

用边界元素法计算阶梯 开口波导的反射系数*

李 忠 元

(北京工业学院电子工程系)

提 要

本文报道的是用边界元素法计算阶梯开口波导的反射系数。文中给出了用边界元素法求解波动方程问题的主要步骤和公式,并对本问题的一些计算细节作了说明。把在特殊状态下得到的结果与有关文献中的结果作了比较,从而看出这种方法的有效性。

一、引 言

随着边界元素法基础理论研究的深入,这种算法逐渐臻于完善,它在各个领域中得到越来越广泛的应用。这种方法开始主要应用于弹性力学等方面,近几年来,人们尝试把它应用于电磁问题。

这种方法是用加权残差法把描述电磁场的偏微分方程及其边界条件变为一个边界积分方程;然后用与有限元法相类似的方法,在边界上把这问题离散化,从而得到一个代数方程组;解这个方程组,就得到问题的近似解^[1,2]。

边界元素法的优点是,使问题的维数降低了一维。比如三维问题,由于只处理表面上的积分方程,因而变为二维问题。这使问题所需的初始数据大为减少,在某种程度上减轻了有限元法输入数据量大带来的麻烦。另外,得到的代数方程组的矩阵阶数也少,这样,在计算时,省机时,降低了对计算机容量的要求,节省费用。

如果用这种方法直接求得的是电位,再进一步求电场时,也会具有同样的精度,这是有限元法所不能相比的。

边界元素法比较容易处理源头集中和边界开放的问题。有些问题还可以与有限元法联合使用。用这种方法还能计算多种介质中的问题、各向异性介质中的非线性问题等等。

使用边界元素法得到的代数方程组的矩阵不是对角线附近元素不为零,而其他元素为零的矩阵,这就需要计算所有的矩阵元素值。另外处理多种介质中的问题时,要分别对每种介质取边界,建立方程,然后根据边界条件联立求解。

本文是用边界元素法求解一个具有开放边界的电磁波动问题。这一方面是为了研究这种方法本身,另一方面是因为所处理的问题对我们的工作有参考价值。

* 1983年10月10日收到,1984年11月23日修改定稿。

二、用边界元素法求解亥姆霍兹 (Helmholtz) 方程的一般关系式

设所研究的问题是在均匀各向同性介质中满足亥姆霍兹方程的边值问题,即

$$\left. \begin{aligned} \nabla^2 u_0 + k^2 u_0 &= 0, && \text{在区域 } \Omega \text{ 内;} && (1) \\ u_0 &= \bar{u}, && \text{在边界 } \Gamma_1 \text{ 上;} && (2) \\ q_0 = \frac{\partial u_0}{\partial n} &= \bar{q}, && \text{在边界 } \Gamma_2 \text{ 上.} && (3) \end{aligned} \right\}$$

整个边界为 $\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2$. 上式中, u_0 表示位函数或场函数的精确解(真实解), $k^2 = \omega^2 \varepsilon \mu$, \mathbf{n} 是按通常规则定义的外法线方向, \bar{u} 和 \bar{q} 都是给定的量.

对于大多数实际问题, 精确解是难以求得或无法求得的, 只好对问题进行数值近似求解. 设 u_0 和 q_0 的近似解分别为 u 和 q .

用 u^* 表示基本解, 它在求解拉普拉斯方程、泊松方程和亥姆霍兹方程时常取做自由空间的格林函数. u^* 在区域 Ω 中, 有连续的一阶导数. 当以 u^* 作为权函数时, 可以得到下边的加权残差表示式^[3]:

$$\int_{\Omega} (\nabla^2 u + k^2 u) u^* d\Omega = \int_{\Gamma_2} (q - \bar{q}) u^* d\Gamma - \int_{\Gamma_1} (u - \bar{u}) q^* d\Gamma, \quad (4)$$

图 1 二维区域

式中

$$q^* = \frac{\partial u^*}{\partial n} \quad (5)$$

对式(4)进行分部积分, 并考虑到

$$\nabla^2 u^* + k^2 u^* = -\delta(r - r_i), \quad (6)$$

则对于 Ω 中的一点 i , 我们能够得到下边的关系式^[3]

