

基于低密度校验码编码的 MIMO 系统方案¹

薛英健 项海格

(北京大学电子学系 北京 100871)

摘 要: 该文采用数值仿真的方法探讨了 MIMO 系统中采用低密度校验 (LDPC) 码作为信道编码后的系统性能, 针对 LDPC 码的置信度传播译码算法, 提出了基于因子图 (Factor graph) 的联合迭代检测译码最大后验概率 (MAP) 算法, 分析比较了发射端分别采用独立编码和联合编码对系统性能的影响。仿真结果表明, LDPC 码可以充分利用 MIMO 系统中空间分集和时间分集性能提高系统的有效分集增益, 并且联合迭代检测译码算法对这两种发射端编码结构的系统性能增益有较大差别。

关键词: 低密度校验码, MIMO 系统, 因子图

中图分类号: TN911.22 **文献标识码:** A **文章编号:** 1009-5896(2004)10-1580-07

LDPC Coded MIMO System Scheme

Xue Ying-jian Xiang Hai-ge

(Department of Electronics, Peking University, Beijing 100871, China)

Abstract In this paper, the performance of the LDPC coded MIMO system scheme is evaluated through numerical simulations, and according to the belief propagation decoding algorithm of LDPC codes, a combined iterative detection/decoding MAP algorithm based on the factor-graph representation is proposed. The system performance is analyzed under two transmitter encoding structures, namely the separate encoding structure and the combined encoding structure respectively. Simulation results show that LDPC codes can increase the effective diversity gain by utilizing both the space and the time diversity effects of the MIMO system, and the combined iterative detection/decoding algorithm results in different performance gain for the two transmitter encoding structures.

Key words Low-Density Parity-Check (LDPC) codes, Multiple-Input Multiple-Output (MIMO) system, Factor graph

1 引言

低密度校验 (LDPC) 码是 Gallager 于 1962 年^[1,2]提出的一种纠错编码方案, 但是, 由于当时仿真分析工具的计算能力有限, 直到 1996 年 LDPC 码才被证明是一种可以逼近加性高斯白噪声 (AWGN) 信道容量的编码方案。LDPC 码所采用的迭代译码算法称为置信度传播 (Belief propagation) 算法^[2,3], 在文献 [3] 中, 经过优化设计的 1/2 码率 LDPC 码在误码率为 10^{-6} 时与 AWGN 信道容量只有 0.04 dB 的差距。正在拟订的广域宽带移动网通信标准 IEEE 802.20 提案中, LDPC 码已经被作为主要备选信道编码方案。

对于 MIMO 系统, 空时编码 (Space-time coding) 技术将信道编码的时间分集 (Time diversity) 功能与多天线阵系统的空间分集功能有机地结合起来^[4,5], 可以提高多天线阵系统的系统性能。空时分组码 (STBC) 主要功能是通过提高系统分集增益 (Diversity gain) 增强抗衰落能力, 本文提出的基于 LDPC 码的空时编码方案主要目的是提高系统复接增益 (Multiplexing

¹ 2003-06-25 收到, 2003-10-27 改回

国家自然科学基金 (No.90104014) 资助项目

gain) 获得更高的信道容量, 重点讨论了如何设计发射端编码结构从而利用 LDPC 编码技术提高 MIMO 系统容量, 并且提出了一种基于因子图的迭代联合解调译码算法, 分析比较了该算法在不同发射端编码结构下对系统性能的影响。

之所以将 LDPC 码用于 MIMO 系统主要是因为 LDPC 码具有以下几点重要特性^[6]: (1) 译码算法是并行计算的, 复杂度比 Turbo 码的串行译码算法低, 效率较高且易于集成电路实现。(2) 规则 LDPC 码的最小码距与码长近似为线性关系^[2], 具有相当好的最小码距 d_{\min} 特性。而采用信道编码的 MIMO 系统^[7], 其可以取得的等效分集数量是与信道编码的最小码距 d_{\min} 成正比关系的。(3) LDPC 码设计灵活, 可以设计出任意码长、码率的非规则 LDPC 码。(4) LDPC 码一般不会表现出误码底层 (Error floor) 现象。(5) 为了减小发射信号的相关性, 在 MIMO 系统中通常需要在信道编码后进行逐比特交织, 这一点对于卷积码和 Turbo 码尤其必要。但对于 LDPC 码, 其校验矩阵 H 的设计遵循随机性最大化原则, 可以认为编码器的输出比特是充分交织的。实际上, H 矩阵的随机性已经相当于在编码的同时隐含地进行了逐比特交织。因此, 在编码器的输出端可以省略交织器的设计, 这样不仅可以简化发送端的系统结构, 而且对于接收端同样可以省去解交织处理, 系统的总体效率可以得到较大提高。

2 系统模型

本文所考虑的信道模型为频率非选择性 Rayleigh 衰落信道, 信道状态信息 (CSI) 在接收端已知。发送端将信息比特通过 LDPC 码进行信道编码, 符号映射为 BPSK 信号后经调制器发送到发射天线。

