

# 分组衰落信道下 LDPC 的一种带信道估计的改进 Belief-Propagation 算法

邓建民 尹长川 纪红 乐光新  
(北京邮电大学电信工程学院 北京 100876)

**摘要:** 该文首先通过仿真证明了 LDPC (Low Density Parity Check code) 在分组衰落信道下, 以通常的 Belief-propagation 算法译码, 具有较好性能。然后基于算法的特殊迭代特性, 提出分组衰落信道下, 在每一迭代步骤中结合信道估计的改进的 Belief-propagation 算法。仿真证明, 该算法可以有效地减少译码迭代次数。

**关键词:** LDPC, 信道估计, 改进的 Belief-propagation 算法

中图分类号: TN911.23 文献标识码: A 文章编号: 1009-5896(2005)04-0519-04

## An Improved Belief-Propagation Algorithm with Channel Estimation of LDPC under Block Fading Channels

Deng Jian-min Yin Chang-chuan Ji Hong Yue Guang-xin  
(Telecom Eng. School, Beijing Univ. of Posts and Telecom., Beijing 100876, China)

**Abstract** Firstly it is proved by simulation that the Low Density Parity Check(LDPC) code has sound performance under block fading channel when decoded by general belief-propagation algorithm. Then based on its special iterative nature, the improved belief-propagation algorithm is proposed under block fading channel with channel estimation in every iterative step. The simulation demonstrates that the proposed algorithm can effectively reduce the iterative times of decoding.

**Key words** LDPC(Low Density Parity Check code), Channel estimation, Improved belief-propagation algorithm

### 1 引言

LDPC(Low Density Parity Check code)在二进对称信道(Binary Symmetric Channel, BSC), 加性高斯白噪声(Additive White Gaussian Noise, AWGN), 二进删除信道(Binary Erasure Channel, BEC)等无记忆信道中的优异性能已经得到了充分的研究和认识<sup>[1-5]</sup>, LDPC独特的置信传播(Belief-propagation)算法有利于把信道记忆性等相关信息考虑进去, 因此可以相信LDPC在有记忆信道中性能也是好的。分组衰落信道是一种可模拟跳频扩谱系统的简单有记忆信道。

本文使用简单衰落模型(Simple Fading Model, SFM), 对置信传播算法进行改进, 嵌入了信道估计信息。与通常置信传播算法的比较表明, 在置信传播算法中加入对信道的估计信息, 可以有效地减小迭代译码算法的迭代次数, 从而在有限的最大迭代次数下, 可以得到更小的误比特率。

### 2 系统模型

SFM 可以模拟为一对具有不同信噪比(Signal Noise Ratio, SNR)的 Gauss 信道, 并且使用二进双极性不归零(NZ)信号。在分组衰落信道中, 假设分组大小为  $m$ , 以概率  $p$  选

择一个 SNR 较大的信号, 以概率  $1-p$  选择另一个 SNR 较小的信道, 然后把信道符号以相应的 SNR 参数, 在选择的信道上发射。在解调时, 如果接收机知道每个符号使用了哪个信道, 则信道状态信息(Channel Side Information, CSI)是良好的。反之, 接收机不知道接收符号对应哪个信道, 则是 CSI 不好的情况。通常情况下需要信道信息状态的估计。在这两种情况下, 分别假定了接收机知道分组的边界, 信道选择概率, 以及信道 SNR。在 SFM 系统中, “好”和“坏”信道相应于衰落信道中多径为加强影响或者减弱影响(干扰发射台或者多址接口)的符号, 并且分组方案的伪随机图样保证了分组状态是独立的。

这样 SFM 信道以概率  $p$ , 选择一个“好”的信道(状态  $s=0$ ), 对应于标准差为  $\sigma_1$  的 Gauss 过程; 信道以概率  $1-p$ , 选择一个“坏”的信道(状态  $s=1$ ), 对应于标准差为  $\sigma_2$  的 Gauss 过程。

