

介质覆盖体上过渡区和焦散区的场分析

林焯森 倪维立

(上海科技大学无线电系 上海 201800)

摘要 本文应用几何绕射理论对介质覆盖体上过渡区和焦散区的场进行了详细地分析。在对过渡区的分析中,通过对留数级数解的修正,实现了场的直接计算。而对于由爬行波产生的焦散区则通过扩展等效电磁流的概念来加以分析。计算结果均与经典解进行了比较以证实本方法的有效性。

关键词 介质覆盖,几何绕射理论,电磁散射

1 引言

介质和介质覆盖体的电磁散射一直是人们感兴趣的问题。介质覆盖体上的爬行波是其中的一个重要内容。对此,人们常以几何绕射理论来加以分析。Rao 和 Hamid^[1]曾对此进行了详细的剖析,他们以介质覆盖无限长圆柱体为对象,给出了内、外两类爬行波的分析方法。而 Kim 等人^[2]则从另一角度对同一问题进行了分析,对爬行波的总绕射场进行了计算。但对与爬行波密切相关的过渡区和焦散区中的场却鲜见分析。本文将对这两个区域中的场进行分析和计算。

2 过渡区场的分析

过渡区的分析是几何绕射理论的一个重要课题,同时也是一个难点。按照传统的分析方法,人们一般把场分为深亮区、过渡区和深阴影区。其中过渡区又有亮区侧和阴影区侧之分。对于曲面绕射来说,深亮区的场可用鞍点法来计算;而深阴影区的场则可通过留数法来得出。但在过渡区,两种方法均被认为无效,在亮区侧鞍点法的无效是由汉克尔函数的近似展开造成的;而在阴影区侧的无效则是因为留数级数解收敛较慢。

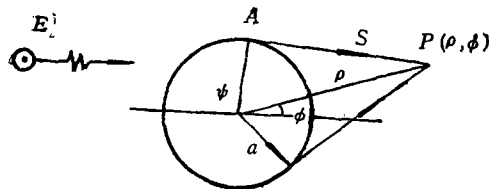


图1 二维导电圆柱的几何结构

文献[2]曾对介质覆盖圆柱体上过渡区的场进行了分析,但其中相应的皮克里斯·卡罗特(Pekeris. Caret)函数过于复杂。本文将重新审察阴影区场的计算方案,以留数法

1993-10-28 收到,1994-05-24 定稿

林焯森 男,1929年生,教授,从事天线及电磁理论领域的研究。

倪维立 男,1967年生,博士生,从事电磁散射方面的研究。

对过渡区的场进行直接计算, 首先以导体圆柱为例阐明此方法, 然后将其应用于介质覆盖圆柱体的散射。

考虑如图 1 所示的无限长导体圆柱的电磁散射。在电极化平面波入射下, 阴影区中的场为^[3]

$$E_{\pi} \approx \left(\frac{ka}{2}\right)^{1/3} \cdot \exp\left(-j\frac{\pi}{12}\right) \cdot \frac{\exp(-jk_s)}{\sqrt{2\pi k_s}} \cdot \sum_{n=1}^N \frac{1}{[\text{Ai}'(-\alpha_n)]^2} \cdot \{\exp[-j\nu_n(\pi/2 - \phi - \cos^{-1}(a/\rho))] + \exp[-j\nu_n(\pi/2 + \phi - \cos^{-1}(a/\rho))]\}, \quad (1)$$

其中 $\nu_n \approx ka + \alpha_n \cdot (ka/2)^{1/3} \cdot \exp(-j\pi/3)$, k 是自由空间中的波数, a 是圆柱半径, $-\alpha_n$ 是艾里函数 $\text{Ai}(x)$ 的零点。