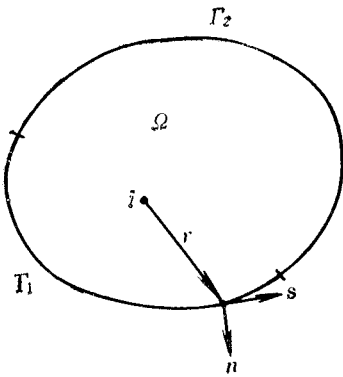
$$\left. \begin{aligned} u_i + \int_{\Gamma} u q^* d\Gamma &= \int_{\Gamma} q u^* d\Gamma, && \text{在 } \Omega \text{ 内;} \\ u &= \bar{u}, && \text{在 } \Gamma_1 \text{ 上;} \\ q &= \frac{\partial u}{\partial n} = \bar{q}, && \text{在 } \Gamma_2 \text{ 上.} \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

如果考虑的是满足二维亥姆霍兹方程问题, 那么可令

$$u^* = -\frac{j}{4} H_0^{(2)}(kr), \quad (8)$$

$$q^* = \frac{j}{4} H_1^{(2)}(kr) \frac{\partial(kr)}{\partial n} = \frac{j}{4} k H_1^{(2)}(kr) \cos \alpha, \quad (9)$$

式中的 $H_0^{(2)}$, $H_1^{(2)}$ 分别是零次和一类的第二类汉克尔 (Hankel) 函数; \mathbf{r} , \mathbf{n} 如图 1 所示. α 为 \mathbf{r} 和 \mathbf{n} 的夹角.



当点 i 也在 Γ 上时,式(7)变成(参见图 2).

$$c_i u_i + \oint_{\Gamma} u q^* d\Gamma = \oint_{\Gamma} q u^* d\Gamma, \tag{10}$$

式中 $c_i = 1 - \frac{\theta}{2\pi}$ (二维),对于光滑边界, $c_i = \frac{1}{2}$; $\oint = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma'}$, 表示取科希 (Cauchy) 积分主值,以后用到时,我们都用一般积分号“ \int ”表示. 式(10)是仅与边界量有关的积分方程式.

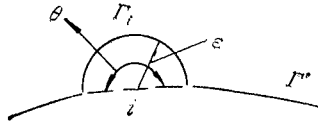


图2 点 i 在边界 Γ 上时的情况

三、离散化和代数方程组的形成

我们把边界分成 n 份,每份用直线段近似,设在这个直线段内 u 和 q 呈线性变化,则把它叫做线性元素.两个元素的交点取为节点(见图3).式(10)用 n 个元素离散化以后,变为

$$\begin{aligned} c_i u_i + \sum_{\substack{j \neq i \\ j \neq i-1}} \int_{\Gamma_j} u q^* d\Gamma + \int_{\Gamma_{i-1}} u q^* d\Gamma + \int_{\Gamma_i} u q^* d\Gamma \\ = \sum_{\substack{j \neq i \\ j \neq i-1}} \int_{\Gamma_j} q u^* d\Gamma + \int_{\Gamma_{i-1}} q u^* d\Gamma + \int_{\Gamma_i} q u^* d\Gamma. \end{aligned} \tag{11}$$

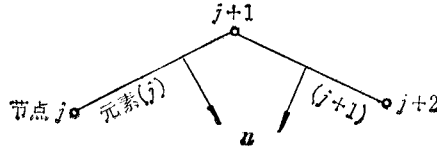


图3 元素和节点标号

下边用元素上的局部坐标来表示 u, q . 设元素长为 l , 用图 4 的关系来决定插值函数 ϕ_1 和 ϕ_2 .

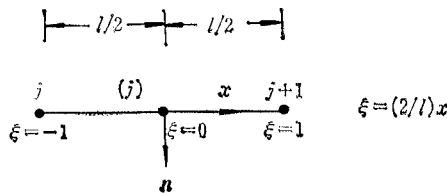


图4 元素 (j) 上的坐标

$$\left. \begin{aligned} u(\xi) &= [\phi_1 \phi_2] \begin{bmatrix} u_j \\ u_{j+1} \end{bmatrix}, \\ q(\xi) &= [\phi_1 \phi_2] \begin{bmatrix} q_j \\ q_{j+1} \end{bmatrix}, \end{aligned} \right\} \tag{12}$$

