第11卷 第1期　　电子科学学刊　　Vol. 11, No. 1
1989 年 1 月　　JOURNAL OF ELECTRONICS　　Jan., 1989

关于生成有向图的全部有向回路的回路向量空间法*

熊 德 琰
(同 济 大 学，上 海)

摘要　本文提出一个由有向图的(1)有向回路基集或(2)定向回路基集，通过线性组合，生成全部有向回路的算法．文中证明了一条"点数边数相等"原则．根据此原则，得到一个识别有向回路的简单方法，从而使算法的计算时间与对应的无向图算法基本相同．

关键词　有向图；有向回路；回路向量空间法

一、引　言

枚举有向图的有向回路是图论算法中的一个基本问题，在电路与系统、计算机科学等领域中有广泛的应用．例如，利用信号流图或流图分析电子电路或反馈系统时，为了将电路、系统或计算机程序进行最优分解而寻找有向图的最小反馈点(边)集(Minimum Essential Set) 时，都常常需要求出有向图的全部有向回路．

枚举图的回路有三类算法：回路向量空间法、矩阵法和搜索法．回路向量空间法常用于枚举无向图回路．人们熟知：无向图的回路矩阵的秩等于无向图的零度．无向图容易得到一个回路基集或基本回路矩阵．通过基本回路向量的环和运算，删除冗余项后，可获得全部无向回路．环和运算次数是 $O(2^r)$，r 是无向图的零度．对于有向图，由有向回路基集生成全部有向回路的算法却未曾实现过(见文献[1]第 11 章第 4 节)．在作者另一篇论文[2]中提出了一个算法，可以获得有向图的每一个最大强连通子图的有向回路基集．本文进一步讨论由回路基集生成全部有向回路的有关问题和算法．

用(0,1)矩阵表示有向图的有向回路矩阵，通过各最大强连通子图基本有向回路的行向量的环和运算，可以获得有向图的全部有向回路，但同时也得到许多冗余项．问题在于找到一个简单方法识别冗余项．本文定理 1 提供了这样的方法．这样，算法的运行时间可以做到和无向图的对应算法的运行时间一样或较优．

在伍民友等人的论文[3]中，提出一个由有向图的定向回路的基集求全部定向回路的算法．对有向图定义一个基本定向回路矩阵，它包含 0 和 ±1 作为元素，对所有可能的行

* 1987 年 2 月 11 日收到，1987 年 6 月 28 日修改定稿．

向量组合，通过定义在整数域上的运算，删除冗余项(即不共边回路之并)后，可获得完全定向回路矩阵。行向量组合运算次数是 $O(3^r)$，r 是定向回路的秩，等于有向图的零度。从完全定向回路矩阵中挑选出行向量是全 +1 的子矩阵，这就是完全有向回路矩阵。

本文定理 2 是定理 1 的推广，借助此定理，可以从有向图的基本定向回路矩阵获得完全有向回路矩阵，比上述利用文献[3]的算法，计算速度要快得多。

二、有向图的有向回路和定向回路

有向图中任何一个给定了方向的单一回路称为定向回路 (oriented circuit)。若定向回路的所有边的方向一致，则为有向回路 (directed circuit)。所以，有向回路集合是定向回路集合的一个子集，而定向回路和伴随无向图的单一回路是一一对应的。

