

求解三维问题的区域分解时域有限差分方法¹

许 锋 洪 伟 周后型

(东南大学计算电磁学研究中心 南京 210096)

摘 要 该文提出一种用于三维复杂问题的区域分解时域有限差分算法 (DD-FDTD)。依据待解三维复杂问题的特点, 将其分解为几个子区域, 每个子域中的问题相对简单, 可采用适合于该区域的共形网格进行划分计算, 通过插值再修正误差的办法, 把各个子区域综合起来, 获得原问题的解。这样, 应用区域分解的思想, 简化了复杂的问题。修正误差的方法, 使本算法得以实现并大幅度提高了计算精度。采用本算法对三维口径天线问题进行了分析计算并与实测数据进行了对比, 验证了算法的正确性。

关键词 区域分解, 时域有限差分法, 共形网格, 口径天线

中图分类号 TN015

1 引 言

时域有限差分 (FDTD) 方法自 Yee 于 1966 年提出之后^[1], 已经获得了广泛应用和迅猛发展。但是, 该方法的计算特点, 限制了划分网格的自由度, 这使得在应用 FDTD 方法计算复杂问题和不规则边界等问题时, 会遇到一些困难并导致计算精确性下降。目前主要有 3 种方法可以用来解决这类问题。第 1 种方法是引入曲线坐标系^[2,3], 场以张量形式给出, 分为协变分量和逆变分量进行处理, 该方法具有良好的适应性, 但方法实施过程比较复杂, 且计算量和存储量都比较大; 第 2 种方法是用 Maxwell 积分方程处理不规则边界^[4,5], 该方法基本上可以保留 FDTD 方法原来的优点, 但是算法的稳定性和精度有所下降; 第 3 种方法是插值类方法^[6,7], 该方法简单易行, 经误差修正后, 算法的稳定性和精度都比较好, 缺点是修正过程随意性较大, 缺乏必要的理论支撑。除了上述方法外, 还有一些混合方法^[8,9] 处理不规则边界问题。

本文在第 3 种方法的基础上, 提出一种统一的误差修正办法, 并引入区域分解的思想, 把待解问题分解为若干子区域, 在各个子区域中, 依据待解问题的特点, 采用适合于该区域的共形网格进行划分, 然后独立计算。各个子区域的共形网格在相邻的边界区域相互重叠, 所需的边界上的信息, 从相邻的子域中获得。将各子域的边界视为广义的吸收边界条件, 就可以获得一种统一的、行之有效的和精确的信息传递方案, 把各个子区域综合起来, 获得原问题的精确解, 大幅度地削减了插值误差, 解决了因插值误差累积而导致的迭代发散的问题, 提高了计算精度和效率, 从而使区域分解的构想得以实现。在文献 [10] 中, 我们用该方法解决了一些二维复杂问题, 现在, 将此方法推广到三维问题, 拓展了其应用范围。

2 DD-FDTD 算法

引入区域分解思想, 可以将一个复杂问题分解为若干个小问题。在每个子问题域中, 使用最适合的共形网格形式, 各子域的差分迭代是稳定的且精度可以得到保证。为了把各个子域综合起来, 在各个子域相邻的边界区域中, 各个子域的共形网格在此要相互重叠。各子域最外层或最里层电场或磁场的信息, 除吸收边界条件和已知边界条件外, 必须从相邻子域中获得。由 FDTD 方法的计算特点和各个子域网格划分的多样性, 决定了要用插值的办法加以解决。如图 1 所示, 两个子域在相邻区域相互重叠, 双方最外层的磁场从对方的区域中通过插值而获得。

在三维情况下, 采用三线性插值法, 如图 2 所示, F 为一个子域边界上、待插值的未知值 (电场或磁场), 其坐标为 (dx, dy, dz) , G 为另一个子域中电场或磁场的已知值。长方体的边长分别为 x_0, y_0 和 z_0 。这样, 我们有