其中

$$\left. \begin{aligned} \phi_1 &= (1 - \xi)/2, \\ \phi_2 &= (1 + \xi)/2. \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

如果设

$$\left. \begin{aligned} h_{i1,i} &= \int_{\Gamma_j} \phi_1 q^* d\Gamma, \\ h_{i2,i} &= \int_{\Gamma_j} \phi_2 q^* d\Gamma; \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

$$\left. \begin{aligned} g_{i1,i} &= \int_{\Gamma_j} \phi_1 u^* d\Gamma, \\ g_{i2,i} &= \int_{\Gamma_j} \phi_2 u^* d\Gamma; \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

则式(11)变为

$$c_i u_i + [\hat{H}_{i1} \hat{H}_{i2} \cdots \hat{H}_{in}] \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix} = [G_{i1} G_{i2} \cdots G_{in}] \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_n \end{bmatrix}, \quad (16)$$

($i = 1, 2, \cdots, n$);

其中

$$\left. \begin{aligned} \hat{H}_{ij} &= h_{i1,j} + h_{i2,j-1}, \\ G_{ij} &= g_{i1,j} + g_{i2,j-1}. \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

式(16)也可以用矩阵形式写为

$$\mathbf{H}\mathbf{U} = \mathbf{G}\mathbf{Q}. \quad (18)$$

矩阵 \mathbf{H} 的元素为 H_{ij} , \mathbf{G} 的元素为 G_{ij} ,

$$H_{ij} = \begin{cases} \hat{H}_{ij}, & i \neq j; \\ \hat{H}_{ij} + c_i, & i = j. \end{cases}$$

四、 \mathbf{H} 和 \mathbf{G} 中矩阵元素的计算^[2,3]

1. 当 $j \neq i$ 或 $i - 1$ 时

$$\left. \begin{aligned} h_{i1,j} &= \int_{-1}^1 \frac{1}{2} (1 - \xi) \frac{j}{4} k H_1^{(2)}(kr) \cos \alpha d\xi \cdot \frac{l_j}{2}, \\ h_{i2,j} &= \int_{-1}^1 \frac{1}{2} (1 + \xi) \frac{j}{4} k H_1^{(2)}(kr) \cos \alpha d\xi \cdot \frac{l_j}{2}; \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

$$\left. \begin{aligned} g_{i1,j} &= \int_{-1}^1 \frac{1}{2} (1 - \xi) \left[-\frac{j}{4} H_0^{(2)}(kr) \right] d\xi \cdot \frac{l_j}{2}, \\ g_{i2,j} &= \int_{-1}^1 \frac{1}{2} (1 + \xi) \left[-\frac{j}{4} H_0^{(2)}(kr) \right] d\xi \cdot \frac{l_j}{2}; \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

其中 l_j 表示第 (j) 元素的全长。

设 (x_i, y_i) 表示节点 i 的坐标, 而 (x, y) 表示元素 Γ_j 上任一点的坐标。

下面计算 $\cos \alpha$ (参见图 5)。设

$$r = |\mathbf{r}| = [(x_i - x)^2 + (y_i - y)^2]^{1/2},$$

$$D = |\mathbf{D}|,$$

则 $\cos \alpha = \pm \frac{D}{r}$. 其正负号可按照下面的办法来决定:

在直角坐标系中, \mathbf{r}_1 和 \mathbf{r}_2 可写为

$$\mathbf{r}_1 = \mathbf{i}(x_j - x_i) + \mathbf{j}(y_j - y_i),$$

$$\mathbf{r}_2 = \mathbf{i}(x_{j+1} - x_i) + \mathbf{j}(y_{j+1} - y_i);$$

把 \mathbf{r}_2 顺时针旋转 90° , 则变为 \mathbf{r}'_2 , 得

$$\mathbf{r}'_2 = \mathbf{i}(y_{j+1} - y_i) + \mathbf{j}(x_i - x_{j+1});$$

再计算下值

$$\mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}'_2 = (x_j - x_i)(y_{j+1} - y_i) + (y_j - y_i)(x_i - x_{j+1}), \quad (21)$$