发送端可以采用两种编码结构。第一种结构是发送端先对信息码流进行信道编码, 然后将编码后的码流通过串并变换分别传送到各发射天线单元处理, 这种结构我们称为发送端联合编码结构; 另一种编码结构是先将信息码流通过串并变换发送到各发射天线处理单元, 各发射天线单元再分别独立地通过信道编码器对信息码流进行编码处理, 这种发送端结构我们称为发送端独立编码结构。

对于发端为 N 个天线, 收端为 M 个天线的 MIMO 系统, 接收天线 m 接收到的信号经解调后得到第 k 个信号间隔的输出 $y_m(k)$ 可以表示为

$$y_m(k) = \sqrt{E_s/M} \sum_{n=1}^N h_{mn}(k)x_n(k) + w_m(k), \quad m = 1, 2, \dots, M \quad (1)$$

其中 E_s 表示在接收天线输出端各符号总功率的期望值, 与发射天线数无关, $x_n(k)$ 为第 n 个发射天线所发送的符号, 发射天线的符号功率针对接收天线数 M 作归一化处理, 即

$$\frac{1}{M} E \sum_{m=1}^M |x_n|^2 = 1 \quad (2)$$

$h_{mn}(k)$ 表示发射天线 n 与接收天线 m 之间的信道传输系数, $h_{mn}(k)$ 的实部、虚部相互统计独立, 并分别满足均值为零、方差为 $1/2$ 的高斯随机变量分布; $w_m(k)$ 表示收端 m 的加性复高斯白噪声, 是均值为零的独立分布复高斯随机变量采样, 方差为 N_0 。式 (1) 用向量形式表示可以得到以下表达式:

$$\mathbf{Y}(k) = \sqrt{E_s/M} \mathbf{H}(k) \mathbf{X}(k) + \mathbf{W}(k) \quad (3)$$

其中, $\mathbf{Y}(k) = [y_1(k), y_2(k), \dots, y_M(k)]^T$, $\mathbf{X}(k) = [x_1(k), x_2(k), \dots, x_N(k)]^T$, $\mathbf{H}(k)$ 为 $M \times N$ 阶信道传输系数矩阵, $\mathbf{W}(k) = [w_1(k), w_2(k), \dots, w_M(k)]^T$ 。

对于发射天线数 $N = 1$ 的 SIMO 系统, 由于经过 LDPC 码编码后的码流可以认为是充分交织的, 发送符号的取值是等概率的, 而且信道传输系数也是相互独立的, 因此接收端检测单元采用最大似然检测 (MLD) 方式得到发送端符号的后验概率 L_d

$$L_d = \ln \left[\frac{P\{x_1(k) = +1 | Y(k)\}}{P\{x_1(k) = -1 | Y(k)\}} \right] \\ = \ln \left[\frac{\prod_{m=1}^M p\{y_m(k) | x_1(k) = +1\}}{\prod_{m=1}^M p\{y_m(k) | x_1(k) = -1\}} \right] \quad (4)$$

译码器将 L_d 作为输入变量开始 BP 译码过程, 这是针对发射天线数 $N = 1$ 的 SIMO 系统接收端处理流程。

对于发射天线数 $N \geq 2$ 的 MIMO 系统, 不同发射天线的符号会在接收端相互之间产生干扰。如果接收端检测单元仅采用最大似然检测, 然后再进行 LDPC 码的 BP 译码, 则没有进行干扰抵消处理。对于发送端符号 $x_n(k)$, 联合迭代检测译码算法^[4] 试图利用译码器在 LDPC 码的迭代译码过程中得到的其他发射天线符号的后验概率 L_c 提高 $x_n(k)$ 的后验概率 L_d 的准确度, 下面重点介绍这一算法的实现方法。

3 基于因子图的联合迭代检测译码

最大后验概率 (MAP) 算法的目标是使给定比特的检测误差最小化, 即判决的依据是使给定发送符号 $x_I(k)$ 的后验概率 (APP) 最大化。

$$\hat{x}_n(k) = \arg \max_{x_n(k) \in \Omega} \Pr\{x_n(k) | Y(k)\} \\ = \arg \max_{x_n(k) \in \Omega} \sum_{\tilde{X}_n(k) \in \Omega^{N-1}} \Pr\{x_n(k), \tilde{X}_n(k) | Y(k)\}, \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad Y(k) \in \mathcal{C}^N \quad (5)$$

上式中, Ω 表示各发送端 $x_i(k)$ 符号空间, $\tilde{X}_n(k)$ 表示不包括 $x_n(k)$ 的发送天线符号所构成的 $N - 1$ 维符号向量, $Y(k)$ 表示 N 维接收信号向量。由于本文所研究的 MIMO 系统模型中各发送天线的码位 $\{x_1(k), x_2(k), \dots, x_N(k)\}$ 是相互独立的, 而且各发射天线与接收天线之间的信道传输系数也相互独立, 根据贝叶斯定理可得下式:

$$\Pr\{x_n(k), \tilde{X}_n(k) | y(k)\} = \left[\frac{\prod_{m=1}^M p\{y_m(k) | x_n(k), \tilde{X}_n(k)\}}{p(Y(k))} \right] P(x_n(k)) P(\tilde{X}_n(k)) \quad (6)$$

