilon$ 时，(12) 式成为介质为各向同性的电容特性公式

$$C_n=\frac{1}{\int_0^{l_d}\frac{h_n du_n}{\varepsilon(u_1u_2u_3)S_n(u_1u_2u_3)}}，(n=1、2、3). \tag{13}$$

它在三种常用坐标系统中的表式为:

直角坐标系统

$$C_x=\frac{1}{\int_0^{l_x}\frac{dx}{\varepsilon(xyz)S_x(xyz)}},\quad C_y=\frac{1}{\int_0^{l_y}\frac{dy}{\varepsilon(xyz)S_y(xyz)}},\quad C_z=\frac{1}{\int_0^{l_z}\frac{dz}{\varepsilon(xyz)S_z(xyz)}};$$

圆柱坐标系统

$$C_r=\frac{1}{\int_0^{l_r}\frac{dr}{\varepsilon(r\varphi z)S_r(r\varphi z)}},\quad C_\varphi=\frac{1}{\int_0^{l_\varphi}\frac{rd\varphi}{\varepsilon(r\varphi z)S_\varphi(r\varphi z)}},\quad C_z=\frac{1}{\int_0^{l_z}\frac{dz}{\varepsilon(r\varphi z)S_z(r\varphi z)}};$$

球坐标系统

$$C_r=\frac{1}{\int_0^{l_r}\frac{dr}{\varepsilon(r\theta\varphi)S_r(r\theta\varphi)}},\quad C_\theta=\frac{1}{\int_0^{l_\theta}\frac{rd\theta}{\varepsilon(r\theta\varphi)S_\theta(r\theta\varphi)}},\quad C_\varphi=\frac{1}{\int_0^{l_\varphi}\frac{r\sin\theta d\varphi}{\varepsilon(r\theta\varphi)S_\varphi(r\theta\varphi)}}.$$

若以 $\boldsymbol{j}^D$ 的电流线 l 作为新的积分参量，则在以上三种坐标系统中的等位面均可同样地表为 $S(u_1u_2u_3)=S(l)$，并且由于 $d\boldsymbol{l}$ 的方向就是 $S(l)$ 的法线方向，因而它们大小之比等于在任一方向上投影之比，亦即

$$\frac{dl}{S(l)}=\frac{dx}{S_x}=\frac{dy}{S_y}=\frac{dr}{S_r}=\frac{r\sin\theta d\varphi}{S_\varphi}=\cdots.$$

可见，凡不为零的 C_n，$(n=1、2、3)$ 在任一常用坐标系统中都取相同的形式

$$C=\frac{1}{\int_0^{l}\frac{dl}{\varepsilon(l)\ S(l)}}. \tag{14}$$

(14) 式以积分形式表示的任意电容器的电容量都取决于它的几何形状、尺寸以及充于其内的介质性质及其分布等特性．这一公式是电容定义式$C=\frac{q}{V_1-V_2}$之外的又一个表达电容特性的普遍公式，我们简称为电容特性公式．

若电容器内介质作 p 层分布，且每层分界面都是等位面，则用很薄的导电箔代替每个等位面，p 层分布就可看成 p 个电容的串联，因而由(14)式得多层分布的电容特性公式为

$$C=\frac{1}{\sum_{i=1}^{p}\int_{l_{i-1}}^{l_i}\frac{dl_i}{\varepsilon_i(l)S_i(l)}}. \tag{15}$$

若电容器内介质作 p 区分布，且每区分界面都是电位移面．类似地，把 p 区分布看成 p 个电容的并联，由 (14) 式得多区分布的电容特性公式为

$$C=\sum_{i=1}^{p}\frac{1}{\int_0^{l}\frac{dl}{\varepsilon_i(l)S_i(l)}}. \tag{16}$$

例 求同心球形电容器的电容

设有两种情况: (1) ε_1 和 ε_2 为作两层分布的均匀介电常数，其分界球面的半径为 R_0; (2) ε_1 和 ε_2 为作两区分布的均匀介电常数，其分界面是通过球心的一个平面．

对于情形(1)，令(15)式中 $p=2$ 和 $S_i(l)=4\pi l^2$，得

$$C=\frac{4\pi}{\frac{1}{\varepsilon_1}\frac{R_0-R_1}{R_1R_0}+\frac{1}{\varepsilon_2}\frac{R_2-R_0}{R_2R_0}};$$

对于情形(2)，令(16)式中 $p=2$ 和 $S_i(l)=2\pi l^2$，得

$$C=2\pi(\varepsilon_1+\varepsilon_2)\frac{R_1R_2}{R_2-R_1},$$

式中 R_1 和 R_2 分别为内外半径. 显然，当分层和分区的分界面消失时，即当 $\varepsilon_1=\varepsilon_2=\varepsilon$ 时，以上两式都化到同心球形电容器的电容公式，即

$$C=4\pi\varepsilon\frac{R_1R_2}{R_2-R_1}.$$

4. 结束语

本文给出一组由(11)式—(16)式的积分形式的电容特性公式是对现有电容理论的一个充实与发展，它们既可用于理论分析，又可供电容器设计使用. 从发展角度看，随着对电容器的各种应用提出更高的要求，建立一个更加完善和科学系统的电容理论将会引起人们的注意.

参 考 文 献

[1] W. B. Cheston, Elementary Theory of Electric and Magnetic Fields, John Wiley and Sons, Inc. New York (1964), 175—179.

[2] [美] L. M. 玛奇德著，电磁场电磁能和电磁波，上册，人民教育出版社，(1983)，46.

[3] R. K. Wangsness, Electromagnetic Fields, John Wiley and Sons, Inc., New York, (1979), 391—394.

[4] [美] W. R. 斯迈思，静电学和电动力学，科学出版社，(1981)，44.

A NEW FORMULA OF CAPACITANCE OF A CAPACITOR WITH ANISOTROPIC DIELECTRIC

Chen Shennian

(Huaqiao University)

In this paper, a new and general formula of capacitance of a capacitor with anisotropic dielectric shown by generalized orthogonal coordinate and inverse matrix of dielectric constant is derived by use of the displacement current. It provides a new and simpler method for computing capacitance of a capacitor. The formula has been checked by several practical examples.