如果

$$\mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}'_2 \begin{cases} \geq 0, & \text{则 } \cos \alpha \text{ 取正号;} \\ < 0, & \text{则 } \cos \alpha \text{ 取负号.} \end{cases}$$

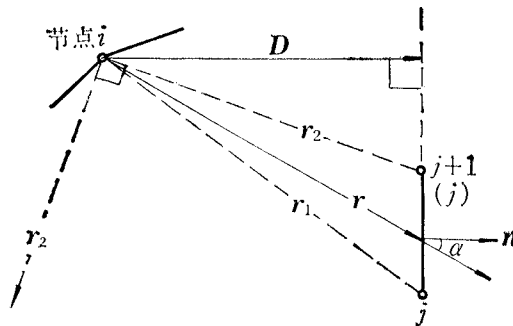


图5 计算 $\cos \alpha$ 时一些符号的意义

D 是这样求得的. (j) 元素所在直线可以用下边的方程表示,即

$$y = TA \cdot x + [y_j - TA \cdot x_j]; \text{ 当 } x_{j+1} \neq x_j \text{ 时,}$$

$$TA = (y_{j+1} - y_j) / (x_{j+1} - x_j).$$

设节点 i 到上述直线上任一点 (x, y) 的距离为 F , 则

$$F^2 = (x_i - x)^2 + (y_i - y)^2.$$

这样,使 $\frac{\partial F}{\partial x} = 0$ 的 (x, y) 与 (x_j, y_j) 之间的距离就是 D ,

$$D = \frac{|TA \cdot x_i - y_i + y_j - TA \cdot x_j|}{\sqrt{TA^2 - 1}}. \quad (22)$$

如果 $x_{j+1} = x_j$ 时

$$D = |x_j - x_i|.$$

有了以上准备,就可以用高斯 (Gauss) 积分公式计算式(19)和(20)的积分值了.

2. 当 $j = i$ 或 $i - 1$ 时

从图6可以看出,由于 \mathbf{r} 与 \mathbf{n} 垂直,所以 $\cos \alpha = 0$, 因此

$$h_{i1,i-1} = h_{i2,i-1} = h_{i1,i} = h_{i2,i} = 0. \tag{23}$$

通过比较复杂的推导,也可以求得

$$g_{i1,i} = \frac{j l_i}{4} \left\{ \frac{1}{k l_i} H_1^{(2)}(k l_i) + j \frac{2}{\pi} \left[\ln \frac{k l_i}{2} + \gamma - 1 - \left(\frac{1}{k l_i} \right)^2 \right] - 1 - \sum_{s=1}^{\infty} \frac{(-1)^s (k l_i)^{2s}}{(s!)^2 2^{2s} (2s+1)} \right. \\ \left. \times \left[1 - j \frac{2}{\pi} \left(\ln \frac{k l_i}{2} + \gamma - h_s - \frac{1}{2s+1} \right) \right] \right\}, \tag{24}$$

$$g_{i2,i} = -j \frac{l_i}{4} \left[\frac{1}{k l_i} H_1^{(2)}(k l_i) - j \frac{2}{\pi} \left(\frac{1}{k l_i} \right)^2 \right], \tag{25}$$

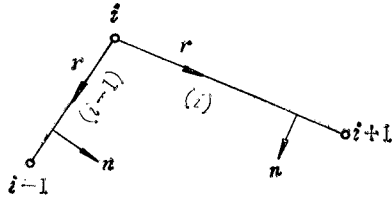


图6 节点 i 和元素 $(i), (i-1)$

其中尤拉常数 $\gamma=0.5772$, $h_s = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{s}$.

通过推导知道, $g_{i1,i-1}$ 和 $g_{i2,i-1}$ 分别与 $g_{i2,i}$ 和 $g_{i1,i}$ 的式子相同,只是用 l_{i-1} 代替 l_i 就可以了.

通过以上计算就可以求得 H 和 G 的所有元素. 然后对全部的节点给出 \bar{u} 或 \bar{q} 的边界值,解代数方程组,就能求出边界节点上未知的 u 和 q 了. 区内任一点的 u 和 q 就可用式(7)求出.