译码器的迭代译码算法通常采用对数似然比的方式进行计算, APP 信息一般采用对数似然比的方式表示, 其值的正负号用于判决给定比特是 1 或 0, 幅度可以作为判决的可靠度量值。 $x_n(k)$ 的先验概率对数似然比定义为

$$L(x_n(k)) \triangleq \ln \frac{P(x_n(k) = +1)}{P(x_n(k) = -1)} \Rightarrow P(\tilde{X}_n(k)) \\ = \frac{\exp[(1/2)\tilde{X}_n(k)L(\tilde{X}_n(k))]}{\prod_{i=1, i \neq n}^N \{\exp(L(x_i(k))/2) + \exp(-L(x_i(k))/2)\}} \quad (7)$$

式 (7) 中, $L(\tilde{X}_n(k)) = [L(x_1(k)), L(x_2(k)), \dots, L(x_N(k))]^T$, 其中不包含 $L(x_n(k))$ 。依据式

(6) 和式 (7) 可得检测单元得到的 $x_i(k)$ 后验概率对数似然比 $L_d(x_n(k))$ 的表达式:

$$\begin{aligned}
 L_d(x_n(k)) &\triangleq \ln \{P(x_n(k) = +1|Y(k)) / P(x_n(k) = -1|Y(k))\} \\
 &= \ln \frac{\sum_{\tilde{X}_n(k) \in \Omega^{N-1}} \left\{ \exp \left[\frac{1}{2} \tilde{X}_N^T(k) L(\tilde{X}_n(k)) \right] \prod_{m=1}^M p(y_m(k) | x_n(k) = +1, \tilde{X}_n(k)) \right\}}{\sum_{\tilde{X}_n(k) \in \Omega^{N-1}} \left\{ \exp \left[\frac{1}{2} \tilde{X}_N^T(k) L(\tilde{X}_n(k)) \right] \prod_{m=1}^M p(y_m(k) | x_n(k) = -1, \tilde{X}_n(k)) \right\}} \\
 &\quad + L(x_n(k)) \\
 &= f_d[L(\tilde{X}_n(k)), Y(k)] + L(x_n(k)) \tag{8}
 \end{aligned}$$

从上式可以看到, 检测单元得到的发送符号 $x_n(k)$ 的后验概率对数似然比 $L_d(x_n(k))$ 涉及到同时发送的符号 $x_n(k)$ 和 $\tilde{X}_n(k)$ 的先验概率对数似然比 $L(x_n(k))$ 和 $L(\tilde{X}_n(k))$ 。检测单元在没有外信息输入的情况下只能认为发送符号的取值都是等概率的, 即 $L(x_n(k)) = 0, L(\tilde{X}_n(k)) = 0, L_d(x_n(k))$ 的计算也就等价于最大似然检测。

对于联合检测译码算法, 符号 $\tilde{X}_n(k)$ 经译码器译码后的后验概率值对数似然比 $L_c(\tilde{X}_n(k))$ 为译码器经过译码得到的关于符号 $\tilde{X}_n(k)$ 的后验概率信息, 这部分信息可以作为检测单元计算符号 $x_n(k)$ 的 $L_d(x_n(k))$ 时的外信息; 而 $L(x_n(k))$ 只能作为发送符号 $x_n(k)$ 的先验概率对数似然比, 即 $L(x_n(k)) = 0$ 。因此, 在联合迭代检测译码算法中, 检测单元 $L_d(x_n(k))$ 的计算表达式为

$$L_d(x_n(k)) = f_d[L(\tilde{X}_n(k)), Y(k)] = f_d[L_c(\tilde{X}_n(k)), Y(k)] \tag{9}$$

联合迭代检测译码算法的主要思路是将译码器经过译码算法得到的信息 $L_c(\tilde{X}_n(k))$ 作为检测单元的外信息提高检测单元 L_d 的计算准确度; 同样, 作为译码器输入变量的 L_d , 其可靠度的提高同时也意味着译码器性能的进一步提高。作为算法初始化部分, 检测单元首先假设各发送符号的取值是等概率的, 然后将得到的 L_d 作为译码器的输入开始循环迭代计算; 译码器在一轮循环后将得到的 $L_c(\tilde{X}_n(k))$ 作为下一轮迭代中检测单元的输入, 从而进一步进行迭代循环计算。

联合迭代检测译码算法可以通过因子图直观地说明, 对于发射天线数和接收天线数均为 2 的 MIMO 系统, 发射端联合编码结构所对应的基于因子图的联合迭代解码算法如图 1 所示, 图中检测单元节点表示计算变量 L_d 的计算节点。定义检测单元节点 d_k 向相邻的变量节点 v_i 所发送的消息表示为 u_{0i} , 同样, 变量节点 v_i 向相邻的检测单元节点 d_k 发送的消息定义为 v_{i0} 。检测单元节点、变量节点和校验节点针对相邻节点发送的消息处理方式如下:

检测单元节点:

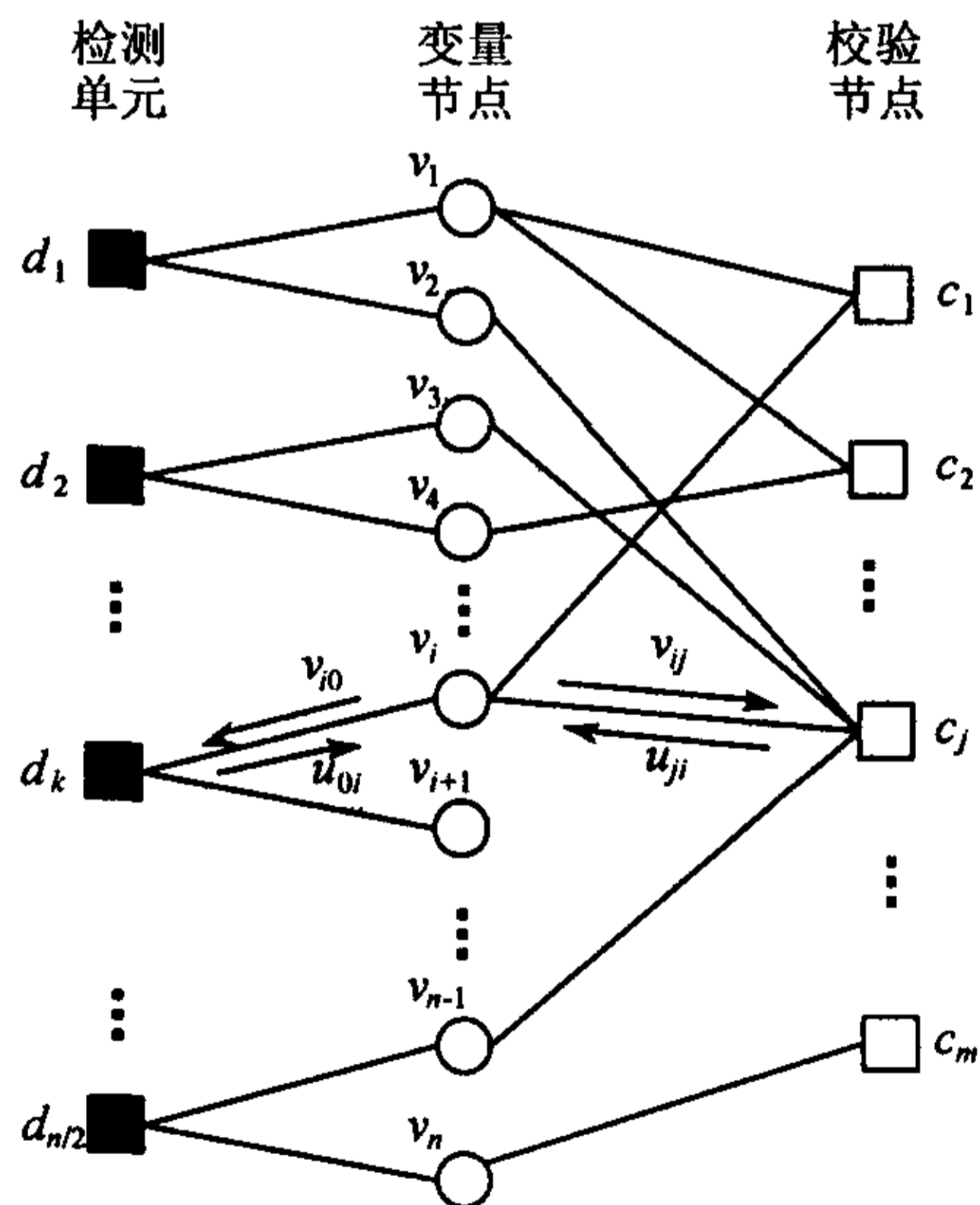


图 1 发送端联合编码结构译码算法因子图

$$u_{0i} = f_D(v_{i'0}, Y_k) \quad i' \neq i, \quad v_{i'0} = [v_{i'0}^1 \cdots v_{i'0}^k]^T \tag{10}$$

变量节点:

$$v_{i0} = \sum_{k=1}^{d_i^v} u_{ki}, \quad v_{ij} = \sum_{k=0, k \neq i}^{d_i^v} u_{ki}, \quad Q_i = \sum_{k=0}^{d_i^v} u_{ki} \quad (11)$$

校验节点:

$$\tanh \frac{u_{ji}}{2} = \prod_{k=1, k \neq i}^{d_j^c} \tanh \frac{u_{kj}}{2} \quad (12)$$