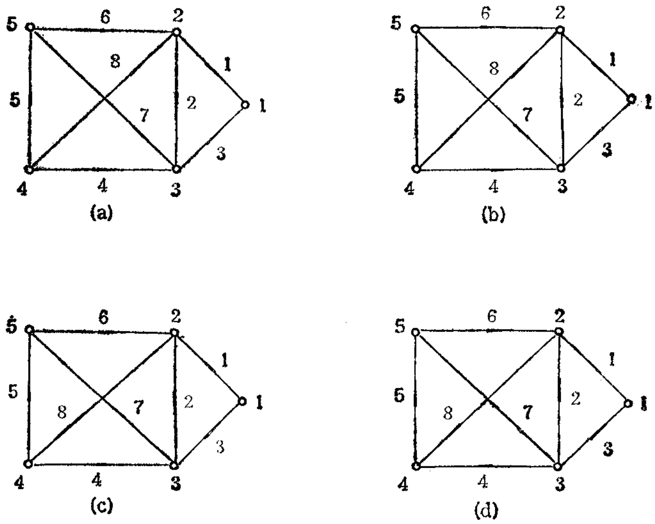

图 1

根据文献[2]，有向图的全部有向回路等于它所含各最大强连通子图的有向回路的总和，强连通图的独立有向回路数等于它的零度，有向图若不存在这样的顶点对：从一点到另一点至少有两条有向路径，则其有向回路总数恰好等于其最大强连通子图零度的总和。

图 1 中列举了有向图形成有向回路的几种基本情形。图 1(a) 中，有向图的最大强连通子图是各孤立的顶点，不存在有向回路；图 1(b) 中移去顶点 4 和 5 得一强连通子图，只含一个有向回路；图 1(c)中有向图是强连通图，其零度为 4，共有 5 个有向回路，其中 4 个是独立的；图 1(d) 也是强连通图，零度为 4，总共有 4 个有向回路，都是独立的。以上四个有向图的定向回路数目相同，都等于 12。

三、由有向回路基集生成全部有向回路

下面推导一个识别基本有向回路环和运算产生的冗余项的简单方法。

引理 1　定向回路(包括有向回路)的环和总是某种类型回路或回路之并．可能情形是：(1)有向回路或不共点有向回路之并，(2)共点有向回路之并，(3)除(1)和(2)以外的定向回路或不共边定向回路之并．

引理 2　任何回路或回路之并的边数等于或大于顶点数．

引理 3　某个回路或回路之并是有向回路或不共点有向回路之并的充要条件是回路的每个顶点的出度和入度都等于 1．

以上引理的正确性是明显的．

定理 1　若分别以边集和顶点集表示一个有向回路，则一组有向回路的环和是有向回路或不共点有向回路之并的充要条件是：边集的环和所得集合的基数(即元素数目)和对应的点集的环和所得集合的基数相等．

证明　由引理 1，有向回路的环和总是某种回路或回路之并．有向回路边集的环和就是环和产生的子图的边集．有向回路的点集中的点恰有一条射出边和一条射入边．点集的环和中的点是存在于奇数个参加环和运算的有向回路中的点．它所关联的边经环和运算后，相同的射出边和/或射入边成对地消失，所以这种点必然存在于环和产生的子图上，并且在子图中它的出度和入度仍是奇数．出现在偶数个参加环和运算的有向回路中的点，经过环和运算后从点集的环和中消失，而它所关联的射出边和射入边，或者完全消失，或者成双地存在于边集的环和中；后一情形此种顶点仍在环和生成子图上，但其出度和/或入度是偶数．所以有向回路点集环和的基数，等于环和产生的子图中出度和入度为奇数的顶点数．

(1) 若点集环和的基数小于边集环和的基数，则产生的子图含有偶数出度和/或入度的顶点，或顶点数小于边数．环和产生的图不会是有向回路或不共点有向回路之并．(必要性)

(2) 若点集环和的基数等于边集环和的基数，这表明产生的子图(某种回路或回路之并)中，出度入度为奇数的顶点数与边数相等．由引理 2，这只当所有奇数都等于 1 才有可能．由引理 3，产生的子图是有向回路或不共点有向回路之并．(充分性)　证毕

定理 1 可称为有向回路的"边数点数相等原则"．

为便于应用定理 1，我们定义一个有向回路矩阵的伴随矩阵 $\mathrm{VD}=(v_{ij})$，其中

$$v_{ij}=\begin{cases}1, & \text{当顶点 } j \text{ 是有向回路 } i \text{ 的顶点}\\ 0, & \text{当顶点 } j \text{ 不是有向回路 } i \text{ 的顶点}\end{cases}$$