在  $n$  个信道符号中, 设分组长度为  $m$ , 一般假设  $m$  整除  $n$ , 每个符号  $i$  所处的信道状态为  $S_i$ , 则信道状态集合为  $S = \{S_1, S_2, \dots, S_n\}$ 。在  $S$  中存在关系 “ $\sim$ ”:  $S_i \sim S_j$ ,  $i \neq j \Leftrightarrow (i-1) \setminus m = (j-1) \setminus m$ , 其中 “ $\setminus$ ” 表示整数相除的整数部分。则由关系 “ $\sim$ ” 定义的等价类  $[S_i]$  表示  $m$  长分组

的信道状态。关系“ $\sim$ ”表明分组衰落信道中的分组的长度为 $m$ 。在下面的论述中可以看到,信道状态在表达式中并不处于突出的位置,所以论述时,不加区别用 $S_i$ 表示比特节点 $V_i$ 的信道状态,实际上比特节点 $S_j, j \neq i$ 的信道状态也可能是 $S_i$ ,只要 $i \sim j$ ,但表示时用的是 $S_j$ 。这不会影响到对表达式的理解。

### 3 译码算法

对于 SFM 模型,线性分组码的码长较长时,译码过程中由于置信传播译码算法其本身的信息传递过程,可以一定程度上克服分组衰落的影响(见图2、图3),但这不是最优方案,本文第5节用 SFM 模型通过仿真表明,在分组衰落的情况下,对信道状态进行估计,并使之修正置信传播算法比特节点的先验概率,这样,无论在误码率还是在译码迭代次数方面都优于通常的没有信道状态估计的置信传播算法。置信传播算法能有效地对基于低密度矩阵的线性分组码进行译码,理论分析与仿真结果(见图2、图3)表明,在分组衰落信道下,如果不加以修正,通常的置信传播算法,性能也非常好。但是,联合信道状态估计和密度置信的算法是一种现实可行的,更加较为可取的方案。

### 4 利用信道估计对置信传播算法进行改进

低密度码在 AWGN 信道下的突出性能,是由于其本身具有的多次信息传递过程。本文中提出带有信道状态估计的置信传播算法(图1),并且将其余与无信道状态估计的情况进行比较,结果较理想。