正如人们所指出的那样, 将此式直接应用于过渡区会产生较大的误差。但从原理上来说, 留数法的解是适用于整个区域的。仔细分析可以发现, 产生这一误差的原因是由于在(1)式的推导过程中引入了一个近似:

$$\nu_n \approx ka. \quad (2)$$

这一近似在深阴影区是合理的, 而在过渡区中则会导致相当的误差。因此, 取消这一近似便有可能消除这一误差。排除(2)式之近似后, (1)式可改写为

$$E_{\pi} \approx \left(\frac{ka}{2}\right)^{1/3} \cdot \exp\left(-j\frac{\pi}{12}\right) \cdot \frac{\exp[-j(k^2\rho^2 - \nu_n^2)^{1/2}]}{\sqrt{2\pi(k^2\rho^2 - \nu_n^2)^{1/2}}} \cdot \sum_{n=1}^N \frac{1}{[\text{Ai}'(-\alpha_n)]^2} \cdot \{\exp[-j\nu_n(\pi/2 - \phi - \cos^{-1}(\nu_n/k\rho))] + \exp[-j\nu_n(\pi/2 + \phi - \cos^{-1}(\nu_n/k\rho))]\}. \quad (3)$$

图 2(a) 和图 2(b) 将(1), (3)两式的解与经典解作了比较。尽管(3)式并不如(1)式那样具有明显的电磁射线的物理意义, 但(3)式的精度和适用范围则远较(1)式为好。在深阴影区, (1)式和(3)式的解基本一致, 但(3)式的精度比(1)式更高。在阴影边界的两侧, 即过渡区内, (1)式的解大大偏离经典解; 而(3)式的解仍能在过渡区亮区。一部分范围内保持正确。因此, 将它与深亮区鞍点法得出的场衔接起来, 便可以得出整个区域的散

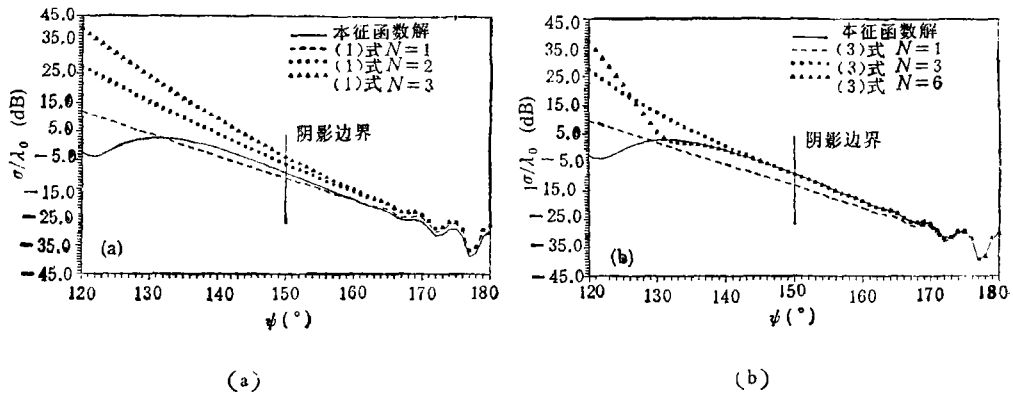
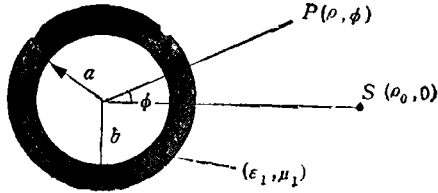


图 2 阴影区和过渡区中的散射宽度

$$a = 5\lambda, \rho = 10\lambda$$

射场。

我们将此改进应用于图 3 所示的介质覆盖圆柱体对线电流源的散射中。这一情况下散射场的本征函数解为^[1]



$$G_0(\rho, \phi) = \frac{i}{4} \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} \{J_{\nu}(k_0 \rho_{<}) H_{\nu}^{(1)}(k_0 \rho_{>}) - \xi_{\nu} H_{\nu}^{(1)}(k_0 \rho_{>})\} \exp[i\nu(\phi - \phi_0)],$$