式 (10) 中, $v_{i'0}$ 表示在图 1 中与检测单元节点 k 相邻的另一变量节点发送来的消息。对于发送天线数量 $N > 2$ 的系统, 检测单元节点在计算 u_{0i} 时, 需要对除了变量节点 v_i 外与检测单元节点相邻的所有其他节点发送来的消息 $v_{i'0}$ 进行处理, $v_{i'0}$ 实际上就是式 (9) 中所定义的向量 $L_c(\tilde{X}_n(k))$, 即

$$L_c(\tilde{X}_n(k)) = v_{i'0} = \sum_{k=1}^{d_i^v} u_{ki'} \quad (13)$$

基于因子图的联合迭代检测译码的算法流程如下: 首先初始化 $v_{i0} = 0, u_{ji} = 0$; 在每一次迭代计算中, 先对所有的变量节点计算 v_{ij} 值, 然后计算校验节点 u_{ji} ; 随后计算变量节点的 v_{i0} 值, 并将更新后的 v_{i0} 值用于计算检测节点的 u_{0i} 值。在每一次迭代过程的最后, 根据变量节点所计算的 Q_i 产生一个估计码字 X' , 奇偶校验矩阵用于判断译码输出 X' 是否正确, 即判断 $HX' = 0$ 是否成立。如果结果正确则译码成功, 迭代过程结束; 否则继续下一轮迭代过程。迭代次数如果达到了预先设定的最大迭代次数, 则译码过程失败, 输出的结果是含有误码的。

发送端独立编码结构译码算法的因子图如图 2 所示, 图中节点的处理方式以及消息的定义与图 1 中的相应节点是相同的, 区别在于检测单元节点相邻的变量节点分别属于不同的码字, 联合解调译码算法中要涉及到多个独立译码器之间通过检测单元节点相互交换译码消息。联合迭代检测译码的迭代循环流程和 LDPC 码的译码算法 BP 算法的主要区别在于, u_{0i}, v_{i0} 也需要在迭代过程中不断更新, 即增加了检测单元节点与变量节点之间的消息处理。