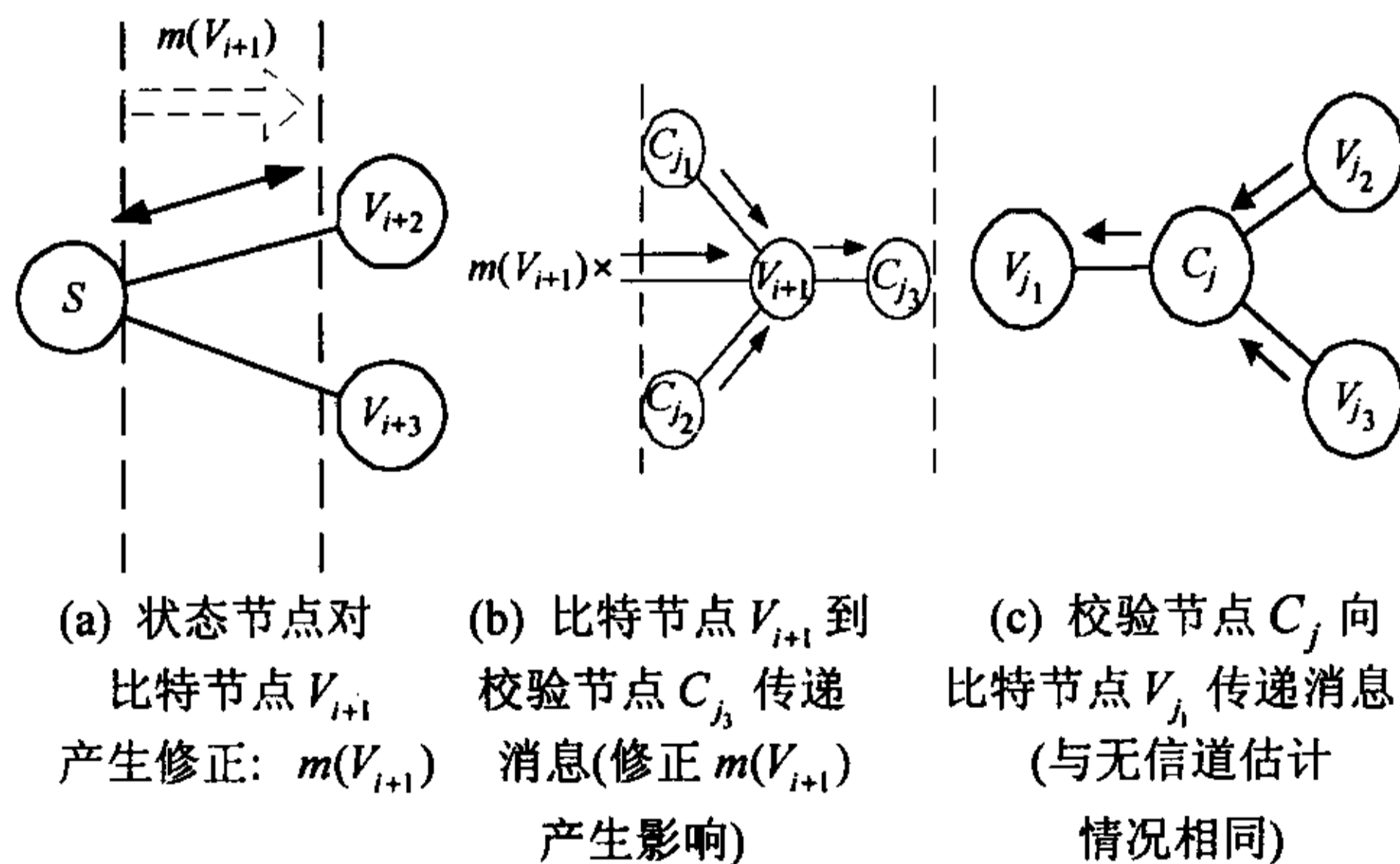


图1 联合信道状态估计的置信传播算法消息传递图

#### 4.1 初始化

在信道状态为 $S_i = s$ 并且 $X_i = x$ 的条件下,信道输入为 $V_i = v$ 的后验概率为 $\Pr(V_i = v | S_i = s, X_i = x)$ ,其中 $v \in \{0,1\}$ 。把后验概率 $\Pr(V_i = v | S_i = s, X_i = x)$ 看作信道状态 $S_i$ 的随机变量。因此在 $V_i$ 的后验概率 $R_{C_j}(V_i = v)$ 可以初始化为 $\Pr(V_i = v | S_i = s, X_i = x)$ 对信道状态 $S_i$ 的均值( $E_{S_i}\{\cdot\}$ ) $R_0^i(v)$ ,并且对 $R_0^i(-1)$ 和 $R_0^i(1)$ 做归一化。

$$\begin{aligned} R_0^i(v) &= \alpha E_{S_i} \{ \Pr(V_i = v | S_i = s, X_i = x) \} \\ &= \alpha \sum_{s=0}^1 \Pr(V_i = v | S_i = s, X_i = x) \Pr(S_i = s) \\ &= \alpha \sum_{s=0}^1 \frac{\Pr(X_i = x | V_i = v, S_i = s) \Pr(V_i = v)}{\Pr(X_i = x | S_i = s)} \Pr(S_i = s) \quad (1) \end{aligned}$$

其中,由于 SFM 模型中信道的选择与信源符号无关,所以 $S_i$ 和 $V_i$ 是相互独立的,式(1)中应用了这个性质。此外,式(1)中 $\alpha$ 为归一化因子,是为了使得 $R_0^i(-1) + R_0^i(1) = 1$ 。在下面的讨论中,为了简化符号表示,如果有两个成对的处于对称位置的项,归一化因子被略去。而

$$\begin{aligned} \Pr(X_i = x | S_i = s) &= \sum_{u \in \{-1,1\}} \frac{\Pr(X_i = x, V_i = u, S_i = s)}{\Pr(S_i = s)} \\ &= \sum_{u \in \{-1,1\}} \Pr(X_i = x | V_i = u, S_i = s) \Pr(V_i = u) \quad (2) \end{aligned}$$