¹ 2002-03-15 收到, 2002-09-23 改回

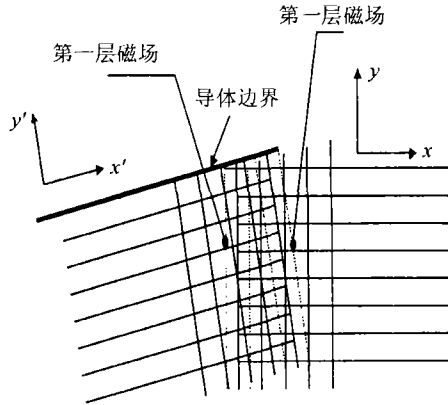


图 1 两子域网格在边界处相互重叠

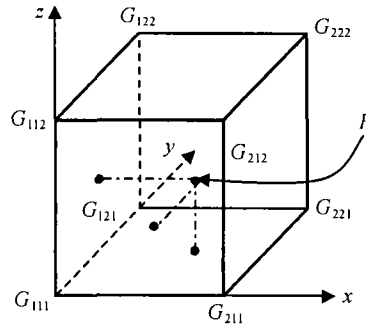


图 2 三线性插值示意图

$$\begin{aligned}
 F = & \frac{(x_0 - dx)(y_0 - dy)(z_0 - dz)}{x_0 y_0 z_0} G_{111} + \frac{dx(y_0 - dy)(z_0 - dz)}{x_0 y_0 z_0} G_{211} + \frac{dxdy(z_0 - dz)}{x_0 y_0 z_0} G_{221} \\
 & + \frac{(x_0 - dx)dy(z_0 - dz)}{x_0 y_0 z_0} G_{121} + \frac{(x_0 - dx)(y_0 - dy)dz}{x_0 y_0 z_0} G_{112} + \frac{dx(y_0 - dy)dz}{x_0 y_0 z_0} G_{212} \\
 & + \frac{dxdydz}{x_0 y_0 z_0} G_{222} + \frac{(x_0 - dx)dydz}{x_0 y_0 z_0} G_{122}
 \end{aligned} \tag{1}$$

通过使用上述插值方法, 可以获得子域的边界值, 从而进行子域的 FDTD 迭代计算。但是, 由于插值误差的存在, 当该误差累积到一定程度后, 就会使得时间迭代过程发散, 造成 FDTD 法计算崩溃, 因此, 必须大幅度削减插值误差, 才能维持稳定的迭代过程并保持 FDTD 方法的精确性。

如图 3 所示, 边界第 I 层上的磁场分量由插值获得后, 如果我们将该边界视为广义的吸收边界, 受文献 [11] 超吸收边界条件的启发, 可以考虑在第 $I-0.5$ 层电场分量上修正误差。图 3 中, 第 I 层上的插值误差可表示为:

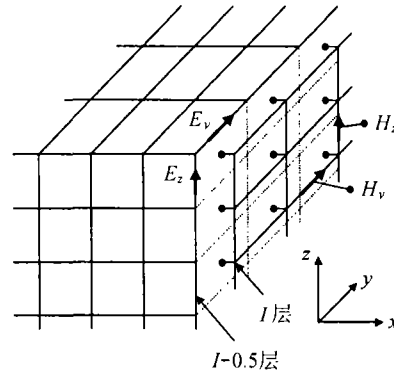


图 3 三维 Yee 网格示意图

$$\text{er}_1^y = \tilde{H}_y^{n+1/2}(I, j, k + 1/2) - H_y^{n+1/2}(I, j, k + 1/2) \tag{2}$$

$$\text{er}_1^z = \tilde{H}_z^{n+1/2}(I, j + 1/2, k) - H_z^{n+1/2}(I, j + 1/2, k) \tag{3}$$

式中 $H_y^{n+1/2}(I, j, k + 1/2)$ 和 $H_z^{n+1/2}(I, j + 1/2, k)$ 表示精确的磁场值, 而 $\tilde{H}_y^{n+1/2}(I, j, k + 1/2)$ 和 $\tilde{H}_z^{n+1/2}(I, j + 1/2, k)$ 表示由插值获得的磁场值。在第 $I-0.5$ 层上经 FDTD 迭代计算获得的

电场分量为

$$\begin{aligned} \dot{E}_y^{n+1}(I-1/2, j+1/2, k) &= E_y^n(I-1/2, j+1/2, k) \\ &\quad - \frac{\Delta t}{\varepsilon \Delta x} [\tilde{H}_z^{n+1/2}(I, j+1/2, k) - H_z^{n+1/2}(I-1, j+1/2, k)] \\ &\quad + \frac{\Delta t}{\varepsilon \Delta z} [H_x^{n+1/2}(I-1/2, j+1/2, k+1/2) \\ &\quad - H_x^{n+1/2}(I-1/2, j+1/2, k-1/2)] \\ &= E_y^{n+1}(I-1/2, j+1/2, k) - \frac{\Delta t}{\varepsilon \Delta x} \text{er}_1^z \end{aligned} \quad (4)$$

$$\dot{E}_z^{n+1}(I-1/2, j, k+1/2) = E_z^{n+1}(I-1/2, j, k+1/2) + \frac{\Delta t}{\varepsilon \Delta x} \text{er}_1^y \quad (5)$$

式中 $E_y^{n+1}(I-1/2, j+1/2, k)$ 和 $E_z^{n+1}(I-1/2, j, k+1/2)$ 表示精确的电场分量。第 $I-0.5$ 层上的电场分量也可由同样的三线性插值方式而获得:

$$\tilde{E}_y^{n+1}(I-1/2, j+1/2, k) = E_y^{n+1}(I-1/2, j+1/2, k) + \text{er}_2^y \quad (6)$$

$$\tilde{E}_z^{n+1}(I-1/2, j, k+1/2) = E_z^{n+1}(I-1/2, j, k+1/2) + \text{er}_2^z \quad (7)$$