五、求阶梯开口波导的反射系数

1. 阶梯开口波导问题

我们要解决的是图7所示那样的阶梯开口波导问题,开口波导是由无限大平行平板构成的. 它分成宽窄两段,两段之间用锥削波导过渡. 锥削波导的角度 θ 是可变的,宽波

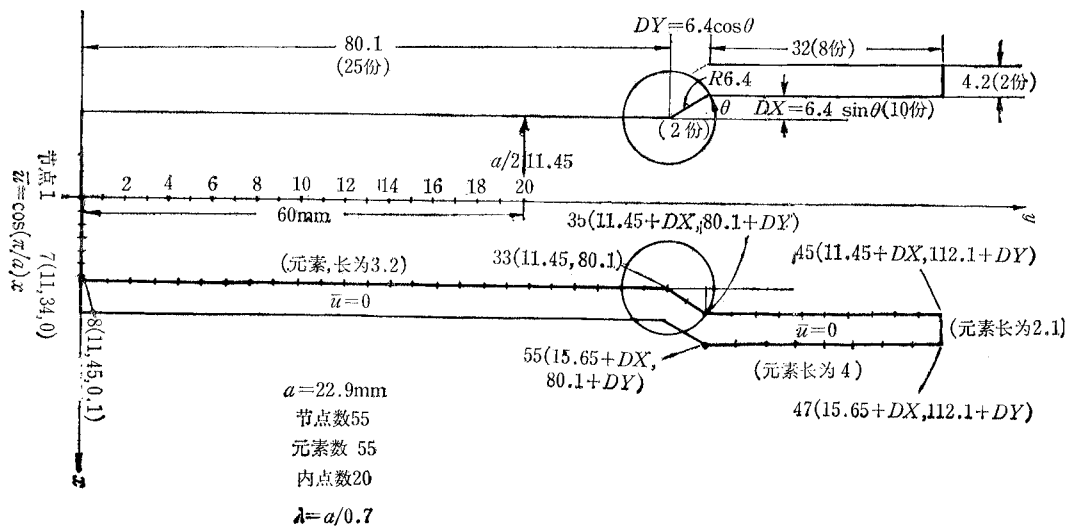


图7 阶梯开口波导

导的宽度随之改变。当 $\theta = 0^\circ$ 时, 整个结构就变为直开口波导; 当 $\theta = 90^\circ$ 时, 则变为突变阶梯波导。波导壁厚为 4.2mm, 其他尺寸见图 7。

用 H_{10} 波在 $y = 0$ 处激励波导。由于波导是不连续的, 在开口处和接头处都会反射基模, 同时还会产生高次谐波。但因为高次谐波衰减很快, 我们取的被计算的点离不连续处又较远, 因此, 可以认为在 $y = 0$ 处的反射波只有基模 H_{10} 波存在, 我们要求解的正是基模的反射系数。

计算中, 频率为 $f = 9.1703\text{GHz}$; 窄波导的宽边 $a = 22.9\text{mm}$, $a/\lambda = 0.7$ 。

取电场 E_z 为计算量, 这样显然是个二维问题。上边已经说过, 在 $y = 0$ 处存在的反射波为 H_{10} 波, 因此在 $y = 0$ 的波导截面上, 电场按正弦分布。因为坐标原点取在中心轴上, 所以边界条件可以写为

$$\left. \begin{aligned} \bar{u} &= \cos \frac{\pi}{a} x, & y = 0; \\ \bar{u} &= 0, & \text{其他边界.} \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

所有的 q 为未知数。

2. 边界分割和结构对称性的作用

因为电磁波离开辐射口以后, 衰减很快, 因此辐射口外边界不取在无穷远, 而取在离开口处一个波长以外的地方, 这对计算波导深处的反射系数已可保证有足够的精度。

我们所研究的问题是以中心纵轴对称的, 可以利用这种对称性来简化计算。剖析一个具体例子或进行一般分析, 就会看到, 如果令基本解为

$$u^* = -\frac{j}{4} [H_0^{(2)}(kr_1) + H_0^{(2)}(kr_2)], \quad (27)$$

则只对下半边界上节点建立方程就可以了。

式(27)中, r_1 为所研究那半边界上的节点到本半边元素上一点的距离; 而 r_2 是到对面那半边元素上的距离。

$$\left. \begin{aligned} r_1 &= [(x - x')^2 + (y - y')^2]^{1/2}, \\ r_2 &= [(x + x')^2 + (y - y')^2]^{1/2}, \end{aligned} \right\} \quad (28)$$