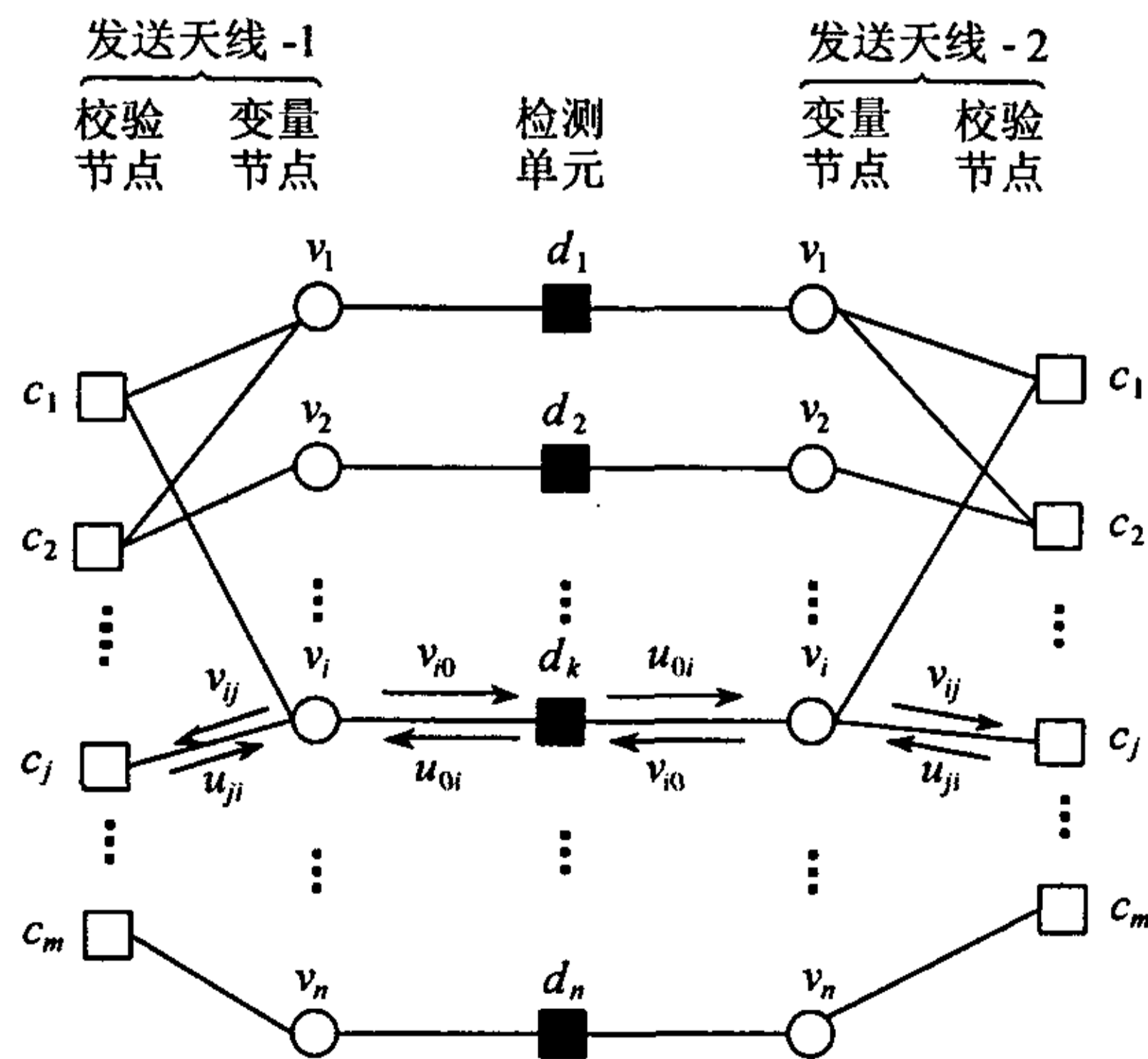


图 2 发送端独立编码结构译码算法因子图

4 仿真结果及讨论

为了讨论基于 LDPC 码编码的 MIMO 系统性能, 并且验证联合迭代检测译码算法的特性, 我们进行了大量的计算机仿真。仿真中所采用的 LDPC 码为码率为 $1/2$ 、码长为 1024 的 $(1024, 3, 6)$ 规则 LDPC 码, 其校验矩阵采用完全随机的生成方法, 但在生成过程中避免了长度为 6 的回路 (Cycle) 出现; 发送端独立编码和联合编码所采用 LDPC 码码长相同。MIMO 信道模型如前所述, 采用 BPSK 调制方式, 并且分别考虑发射天线数 $N = 1$ 、接收天线数 $M = 2$ 的 SIMO 系统与发射天线数与接收天线数均为 2 的 MIMO 系统性能差异。对于 $N = 1, M = 2$ 的 SIMO 系统, 无法应用联合迭代检测译码算法; 对于 $N = 2, M = 2$ 的 MIMO 系统, 比较了联合迭代检测译码算法与传统的先进行最大似然检测然后再独立译码的这种非联合检测译码算法的性能, 并且比较了发送端联合编码结构和独立编码结构的系统性能。总之, 本文综合考虑了 MIMO 系统中天线数量、译码算法、发送端编码结构这三方面因素对系统总体性能的影响。

基于 LDPC 码编码的 SIMO 系统性能与无信道编码的 SIMO 系统性能比较见图 3, 图中 E_b/N_0 表示接收端信息比特总功率的期望值与单边噪声功率谱密度 N_0 的比值。对于 $N = 1, M = 2$ 的 SIMO 系统, 采用 LDPC 编码后, 在误码率为 10^{-5} 时可以取得近 20 dB 的性能增益。这主要得益于 LDPC 码良好的最小码距特性^[7], 仿真中所采用的 $(1024, 3, 6)$ 规则 LDPC 码的最小码距下界^[2]接近 $d_{\min} > 23.2$, 所以, 对于编码后的 $N = 1, M = 2$ 的 SIMO 系统等效分集数量超过 48, 而相应的未编码系统分集数量只有 2, 因而采用