VD 称为"有向回路顶点关联矩阵"，VD 与有向回路矩阵 BD 的同序行对应于同一回路．矩阵 BD 与 VD 的行向量分别代表有向回路的边集和点集．环和运算可以用矩阵行向量进行．

不共点有向回路之并也是冗余项，必须把它和单一有向回路区别出来．为此还必须作一次甄别，其法如下：对已通过边数点数相等原则检定的环和产生的边集，两两进行比较，若某个边集包含了另一边集，作为自己的子集，则此边集应予淘汰．

引理 4　三个以上有向回路的环和才能产生有向回路．

两个有向回路的环和只可能是定向回路或不共边定向回路之并，或有向回路之并，所以环和运算应从三个有向回路的组合开始．全部环和运算次数为

$$\sum_{i=3}^{r}\binom{r}{i}=2^r-\frac{r^2}{2}-\frac{r}{2}-1,$$

r 是最大强连通子图的零度.

以图 1(c) 为例写出基本有向回路矩阵 BD_f 和基本有向回路顶点关联矩阵 VD_f 行向量的所有可能的环和,如图 2 所示.

环和运算结果中没有不共点有向回路之并.

	BD 边号								边数	VD 顶点号					点数	回路号
	3	6	7	8	1	2	4	5		1	2	3	4	5		
1	1	0	0	0	1	1	0	0	3	1	1	1	0	0	3	1
2	0	1	0	0	0	1	1	1	4	0	1	1	1	1	4	2
3	0	0	1	0	0	0	1	1	3	0	0	1	1	1	3	3
4	0	1	0	1	0	0	0	1	3	0	1	0	1	1	3	4
$1\oplus2\oplus3$	1	1	1	0	1	0	0	0	4	1	0	1	0	0	2	冗余
$1\oplus2\oplus4$	1	0	0	1	1	0	1	0	4	1	0	0	0	0	1	冗余
$1\oplus3\oplus4$	1	1	1	1	1	1	1	0	7	1	0	0	0	0	1	冗余
$2\oplus3\oplus4$	0	0	1	1	0	1	0	1	4	0	0	0	1	1	2	冗余
$1\oplus2\oplus3\oplus4$	1	0	1	1	1	0	0	1	5	1	1	1	1	1	5	5

图 2

四、由定向回路基集生成全部有向回路

定理 1 可推广如下:

定理 2 若以边集表示有向图的定向回路. 设立一个对应的定向回路的点集，其元素是在定向回路中出度和入度都等于 1 的顶点. 定向回路的环和是有向回路或不共点有向回路之并的充要条件是: 定向回路边集的环和的基数和对应的点集环和的基数相等.

证明 以边集定义的定向回路的环和是某种回路或回路之并. 若有一顶点 v_i 在环和生成子图上,而不存在于对应的定向回路点集的环和中,根据定向回路点集定义，可知顶点 v_i 在偶数个参加环和运算的回路中恰有一条射出边和一条射入边，而在其余回路中,具有偶数 (2 或 0) 条射出边或射入边. v_i 在环和生成子图的出度和/或入度必然是偶数. 若 v_i 不但在环和生成子图上,而且存在于对应的点集环和中，则 v_i 在奇数个参加环和运算的回路中恰有一条射出边和一条射入边,而在其余回路中具有偶数(2 或 0)条射出边或射入边. 所以定向回路点集环和的基数等于环和生成子图中出度和入度为奇数的顶点数. 根据定理 1 的证明,定理 2 成立. 证毕

从定向回路基集出发,通过基本定向回路的环和运算,也可以获得全部有向回路. 同上节一样,根据定理 2, 即边数点数相等原则,先挑选出有向回路和不共点有向回路之并,再淘汰后者. 在运算中仍用(0, 1)矩阵表示定向回路矩阵. 但和上节方法有两点不同:

(1) 代替有向回路顶点关联矩阵,定义定向回路矩阵的伴随矩阵，称为“定向回路顶点关联矩阵”,记为 $VR=(v_{ij})$,其中

$$v_{ij}=\begin{cases}1, & \text{顶点 } j \text{ 是定向回路 } i \text{ 的出度入度都等于 1 的顶点}\\ 0, & \text{其他情形}\end{cases}$$

(2) 两个定向回路的环和可能是有向回路，所以环和运算应从两个基本定向回路的组合开始．全部环和运算次数是

$$\sum_{i=2}^{r}\binom{r}{i}=2^r-r-1,$$

r 是定向回路的秩，等于有向图的零度．

	BR 边号								边数	VR 顶点号					点数	回路号
	3	6	7	8	1	2	4	5		1	2	3	4	5		
1	1	1	0	0	1	0	1	1	5	1	0	0	1	1	3	
2	1	1	1	0	1	0	0	0	4	1	0	1	0	0	2	
3	1	0	0	1	1	0	1	0	4	1	1	0	0	0	2	
4	0	1	1	0	0	1	0	0	3	0	1	0	0	0	1	
$1\oplus2$	0	0	1	0	0	0	1	1	3	0	0	1	1	1	3	1
$1\oplus3$	0	1	0	1	0	0	0	1	3	0	1	0	1	1	3	2
$1\oplus4$	1	0	1	0	1	1	1	1	6	1	1	0	1	1	4	冗余
$2\oplus3$	0	1	1	1	0	0	1	0	4	0	1	1	0	0	2	冗余
$2\oplus4$	1	0	0	0	1	1	0	0	3	1	1	1	0	0	3	3
$3\oplus4$	1	1	1	1	1	1	1	0	7	1	0	0	0	0	1	冗余
$1\oplus2\oplus3$	1	0	1	1	1	0	0	1	5	1	1	1	1	1	5	4
$1\oplus2\oplus4$	0	1	0	0	0	1	1	1	4	0	1	1	1	1	4	5
$1\oplus3\oplus4$	0	0	1	1	0	1	0	1	4	0	0	0	1	1	2	冗余
$2\oplus3\oplus4$	0	0	0	1	0	1	1	0	3	0	0	1	0	0	1	冗余
$1\oplus2\oplus3\oplus4$	1	1	0	1	1	1	0	1	6	1	0	1	1	1	4	冗余

图　3

图 3 中第 1—4 行是基本定向回路，第 7，10 和 15 行是不共边定向回路之并，其余为定向回路，进一步检查表明，环和运算未产生不共点有向回路之并，结果与上节一致．

五、算　　法

由有向回路基集与由定向回路基集生成全部有向回路算法基本相同，与对应的无向图的算法相似(参阅文献[4]第 2,3 和 7 章)．

用文献[2]算法，可以获得有向图各最大不可分强连通子图的有向回路基集的边序列和点序列；用通常已知算法可以获得定向回路基集和相应的点集；这是本算法的初始数据．

本算法的计算机程序包含下面 4 个子程序：

(1) NCOMB　　计算 C 个回路取其中任意 K 个的组合数，即计算 $\binom{C}{K}$.

(2) COMBN　　生成从 C 个回路取 K 个回路的每一个可能的组合．以回路组合向量 C_i，(0，1) 向量，表示这种组合．

(3) RS　　环和运算子程序．方法是根据元素的和是奇数还是偶数决定元素保留

还是取消.

(4) RE 淘汰不共点有向回路之并子程序.