式中 (x, y) 为所研究那半边界上的节点的坐标; (x', y') 为同边某元素上的一点。与 (x', y') 对称的对面元素上的点为 $(-x', y')$ 。

最后所建立的代数方程组如下:

$$\begin{aligned} c_i u_i + (h_{i1,i})u_1 + (h_{i2,i} + h_{i1,i2})u_2 + \cdots + (h_{i2,n-1} + h_{i1,n})u_n \\ = (g_{i1,i})q_1 + (g_{i2,i} + g_{i1,i2})q_2 + \cdots + (g_{i2,n-1} + g_{i1,n})q_n, \end{aligned} \quad (29)$$

$$(i = 1, 2, \cdots, n);$$

式(29)的 $h_{i,j}$ 和 $g_{i,j}$ 中所用的基本解及其微商都由式(27)得来。

在对面元素上, 计算时使用的法线方向与原来的相同, 即沿边界逆时针走时, 法线为右手所指方向。

对于半个波导边界, 共取 55 个节点。 $y = 0$ 处的窄波导端口取 7 个节点, 第 7 个和第 8 个节点相距很近, 这是因为要躲开这个难处理的拐角点^[1]。其他节点取法见图 7。因为要计算 $h_{i1,n}$ 和 $g_{i1,n}$, 还要取一个虚节点 $n + 1$, 以形成第 (n) 个元素。但 $u_{n+1} =$

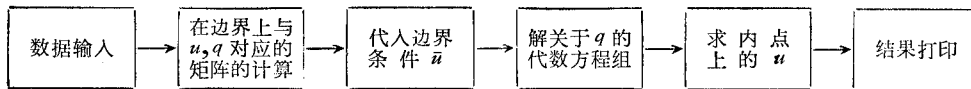
$q_{n+1} = 0$.

节点 1 到节点 7 是按等长分割为六个元素. 节点 8 到 33, 节点 33 到 35, 节点 35 到 45, 节点 45 到 47, 节点 47 到 55 也都按等长分割为若干元素. 元素总数共计 55 个.

内点取在中心轴上, 每隔 3mm 取一个点, 共取 20 个内点.

因为只取一半节点进行研究, 当在对面那半边元素上积分时, 这些元素与所考虑的节点(节点 1 除外)没有相邻的问题, 所以用式(19)和(20)计算就可以了. 而对于节点 1, 有 $h_{11,1}(r_1) = h_{11,1}(r_2) = h_{12,1}(r_1) = h_{12,1}(r_2) = 0$; $g_{11,1}(r_1)$, $g_{11,1}(r_2)$, $g_{12,1}(r_1)$ 和 $g_{12,1}(r_2)$ 的计算也要调用式(24)和(25). 括号中的 r_1 和 r_2 分别表示对下半面和上半面的积分.

3. 主要的程序方框图



六、计算结果

我们取四种 θ 值进行了计算, 结果列在表 1 到表 4 中.

表 1 $\theta = 0^\circ$ (相当于直开口波导)

内点号	E_z 幅度	内点号	E_z 幅度
1	0.931881542	11	0.923702585
2	0.894953112	12	0.987425199
3	0.913002828	13	1.043737167
4	0.972690775	14	1.061015248
5	1.033977122	15	1.030367966
6	1.061412306	16	0.9678159
7	1.040721433	17	0.909913799
8	0.982585554	18	0.895880981
9	0.919962309	19	0.936103335
10	0.893991451	20	1.001755962

反射系数 $|r| \approx 0.085$

表 2 $\theta = 30^\circ$

内点号	E_z 幅度	内点号	E_z 幅度
1	1.007064893	11	0.874105024
2	0.964104116	12	0.822640
3	0.89027996	13	0.83257845
4	0.829433651	14	0.896245122
5	0.824724349	15	0.9690167
6	0.8798	16	1.0082689
7	0.95478146	17	0.9979
8	1.00397238	18	0.93341602
9	1.001805	19	0.85909218
10	0.949341277	20	0.819000357