图 3 介质覆盖圆柱体的几何结构

其中 $\rho_{<}, \rho_{>}$ 分别表示 ρ 和 ρ_0 中较小和较大的一个,

$$\begin{aligned} \xi &= [Z_0 J_{\nu}(z) P' - Z_1 J'_{\nu}(z) P] / [Z_0 H_{\nu}^{(1)}(z) P' - Z_1 H_{\nu}^{(1)}(z) P], \\ P &= J_{\nu}(y) H_{\nu}^{(1)}(x) - J_{\nu}(x) H_{\nu}^{(1)}(y), P' = J'_{\nu}(y) H_{\nu}^{(1)}(x) - J'_{\nu}(x) H_{\nu}^{(1)}(y), \\ x &= k_1 a, y = k_1 b, z = k_0 b, \end{aligned}$$

$$Z_0 = \sqrt{\mu_0/\epsilon_0}, Z_1 = \sqrt{\mu_1/\epsilon_1}, k_0 = \omega \sqrt{\epsilon_0 \mu_0}, k_1 = \omega \sqrt{\epsilon_1 \mu_1}.$$

应用留数法对其进行求解,可得阴影区中的散射场为

$$\begin{aligned} G &= \sum_n F_n \left\{ \exp \left\{ j\nu_n \left[\phi - \cos^{-1} \left(\frac{\nu_n}{k_0 \rho_0} \right) - \cos^{-1} \left(\frac{\nu_n}{k_0 \rho} \right) \right] \right\} \right. \\ &\quad \left. + \exp \left\{ j\nu_n \left[2\pi - \phi - \cos^{-1} \left(\frac{\nu_n}{k_0 \rho_0} \right) - \cos^{-1} \left(\frac{\nu_n}{k_0 \rho} \right) \right] \right\} \right\} \end{aligned} \quad (4)$$

其中 $F_n = A_n / (B_n + C_n) \cdot D_n$, $A_n = \frac{j\pi(z/6)^{2/3}}{z \cdot A(g_n)^2} \cdot \frac{2Z_0 \cdot U1y_n \cdot V1y_n}{Z_1 \cdot U1z_n + Z_0 U1y_n} \exp(j2\pi/3)$,

$$B_n = (Z_0 \cdot U1y_n / Z_1 - U1z_n) \cdot V1y_n \cdot [2j \cos^{-1}(\nu_n/x) - 2j \cos^{-1}(\nu_n/y)],$$

$$\begin{aligned} C_n &= \frac{V1x_n + V1y_n - \nu_n \cdot Z_1 \cdot j}{y \sqrt{y^2 - \nu_n^2}} + (V1y_n - V1x_n) \\ &\quad \cdot \left\{ Y^2 \left\{ Y \frac{z - \nu_n}{3} - \left[\frac{A'(g_n)}{A(g_n)} \right]^2 \right\} \right\}, \end{aligned}$$

$$D_n = \frac{1}{2} \left(\sqrt{k_0^2 \rho_0^2 - \nu_n^2} + \sqrt{k_0^2 \rho^2 - \nu_n^2} \right)^{-1/2} \exp(E_n),$$

$$E_n = j \left(\sqrt{k_0^2 \rho_0^2 - \nu_n^2} + \sqrt{k_0^2 \rho^2 - \nu_n^2} - \pi/2 \right),$$

$$U1z_n = -(z/6)^{1/2} \exp(-i\pi/3) A'(g_n) / A(g_n), U1y_n = j \sqrt{y^2 - \nu_n^2} / y,$$

$$V1x_n = \exp[2j \sqrt{x^2 - \nu_n^2} - 2j \nu_n \cos^{-1}(\nu_n/x) - j\pi/2],$$

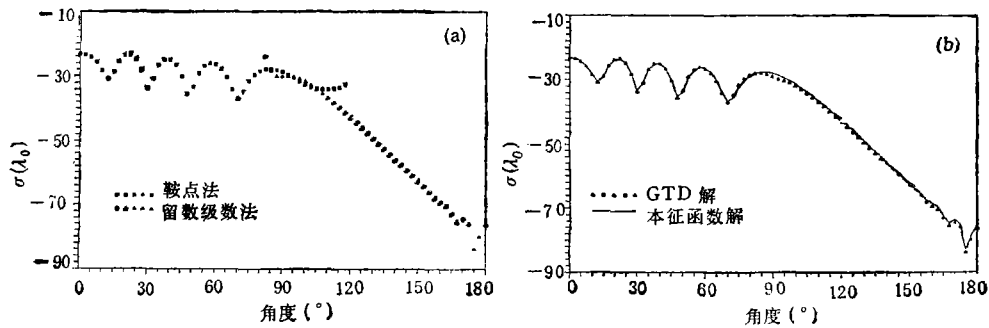
$$V1y_n = \exp[2j \sqrt{y^2 - \nu_n^2} - 2j \nu_n \cos^{-1}(\nu_n/y) - j\pi/2],$$