算法的步骤:

S1 建立基本有向回路的边集和点集(或基本定向回路的边集和相应的点集),以 BD 和 VD 分别表示;

S2 令 $K=3$ (若从基本定向回路出发,则 $K=2$), $M=0$ 与 $L=0$;

S3 若 $K>C$, 转 S8;

S4 调用 NCOMB, 得 M(C 中取 K 的组合数);

S5 调用 COMBN, 产生一个回路组合向量 $C(L)$, $L=L+1$;

S6 根据回路组合向量 $C(L)$, 从 BD 和 VD 中调出有关回路的边集和点集的集合. 调用子程序 RS,分别进行环和运算;

S7 分别计算边集环和和点集环和的基数,根据有向回路边数点数相等原则,初次淘汰冗余项. 若 $L<M$,转 S5,否则,若 $K<C$,令 $K=K+1$,转 S4;

S8 调用 RE,再次剔除冗余项;

停机.

本算法的 FORTRAN IV 程序已经在计算机上通过考验.

六、结束语

一般的回路向量空间算法不是有效算法,会产生大量冗余项. 对无向图,冗余项就是不共边回路之并;对有向图,冗余项还有非有向回路的单一回路. 利用文献[3]的算法,第一步,先淘汰不共边定向回路之并,得到定向回路矩阵;第二步,根据全 1 原则,挑选出单一有向回路;而本文的算法,第一步,先运用"边数点数相等原则"淘汰除有向回路和不共点有向回路之并以外的定向回路与不共边定向回路之并,第二步,再淘汰不共点有向回路之并. 本文的第二步对应于文献[3]的第一步,但计算的范围缩小了(见图 3 的例子). 最重要的差别在于本文算法中环和运算次数是 $O(2^r)$,而文献[3]算法中对应的行向量组合计算次数是 $O(3^r)$,其比率与图的规模成指数关系. 作为代价,本文算法一开始需要建立回路的点集或相应矩阵,在图已给定的情况下,这是不困难的,可与边集或回路矩阵的建立同时进行,所增加的运算工作量甚微;此外,除计算边集外,还要计算点集,所增加计算量不到一倍,这些都不影响时间复杂度. 至于因增加点集或相应矩阵而增加的存储空间也不到一倍,不影响空间复杂度.

为了得到有效的回路向量空间算法,对于无向图,有不少图论学者进行了研究,取得一些成果,但是在最不利情况下仍是非多项式算法[5]. 这些改进算法的中心思想是限制环和运算的回路向量空间(文献中称为删节技术),也即限制不共边定向回路的产生. 本文提出的"边数点数相等原则"可以和有效的"删节技术"结合起来,从而得到用于枚举有向图的有向回路的有效的回路向量空间算法.

参　考　文　献

[1] N. Deo, Graph Theory with Applications to Engineering and Computer Science, Prentice Hall Inc, Englewood Cliffs, N. J. 1974, pp287—290.
[2] 熊德琰，电子学报，1986年，第6期，第42--47页.
[3] Y. M. Wu, K. T. Chiu, S. P. Chan, "On Transformations among Network Matrices", Proc. 16th Asilomar Conf. on Circiuts, Systems and Computers, 1982 pp. 515—519.
[4] 陈树柏，左垲，张良震等编，网络图论及其应用，科学出版社，北京，1982，第117—121页。
[5] P. Mateti, N. Deo, *SIAM J. Comput.*, 5(1976) 1, 90—99.

ON CIRCUIT VECTOR SPACE APPROACH FOR GENERATING ALL DIRECTED CIRCUITS OF A DIGRAPH

Xiong Deyan
(Tongji University, Shanghai)

Abstract An algorithm is presented for generating all directed circuits of a directed graph by the linear combination in the basic set of (1) the directed or (2) the oriented circiuts. A theorem named "principle of equality between numbers of edges and vertices" is proved. Based on this pringiple a simple method is worked out. Using it to identify the directed circuits makes the running time of the algorithm for digraphs being mainly the same as for undirected graphs.

Key words Digraph; Directed circuits; Circuit vector space approach