由于信源符号是均匀的,所以 $\Pr(V_i = 1) = \Pr(V_i = -1) = 1/2$ ,把式(2)代入式(1),可得

$$R_0^i(v) = \alpha \sum_{s=0}^1 \frac{1}{1 + [\text{LikelyRatio}(S_i = s)]^v} \Pr(S_i = s) \quad (3)$$

其中

$$\text{LikelyRatio}(S_i = s) = \frac{\Pr(X_i = x | V_i = 1, S_i = s)}{\Pr(X_i = x | V_i = -1, S_i = s)}$$

表示第 $i$ 个比特节点位置的信道状态为 $S_i = s$ 的似然比。

#### 4.2 计算比特节点到校验节点传递的消息

与通常的置信传播算法一样<sup>[6]</sup>,迭代过程需要计算比特节点到校验节点传递的消息。使用信道状态估计对比特节点的先验概率进行修正。

$$\begin{aligned} Q_{C_j}(V_i = v) &= \Pr\{C_j \text{ 校验满足} | V_i = v\} \\ &= \sum_{v' \in \{-1,1\}^{n-1}} I(\|V_{C_j}\| = 0) \prod_{i \in I(C_j)} R_{C_j}(V_i = v_i) \quad (4) \end{aligned}$$

其中 $V = (v_1, \dots, v_n)$ ,  $V^i = (v_1, \dots, v_{i-1}, v_{i+1}, \dots, v_n)$ ,  $V_{C_j} = (v_{i_1}, \dots, v_{i_{c_j}})$ ,  $i_\ell (\ell = 1, \dots, c_j) \in I(C_j)$ ,而 $I(C_j)$ 表示与 $C_j$ 邻接的比特节点的指标集合。而 $\|V_{C_j}\| = \sum_{i=1}^{c_j} v_i$ ,  $c_j$ 表示 $C_j$ 校验节点的度数。

$Q_{C_j}(V_i = 1)$ 和 $Q_{C_j}(V_i = -1)$ 表示两个概率,故不需要归一化因子,并且它们表示由校验节点 $C_j$ 到比特节点 $V_i$ 传递的消息。

由式(4)可以看出,把 $Q_{C_j}(V_i)$ 看作随机变量 $\xi_i$ 的分布, $R_{C_j}(V_i)$ 看作 $\eta_i$ 的分布,那么, $\xi_i$ 为 $\xi_j, j \in I(C_j)$ 的模2和。所以 $Q_{C_j}(V_i)$ 为 $R_{C_j}(V_k), k \in I(C_j)$ 的循环卷积。循环卷积到频域上为FFT的乘积,因此,令

$$\hat{Q}_{C_j}(V_i) = Q_{C_j}(V_i = -1) - Q_{C_j}(V_i = 1) \quad (5)$$

$$\hat{R}_{C_j}(V_k) = R_{C_j}(V_k = -1) - R_{C_j}(V_k = 1) \quad (6)$$

则有

$$\hat{Q}_{C_j}(V_i) = \prod_{k \in I(C_j) \setminus i} \hat{R}_{C_j}(V_k) \quad (7)$$

式(7)使得计算过程中判断条件减少, 并且具有统一的形式, 有利于计算。

### 4.3 信道状态估计及其对置信传播产生的作用

信道状态节点对信道状态进行估计, 并对比特节点到校验节点发送的消息产生影响。

根据假设条件, 接收端知道 SFM 模型中分组的界, 所以信道状态为  $\{S_1, \dots, S_n\}$ ,  $S_i$  表示比特节点  $V_i$  的符号所处的信道状态。

首先, 计算

$$Q(V_i = v) = \sum_{j \in \mathcal{I}(V_i)} Q_{C_j}(V_i = v)$$

比特节点  $V_i$  向状态节点传递的消息为

$$\begin{aligned} Q_{V_i}(S_i = s) &= \sum_{v \in \{-1, 1\}} Q(V_i = v) \Pr\{V_i = v | X_i = x, S_i = s\} \\ &= Q_{V_i = -1}(0) \Pr\{V_i = -1 | X_i = x, S_i = s\} \\ &\quad + Q_{V_i = 1}(0) \Pr\{V_i = 1 | X_i = x, S_i = s\} \end{aligned} \quad (8)$$