$$Y = \left(\frac{6}{z} \right)^{1/3} \exp(-j\pi/3), g_n = (6/z)^{1/3} \exp(-i\pi/3) (\nu_n - z).$$

A 和 A' 分别为改型艾里函数及其导数。它和标准艾里函数 Ai 的关系为 $A(x) = \pi / \sqrt[3]{3} \cdot \text{Ai}(-x / \sqrt[3]{3})$ 。 ν_n 则可由如下的联立方程求得

$$\begin{aligned}
 v_n &= z + q_n \cdot (z/6)^{1/3} \exp(i\pi/3) \\
 &= \frac{-iZ_0 \sqrt{1 - (v_n/y)^2} - Z_1 \exp(-i\pi/3) (6/z)^{1/3} A'(q_n)/A(q_n)}{iZ_0 \sqrt{1 - (v_n/y)^2} - Z_1 \exp(-i\pi/3) (6/z)^{1/3} A'(q_n)/A(q_n)} \\
 &= \exp[2i \sqrt{x^2 - v_n^2} - 2i \sqrt{y^2 - v_n^2} - 2iv_n \cos^{-1}(v_n/x) + 2iv_n \cos^{-1}(v_n/y)]
 \end{aligned}$$

一般来说,在(4)式中取四五个留数项之和即可保证一定的精度。图 4(a) 中给出了源和场点均在近区时的散射场。其中亮区的散射场由鞍点法计算而得;留数级数解则从阴影区一直延伸至亮区。两者在亮区的一段区域内相互吻合。由此,我们可得出整个区域的散射场。图 4(b) 将此解与本征函数解作了比较,两者在过渡区内只有微小的偏差。



(a)

(b)

图 4 介质覆盖圆柱体的散射宽度(TM 波)

$$a = 2.9\lambda_0, b = 3\lambda_0, \rho_0 = 5\lambda_0, \rho = 7\lambda_0, \varepsilon = (4, 0)$$

3 焦散区场的分析和计算

在散射场的分析中,有时还会遇到焦散区的问题。对于劈绕射时的焦散问题,一般可用边缘等效电磁流法^[4]来处理,即可把散射场看成是位于边缘处的等效电磁流产生的。但在实际问题中,有时还会遇到曲面绕射射线所引起的焦散。例如,当球体被平面波所照射时,其前后轴向就是曲面绕射射线的焦散。在本文中,我们将推广等效电磁流的概念来处理这一问题。

首先考虑图 1 所示的无限长导体圆柱的散射,阴影区的散射场由沿柱面绕射的上下两条绕射射线所构成。按照等效电磁流的概念,每条电磁射线产生的场均可由一线电流(TM 波入射)或线磁流(TE 波入射)的辐射场来替代,线源的位置原则上可任意设定,但设在曲面绕射射线的起始点较为方便。调整线电流 I^e 或线磁流 I^m 使它们的辐射场与相应情况下的曲面绕射场相等,便可求得等效电流或等效磁流。

在图 1 所示的情况下,若 A 点处的沿 z 轴放置的线电流源的电流为 I_z^e , 则远区辐射电场为

$$E_z = -I_z^e \cdot \frac{Z_0 k}{2} \sqrt{\frac{j}{2\pi k}} \frac{\exp(-jk\rho)}{\sqrt{\rho}}, \quad (5)$$

而这条绕射射线的远区场可写成:

$$E_s = E^i (ka/2)^{1/3} \exp(-j\pi/12) \frac{\exp(-jk\rho)}{\sqrt{2\pi k\rho}} \cdot \sum_{n=1}^N \frac{1}{[Ai'(-\alpha_n)]^2} \cdot \exp[-j\nu_n(\pi/2 - \phi)]. \quad (6)$$