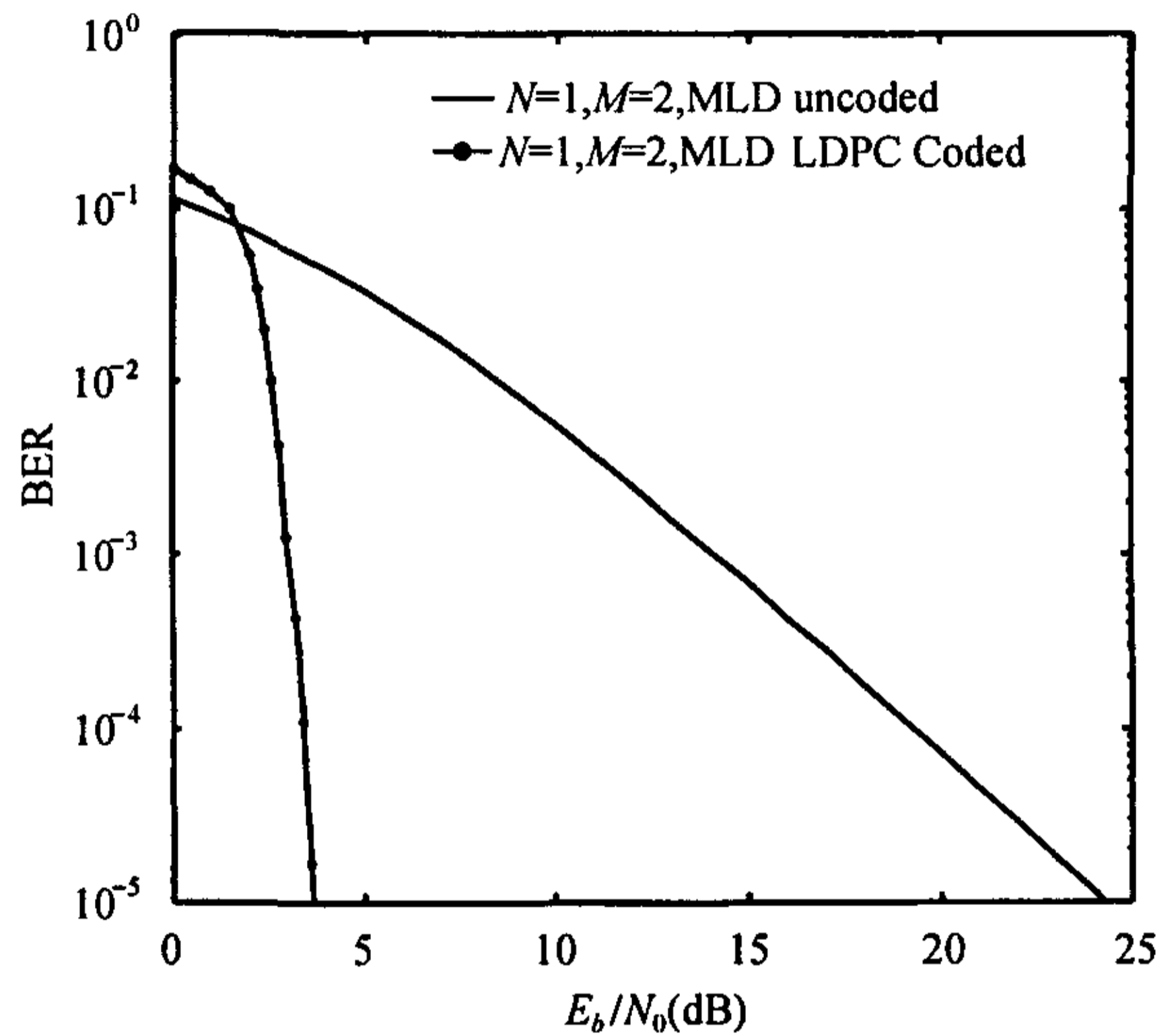


图 3 基于 LDPC 码的 SIMO 系统性能

LDPC 编码后系统可以取得相当好的性能增益。

图 4 中针对编码后的 MIMO 系统在不同系统参数条件下的性能进行了比较。对于 $N = 2, M = 2$ 发送端联合编码的 MIMO 系统, 采用联合迭代检测译码算法后可以得到 0.4 dB 的系统性能增益; 对于发送端独立编码的 MIMO 系统, 性能增益达到 0.6 dB。在误比特码率 (BER) 为 10^{-5} 时, 其性能逼近 $N = 1, M = 2$ 的 SIMO 编码系统的性能, 但 $N = 2, M = 2$ 的 MIMO 系统的频谱利用率达到 $1 \text{ bit}/(\text{s}\cdot\text{Hz})$, 是 $N = 1, M = 2$ 的 SIMO 系统的两倍。这说明基于 LDPC 码的多发射天线 MIMO 系统, 采用联合迭代检测译码算法后有效地抑制了多发射天线所带来的多用户干扰, 系统性能取得了较大的提高, 这主要是因为所采用的置信度传播译码算法。另一方面, 从因子图上可以看到, 经过多次迭代计算后, 每个码位实际上获得了从所有其他码位发来的置信度信息, 所以不管这个码位是从那个天线法发送的, 它实际上可以获得从其它发射天线所发送码位的信道信息, 等效为发射分集数量的提高, 而对于单发射天线系统其发射分集增益无法得到有效提高的。因此, 采用 LDPC 编码后, 多发射天线 MIMO 系统的发射分集数量可以认为得到了一定的提高。

从图 4 可以看出, 如果没有采用联合检测 / 译码算法, 两种发射端编码结构下系统的性能接近; 但接收端如果采用联合迭代检测 / 译码算法, 则发射端独立编码结构的性能明显优于发