而

$$\begin{aligned} \Pr\{V_i = v | X_i = x, S_i = s\} &= \frac{\Pr\{V_i = v, X_i = x, S_i = s\}}{\Pr\{x_i = x, S_i = s\}} \\ &= \frac{\Pr\{X_i = x | V_i = v, S_i = s\} \Pr\{V_i = v, S_i = s\}}{\Pr\{x_i = x, S_i = s\}} \\ &= \frac{1}{\text{LikelyRatio}(S_i = s)^{-v} + 1} \end{aligned} \quad (9)$$

把式(10)代入式(9)可得

$$\begin{aligned} Q_{V_i}(S_i = s) &= Q_{V_i = -1}(0) \frac{1}{\text{LikelyRatio}(S_i = s) + 1} \\ &\quad + Q_{V_i = 1}(0) \frac{1}{\text{LikelyRatio}(S_i = s)^{-1} + 1} \end{aligned} \quad (10)$$

所以, 信道状态节点向校验节点传递的消息:

$$R_{V_i}(S_i = s) = P(S_i = s) \prod_{k \in I(C_j) \setminus i} Q_{V_i = v}(S_i = s) \quad (11)$$

信道节点  $S_i$  对节点  $V_i$  的修正为

$$\begin{aligned} m(V_i = v) &= \sum_{s=0}^1 \Pr\{V_i = v | X_i = x, S_i = s\} R_{V_i}(S_i = s) \\ &= \sum_{s=0}^1 \frac{1}{1 + \text{LikelyRatio}(S_i = s)^{-v}} R_{V_i}(S_i = s) \end{aligned} \quad (12)$$

### 4.4 比特节点向校验节点传递的消息

比特节点向校验节点传递的消息, 与不带信道状态估计时的不同为, 用式(13)中的  $m(V_i = v)$  替换比特节点的先验概率:

$$R_{C_j}(V_i = v) = m(V_i = v) \prod_{k \in I(C_j) \setminus j} Q_{C_k}(V_i = v)$$

## 5 仿真结果

仿真条件: 低密度码校验矩阵  $H$  为  $10240 \times 5120$  二进制矩阵, 每个比特由 3 个校验矩阵校验, 并且  $H$  是正规的。采用 LU 分解算法进行编码, 其中分解时对角线元素的选取使用 "minprod" 算法<sup>[7]</sup>。码的码率为 1/2。译码时, 最大迭代次数为 100。SFM 模型中使用的两个信噪比相差 7dB。

仿真结果的分析: 在图 2(a)中, 从带有信道状态估计的置信传播算法和通常的置信传播算法对同一个接收符号序列的译码结果来看, 信道状态估计对误码率的改善是有好处的, 同时由于信道状态估计使得消息的传递更有效率, 在未达最大译码次数, 并且正确译码的前提下, 使得迭代次数减少, 从而减少了译码时间, 图 2(a)证明了这个判断。同时注意到, 信道状态估计无论使用与否, 置信传播算法的性能都是较为理想的, 如果不致使硬件的开销增大, 应用时, 通常的置信传播算法译码器也是较为理想的(在 SNR 为 3dB 时, 实验误码率为  $10^{-6}$ )。而图 3 表明, 采用信道状态估计时, 迭代次数降低, 从而可有效提高译码器效率。

仿真中使用随机产生的低密度码校验矩阵, 在码字分组中, 比特位置的选取也是随机的(minprod'算法), 这有效对抗了分组衰落带来的影响, “好”信道状态的比特信息通过消息传递, 校验纠正了“坏”信道状态的比特。因此, 低密度码对抗突发差错的效果是较好的。