由(5),(6)两式即可得

$$I_s^*(\phi) = -E^i (ka/2)^{1/3} \cdot \frac{2}{z_0 k} \exp(-j\pi/3) \sum_{n=1}^N \frac{\exp[-j\nu_n(\pi/2 - \phi)]}{[Ai'(-\alpha_n)]^2}. \quad (7)$$

如同边缘绕射等效电流一样,(7)式的曲面绕射等效电流亦非实际的物理量,仅是为了方便计算而假设的等效源。它们是 ϕ 的函数。

对于曲边缘情况下的曲面绕射,还可引用局部性原理,即假设边缘上的每一点的作用就象是与此点相切的无穷长直边缘上的一个无穷小线元一样,同样可以求出该点的等效电磁流。下面以导体球的散射问题来说明等效电磁流的应用。

设有一 z 向极化的平面波向导体球入射,如图 5 所示。这时前后向散射场均处于焦散区。其后向散射截面一般写为 πa^2 ,但这仅是几何光学场,没有考虑因爬行波的绕射而引起的后向散射场。而对于小的 ka 来说,这些场就不能不考虑。

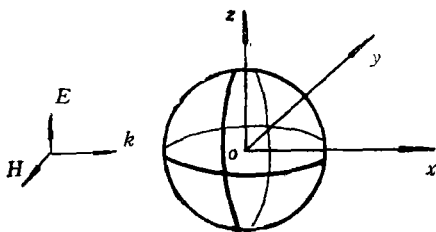


图 5 导体球的散射

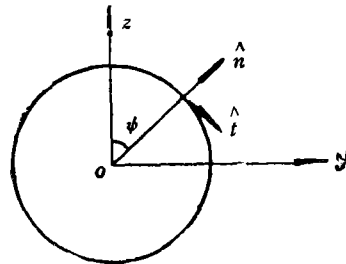


图 6 环形分布的等效电流源

对于图 5 所示的入射场,等效电磁流位于 $y-z$ 平面(即 $\varphi = 90^\circ$ 和 $\varphi = 270^\circ$ 平面)上,如图 6 所示。 n 为其上的外法线方向, t 为其上的切线方向。注意图 6 中的 ϕ 不同于球坐标定义中的 θ 。 ϕ 的范围为 $0^\circ-360^\circ$,而 θ 的范围则为 $0^\circ-180^\circ$ 。据此,可将每一点上的入射场分成沿切线和法线方向的两个分量:

$$(1) \begin{cases} E_t^i = E_0 \sin \phi, \\ H_n^i = -E_0 \sin \phi / Z_0; \end{cases} \quad (2) \begin{cases} E_n^i = E_0 \cos \phi, \\ H_t^i = -E_0 \cos \phi / Z_0. \end{cases}$$

若把大圆上的每一点看成是沿该点相切的无限长直边缘的一个线元,那么,对于该点的 $n-t$ 局部坐标系而言,(1),(2)两个平面波分量分别相当于在该点处的电极化平面波和磁极化平面波,它们分别在小线元上产生等效电流和等效磁流。其值为

$$I^*(\phi, \gamma) = iE_0 (ka/2)^{1/3} \frac{2}{Z_0 k} \exp(-j\pi/3) \sin \phi \cdot \sum_{n=1}^N \frac{\exp(-j\nu_n \gamma)}{[Ai'(-\alpha_n)]^2}, \quad (8)$$

$$I^m(\psi, \gamma) = jE_0(ka/2)^{1/3} \frac{2}{k} \exp(-j\pi/3) \cos \psi \cdot \sum_{n=1}^N \frac{\exp(-j\nu_n \gamma)}{\alpha'_n [\text{Ai}(-\alpha'_n)]^2}, \quad (9)$$