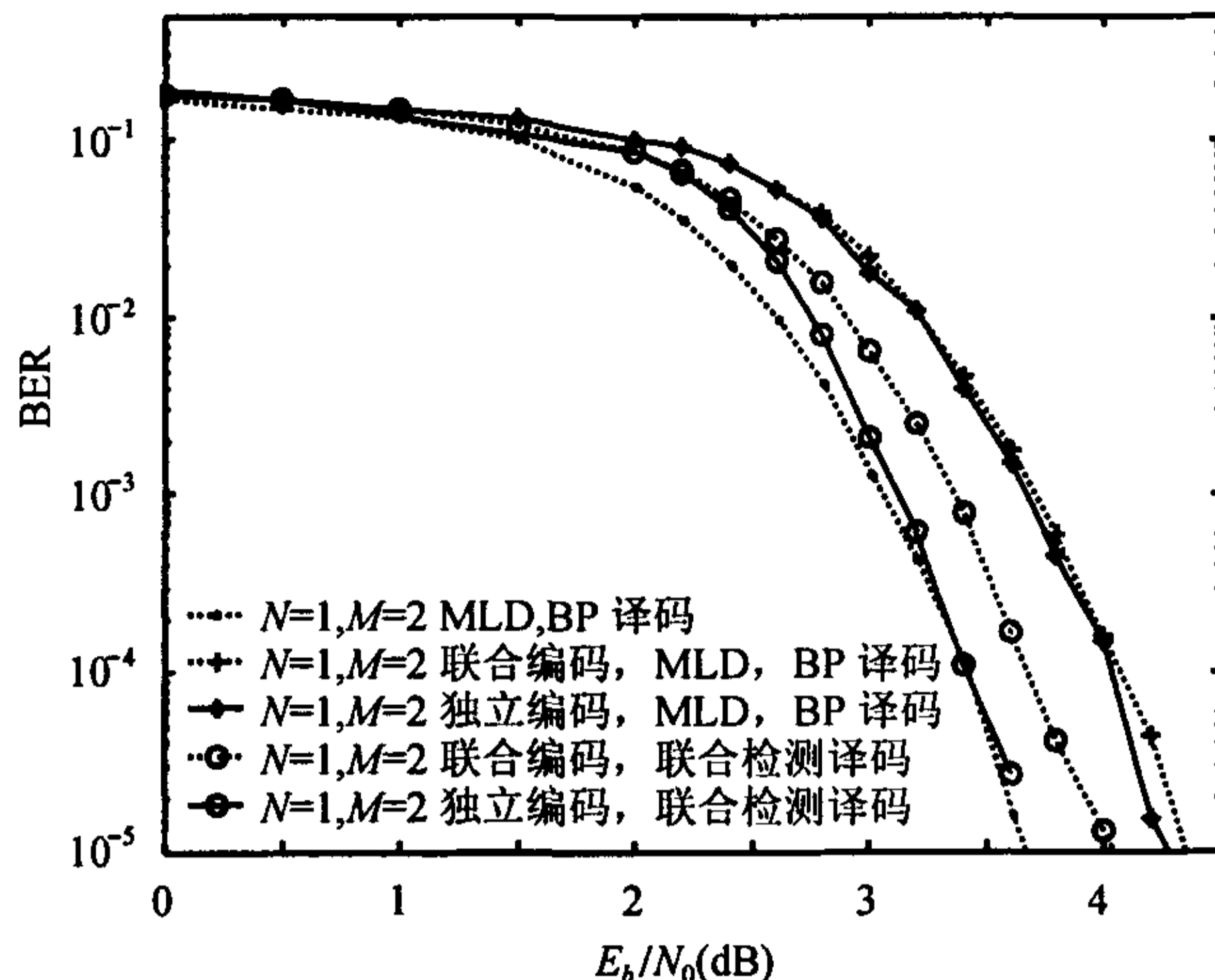


图4 不同发射端编码结构下联合迭代检测译码算法性能

射端联合编码结构。这说明在相同的编码复杂度约束条件下,对于 $N = 2, M = 2$ 的 MIMO 系统可优先考虑采用发射端独立编码结构。

由于联合迭代检测译码算法中增加了处理节点的数量,提高了算法复杂度。为了减小译码算法计算量,经仿真试验发现,译码算法因子图中检测单元节点与变量节点之间消息的更新计算如果只迭代更新两次,则迭代检测译码算法的总体性能基本上没有损失,这样可以有效地减小计算复杂度。

5 结论

本文分析了基于 LDPC 码编码的 MIMO 系统方案,提出了一种基于因子图的联合迭代解调算法,仿真结果表明,基于 LDPC 码的 MIMO 系统可以取得相当理想的性能。该系统具有结构简单,译码算法并行计算的特点,具有很好的应用前景。将联合迭代检测译码算法应用于 LDPC 码编码的 MIMO 系统,可以取得良好的性能增益,讨论并分析了发射端在不同的编码结构下系统性能的差异。

作为当前的研究热点问题,将 LDPC, Turbo 码应用于 MIMO 系统中已经成为一个十分有意义的研究方向。对于 LDPC 码,如何针对特定的 MIMO 系统模型优化 LDPC 码结构逼近 MIMO 系统的信道容量有待进一步的研究;另一方面,对于高阶调制系统以及多天线系统,检测单元的计算复杂度将随发射端符号数量指数增加,这是在实际应用系统中无法接受的,如何减小检测单元计算复杂度并结合译码单元进行迭代运算是值得进一步探讨的。

参 考 文 献

- [1] Gallager R G. Low-density parity-check codes. *IRE Trans. on Info. Theory*, 1962, 8(1): 21-28.
- [2] Gallager R G. Low-Density Parity-Check Codes. Cambridge, MA: MIT Press, 1963, chapter 3.
- [3] Chung S Y, Forney G D, Richardson T J, Urbanke R. On the design of low-density parity-check codes within 0.0045 dB of the Shannon limit. *IEEE Comm. Letters*, 2001, 5(2): 58-60.
- [4] Hochwald B M, Brink S T. Achieving near-capacity on a multiple-antenna channel. *IEEE Trans. on Comm.*, 2003, COM-51(3): 389-399.
- [5] Foschini G J, Gans M. On the limits of wireless communication in a fading environment when using multiple antennas. *Wireless Personal Comm.*, 1998, 6(3): 311-335.
- [6] Lu B, Wang X, Narayanan K R. LDPC-based space-time coded OFDM systems over correlated fading channels: Performance analysis and receiver design. *IEEE Trans. on Comm.*, 2002, COM-50(1), 74-88.
- [7] Proakis J G. Digital Communications. Fourth Edition, New York: McGraw-Hill, 2001: 878-887.

薛英健: 男, 1972 年生, 博士, 研究方向为信道编码、无线通信。

项海格: 男, 1941 年生, 教授, 博士生导师, 研究方向为通信理论、信号处理等。