反射系数 $|r| \approx 0.1008$

表 3 $\theta = 60^\circ$

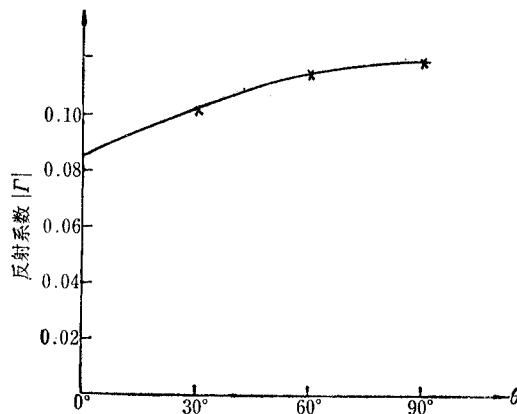
内点号	E_z 幅度	内点号	E_z 幅度
1	1.014398182	11	0.872038891
2	0.971934538	12	0.80834239
3	0.890728993	13	0.811883584
4	0.817663744	14	0.879877838
5	0.804507068	15	0.963066207
6	0.861709551	16	1.012148648
7	0.946398323	17	1.002587645
8	1.006022374	18	0.938645976
9	1.009908019	19	0.854396365
10	0.95620725	20	0.802498581

反射系数 $|\Gamma| \approx 0.114$ 表 4 $\theta = 90^\circ$ (突变阶梯波导)

内点号	E_z 幅度	内点号	E_z 幅度
1	1.01071769	11	0.859370509
2	0.96272747	12	0.797739079
3	0.878261145	13	0.807212971
4	0.806168847	14	0.880213793
5	0.798433121	15	0.964309852
6	0.861257497	16	1.010536804
7	0.947811414	17	0.996139921
8	1.005275796	18	0.927931826
9	1.004577796	19	0.841721685
10	0.946047511	20	0.79297474

反射系数 $|\Gamma| \approx 0.1177$

以上各表中, E_z 的幅度随着距离而起伏变化, 显示出场的驻波状态. 这是由于波导不连续, 有开口, 因而有反射, 从而形成了驻波. 反射系数 $|\Gamma|$ 与 θ 的关系如图 8 所示.

图 8 $|\Gamma|$ 与 θ 的关系

$|\Gamma|$ 的计算方法是, 根据 E_z 幅度呈现的驻波状态算出驻波比, 然后求出 $|\Gamma|$.

本题目的计算是使用德国西门子计算机进行的,对 θ 的一个角度, CPU 需 240s 左右。

七、结 论

为了检验结果的正确性,我们看一下 $\theta = 0^\circ$ 这一特殊情况。这时变成了直开口波导。对于直开口波导, $|T| = 0.085$, 与文献[3]的图 12 相比,是比较一致的。再有,从驻波状态可求出波导波长,它与用解析式子计算的值相当接近。这些都证明我们的计算结果是可信的。

我们还曾用文献[4]的公式,计算了 $\theta = 90^\circ$ 的突变波导的 $|T|$ 。虽然文献[4]中的突变阶梯波导是两头伸向无穷远的,与开口的不同,但仍可供参考。计算结果表明,我们对开口突变波导的计算是合理的。

参 考 文 献

- [1] C. A. Brebbia, *The Boundary Element Method for Engineers*, Pentech Press, (1978).
- [2] 李志元,电磁问题中的边界元素法,电子技术,1982年,第2期,第23页。
- [3] 鹭巢 慎等,境界要素法による開放領域問題の解析,電気学会電磁界理論研究会資料,EMT-81-15,1981年。
- [4] F. Sporleder, *Waveguide Tapers Transitions and Couplers*, (IEE Electromagnetic Waves Series 6), IEE, 1979.

CALCULATION OF REFLECTION COEFFICIENT FOR STEP-OPEN WAVEGUIDE WITH BOUNDARY ELEMENT METHOD

Li Zhongyuan

(*Department of Electronic Engineering, Beijing Institute of Technology*)

In this paper, the boundary element method (BEM) and the finite element method (FEM) are compared. Then the formulation of Helmholtz equation by BEM and the calculation of the reflection coefficient for step-open parallel plate waveguide by BEM are presented. Finally the flow-chart of the program and the computed results are given. Comparison of the computed results for the standing wave state with those given by the related literature shows that the computed results are reasonable.