其中 γ 代表每一条绕射线在曲面上爬行所经过的弧度。在二维情况下, 便可写为(7)式中的 $\pi/2 - \varphi$ 。

得出了等效电磁流的分布和量值, 便可从这些等效源的辐射求出导体球上的爬行波在后向焦散区产生的场。

在球坐标系中, z 向的线电流元的远区辐射场为 $E_\theta = \frac{jI_0 l \omega \mu}{4\pi r} \exp(-jk r) \sin \theta$ 。故(8)式中的等效电流元 $I^c(\varphi) \Delta l$ 在后向区(此时, $\gamma = \pi$)的散射电场为

$$\begin{aligned} E_z(\psi) &= E_\theta \sin(\psi) \\ &= \frac{E_0 \Delta l}{2\pi r} \left(\frac{ka}{2}\right)^{1/3} \exp[-j(kr - \pi/6)] \sin^2(\psi) \sum_{n=1}^N \frac{\exp(-j\nu_n \pi)}{[\text{Ai}'(-\alpha'_n)]^2}. \end{aligned}$$

沿大圆积分, 得

$$E_z^{I^c} = \frac{E_0}{2r} \cdot a \cdot \left(\frac{ka}{2}\right)^{1/3} \exp[-j(kr - \pi/6)] \sum_{n=1}^N \frac{\exp(-j\nu_n \pi)}{[\text{Ai}'(-\alpha'_n)]^2}.$$

同理, 磁流产生的辐射电场为

$$E_z^{I^m} = \frac{-E_0}{2r} \cdot a \cdot \left(\frac{ka}{2}\right)^{1/3} \exp[-j(kr - \pi/6)] \sum_{n=1}^N \frac{\exp(-j\nu_n \pi)}{\alpha'_n [\text{Ai}(-\alpha'_n)]^2}.$$

除了等效电磁流的贡献之外, 在焦散区还有几何光学的球面反射场, 其值为

$$E_z^r = -\exp(2jka) \cdot \frac{a}{2r} \cdot \exp(-jk r).$$

后向区的总电场则为这三者之和:

$$E = E_z = E_z^{I^c} + E_z^{I^m} + E_z^r. \quad (10)$$

由此可得后向散射截面 S 。对大球而言, $S \rightarrow \pi a^2$, 而当 $a \ll \lambda$ 时, 遵循瑞利散射定律, 即 S 正比于 λ^{-4} 。两者之间的区域则为谐振区, 其散射截面呈振荡特征。图 7 中将(10)式的结果与本征级数解^[5]相比较。两者基本吻合。

同样的方法亦能应用于介质覆盖体上焦散区的分析。如对介质覆盖球, 在平面波入射下, 其后向散射场为

$$E = E^0 + E^{I^c} + E^{I^m},$$

其中

$$E^0 = -E_0 \frac{a}{2r} \frac{Z_0 + jZ_1 \tan(k_1 d)}{Z_0 - jZ_1 \tan(k_1 d)},$$

$$E^{I^c} = -jE_0 \cdot \frac{a}{2Z_0} \sum_{n=1}^N \frac{A_n}{B_n + C_n} \cdot \exp(j\nu_n \pi), \quad (11)$$

$$E^{I^m} = jE_0 \frac{aZ_0}{2} \sum_{n=1}^N \frac{A'_n}{B'_n + C'_n} \cdot \exp(j\nu'_n \pi). \quad (12)$$