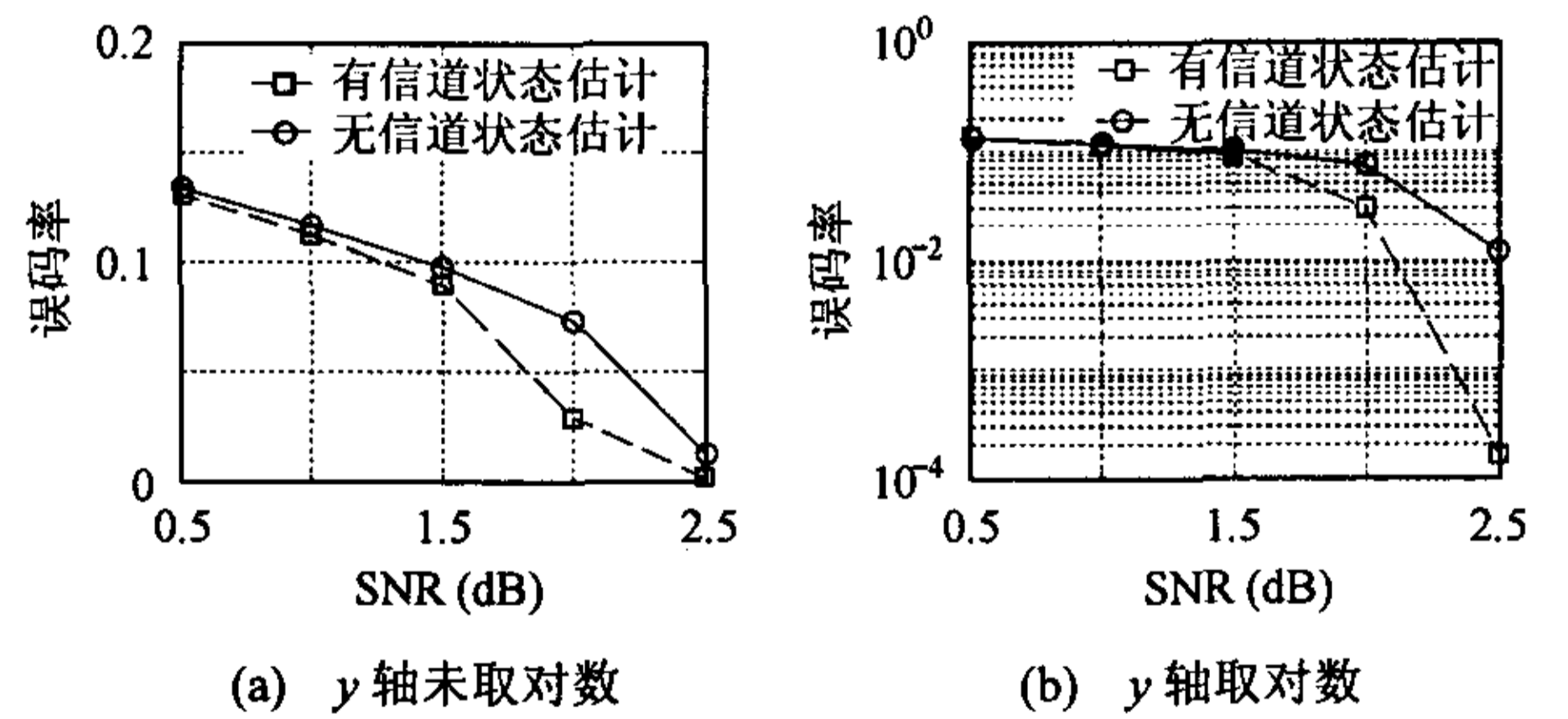


图2 误比特率性能比较

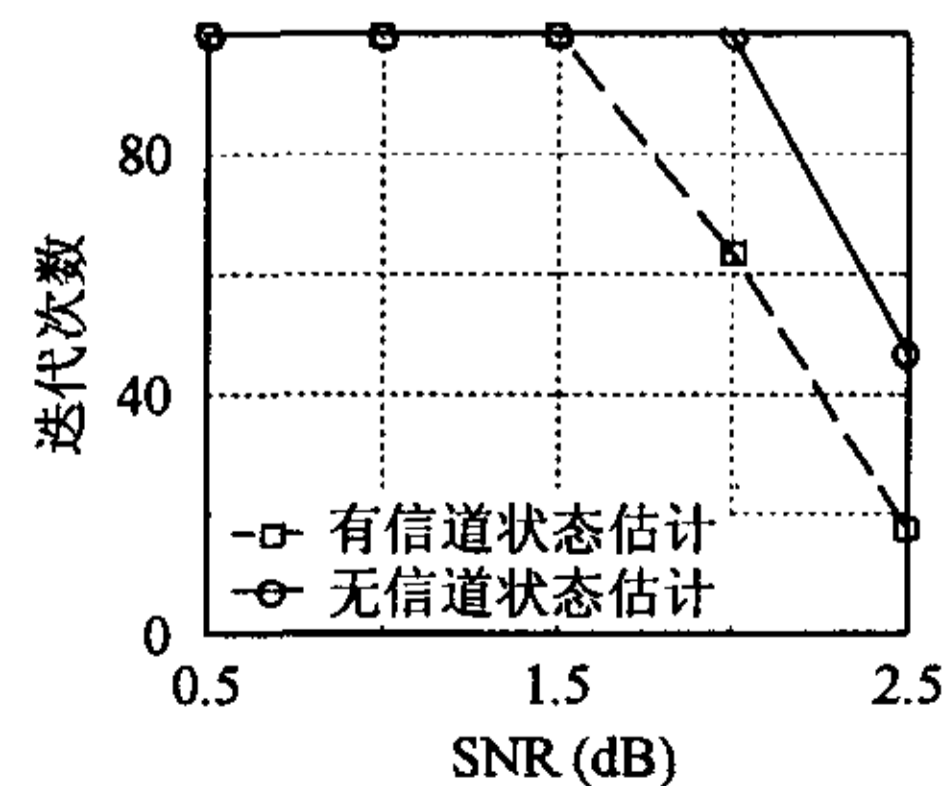


图3 所需迭代次数比较

## 6 结论

AWGN 信道上 LDPC 译码的置信传播算法, 可以以很小的附加复杂性扩展为分组衰落信道上的带有信道估计的译码算法。仿真证明, 联合置信传播译码与信道状态估计的算法比只用信道先验概率的译码算法要好。

### 参考文献

- [1] MacKay D J C. Good error correcting codes based on very sparse matrices. *IEEE Trans. on Info. Theory*, 1999, 45(3): 399 – 431.
- [2] Gallager R G. Low density parity check codes. *IRE Trans. on Info. Theory*, 1962, 8: 21 – 28.
- [3] Gallager R G. Low density parity check codes. [PhD thesis], Cambridge, MA: MIT Press, 1963.
- [4] Di Changyan, Proietti D, Emre Telatar I, Richardson T J, Urbanke R L. Finite-length analysis of low-density parity-check codes on the binary erasure channel. *IEEE Trans. on Info. Theory*, 2002, 48(6): 1570 – 1579.
- [5] MacKa, D J C, Neal R M. Good codes based on very sparse matrices. *Cryptography and Coding 5th IMA Conf.*, C.Boyd, ed, Lecture Notes in Computer Science, Berlin, Germany: Springer, 1995, 1025: 100 – 111.
- [6] Pearl J. Probabilistic Reasoning in intelligent systems: Networks of Plausible Inference. San Mateo, Calif: Morgan Kaufmann Pub., Inc., 1988: Chap 4.2.3, 162 – 174.
- [7] 邓建民. 低密度码编译码技术的研究 [博士论文]. 北京: 北京邮电大学, 2003.

邓建民: 男, 1974 年生, 博士生, 主要从事高速信息传输、无线移动 Internet 接入等方面的研究。

尹长川: 男, 1968 年生, 副教授, 主要从事编码调制技术、高速信息传输、宽带接入、无线通信等方面的研究。

纪红: 女, 1966 年生, 教授, 主要从事通信网及计算机网技术、高速信息传输、无线移动 Internet 接入等方面的研究。

乐光新: 男, 1936 年生, 教授, 博士生导师, 主要从事移动通信、高速信息传输、无线移动 Internet 接入等方面的研究。