(11)式中 A_n, B_n, C_n 的定义与上一节中的相同。(12)式中 A'_n, B'_n, C'_n 则为

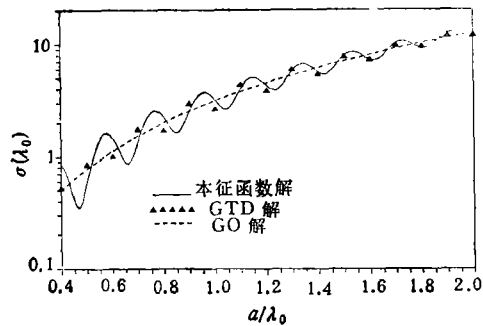


图7 导体球的后向散射截面

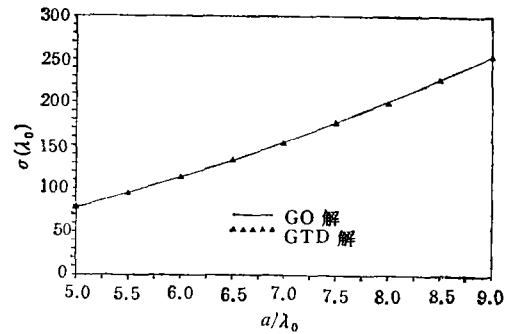


图8 介质涂覆球的后向散射截面

$$\epsilon_r = (5, -4) \quad d = 0.04\lambda_0$$

$$A'_n = \frac{j\pi(z/6)^{2/3}}{z \cdot A(g_n)^2} \cdot \frac{2Z_0 \cdot V1y_n}{Z_0 \cdot U1z_n + Z_1 U1y_n} \exp(j2\pi/3),$$

$$B'_n = (Z_0 \cdot U1z_n / Z_1 - U1y_n) \cdot V1y_n \cdot [2j\cos^{-1}(v'_n/x) - 2j\cos^{-1}(v'_n/y)],$$

$$C'_n = \frac{V1y_n - V1x_n}{y} \frac{v'_n \cdot j}{\sqrt{y^2 - v_n'^2}} - (V1y_n + V1x_n) \cdot \frac{Z_0}{Z_1} \left\{ Y^2 \left\{ Y \frac{z - v'_n}{3} - \left[\frac{A'(g_n)}{A(g_n)} \right]^2 \right\} \right\}.$$

其中各中间变量的定义与上相同,但均针对 v'_n . v'_n 可由下列方程求得

$$v'_n = z + q_n \cdot (z/6)^{1/3} \exp(j\pi/3)$$

$$\frac{jZ_1 \sqrt{1 - (v'_n/y)^2} + Z_0 \exp(-j\pi/3) (6/z)^{1/3} A'(q_n)/A(q_n)}{jZ_1 \sqrt{1 - (v'_n/y)^2} - Z_0 \exp(-j\pi/3) (6/z)^{1/3} A'(q_n)/A(q_n)}$$

$$= \exp[2j\sqrt{x^2 - v_n'^2} - 2j\sqrt{y^2 - v_n'^2} - 2jv'_n \cos^{-1}(v'_n/x) + 2jv'_n \cos^{-1}(v'_n/y)]$$

图8是介质涂覆球的后向散射截面。对电大尺度球来说,其散射截面与几何光学解非常相近。

4 结 论

在以上的分析中,我们对留数级数解和等效电磁流法分别加以修正和扩展,以对与爬行波相关的过渡区和阴影区中的场进行分析和计算。所得的结果既能处理理想导体的散射,也能应用于介质覆盖体的散射。以上结果虽然是从圆柱或球的分析而得,但也能应用于一般的曲面。

参 考 文 献

- [1] Rao TCK, Hamid MAK. IEE Proc.-H, 1980, 127(3):143-153.
- [2] Kim HT, Wang N. IEEE Trans. on AP, 1989, AP-37(11):1463-1472.

- [3] 汪茂光. 几何绕射理论. 西安: 西北电讯工程学院出版社, 1985.
[4] Ryan C E, Peters L. IEEE Trans. on AP, 1969, AP-17(3): 297—299.
[5] R. F. 哈林登著, 孟侃译. 正弦电磁场. 上海: 上海科学技术出版社, 1964, 318.

ANALYSIS OF THE FIELD TRANSITION AND CAUSTIC REGIONS OF DIELECTRIC COATED OBJECTS

Lin Chisen Ni Weili

(Department of Radio Electronics, Shanghai University of Science and Technology, Shanghai 201800)

Abstract The fields in transition and caustic region of dielectric coated objects are obtained by geometric theory of diffraction. In transition region, direct computation is accomplished by modifying the residue series solution. The equivalent currents are extended to deal with the creeping wave in caustic region. The comparison of computation results with the eigenfunction solution shows that the presented methods are efficient.

Key words Dielectric coating, Geometric theory of diffraction, Electromagnetic scattering