将电磁场各项分量表示为谐波分量形式, 并代入按中心差商展开的 FDTD 差分方程, 可得

$$E_y \sin\left(\frac{\omega \Delta t}{2}\right) = \frac{\Delta t}{\varepsilon \Delta x} H_z \sin\left(\frac{k_x \Delta x}{2}\right) - \frac{\Delta t}{\varepsilon \Delta z} H_x \sin\left(\frac{k_z \Delta x}{2}\right) \quad (8)$$

$$E_z \sin\left(\frac{\omega \Delta t}{2}\right) = -\frac{\Delta t}{\varepsilon \Delta x} H_y \sin\left(\frac{k_x \Delta x}{2}\right) + \frac{\Delta t}{\varepsilon \Delta y} H_x \sin\left(\frac{k_y \Delta y}{2}\right) \quad (9)$$

式中 ω 是角频率, Δt 是时间步长, Δx , Δy 和 Δz 分别是 x , y 和 z 方向上的空间步长。由于, 当 E_y 和 E_z 是精确的时候, H_x 也是精确的, 且电场分量和磁场分量使用相同的插值法, 因此近似有

$$\text{er}_2^y \sin\left(\frac{\omega \Delta t}{2}\right) = \frac{\Delta t}{\varepsilon \Delta x} \exp\left[J\left(\frac{\omega \Delta t}{2} + \frac{k_x \Delta x}{2}\right)\right] \text{er}_1^z \sin\left(\frac{k_x \Delta x}{2}\right) \quad (10)$$

$$\text{er}_2^z \sin\left(\frac{\omega \Delta t}{2}\right) = -\frac{\Delta t}{\varepsilon \Delta x} \exp\left[J\left(\frac{\omega \Delta t}{2} + \frac{k_x \Delta x}{2}\right)\right] \text{er}_1^y \sin\left(\frac{k_x \Delta x}{2}\right) \quad (11)$$

综合 (4) 式, (5) 式, (6) 式, (7) 式, (10) 式和 (11) 式可得

$$\begin{aligned} E_y^{n+1}\left(I-\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}, k\right) &= \left\{ \tilde{E}_y^{n+1}\left(I-\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}, k\right) + h \cdot \exp\left[J\left(\frac{\omega \Delta t}{2} + \frac{k_x \Delta x}{2}\right)\right] \right. \\ &\quad \left. \times \dot{E}_y^{n+1}\left(I-\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}, k\right) \right\} / \left\{ 1 + h \cdot \exp\left[J\left(\frac{\omega \Delta t}{2} + \frac{k_x \Delta x}{2}\right)\right] \right\} \end{aligned} \quad (12)$$

$$\begin{aligned} E_z^{n+1}\left(I-\frac{1}{2}, j, k+\frac{1}{2}\right) &= \left\{ \tilde{E}_z^{n+1}\left(I-\frac{1}{2}, j, k+\frac{1}{2}\right) + h \cdot \exp\left[J\left(\frac{\omega \Delta t}{2} + \frac{k_x \Delta x}{2}\right)\right] \right. \\ &\quad \left. \times \dot{E}_z^{n+1}\left(I-\frac{1}{2}, j, k+\frac{1}{2}\right) \right\} / \left\{ 1 + h \cdot \exp\left[J\left(\frac{\omega \Delta t}{2} + \frac{k_x \Delta x}{2}\right)\right] \right\} \end{aligned} \quad (13)$$

式中 $h = \sin(k_x \Delta x / 2) / \sin(\omega \Delta t / 2)$ 。 ω 是感兴趣的最高频率, 由文献 [12] $f_{\max} = \sqrt{3}c / (20\Delta s)$, 通常, 时间步长取为 $\Delta t = \Delta s / 2c$, c 是光速, Δs 是最小空间步长。实际计算中最高频率的选

取还要留出余量, 因此 $\omega\Delta t = 2\pi f_{\max}\Delta t \ll 1$. 在数据交换区, 为保证计算精度, 空间步长要取为 $\lambda/20$, 甚至更小, 因此 $k_x\Delta x \ll 1$. 同时, 数据交换区的空间来波通常在正负 45° 内, 因此可以将 (12) 式和 (13) 式进一步简化为

$$E_y^{n+1}(I - \frac{1}{2}, j + \frac{1}{2}, k) = \frac{\dot{E}_y^{n+1}(I - \frac{1}{2}, j + \frac{1}{2}, k) + \rho\tilde{E}_y^{n+1}(I - \frac{1}{2}, j + \frac{1}{2}, k)}{1 + \rho} \quad (14)$$

$$E_z^{n+1}(I - \frac{1}{2}, j, k + \frac{1}{2}) = \frac{\dot{E}_z^{n+1}(I - \frac{1}{2}, j, k + \frac{1}{2}) + \rho\tilde{E}_z^{n+1}(I - \frac{1}{2}, j, k + \frac{1}{2})}{1 + \rho} \quad (15)$$

式中 $\rho = v\Delta t/\Delta x$. 这样, 利用 (14) 和 (15) 式, 就可以将第 $I-0.5$ 层上的电场分量的误差大幅度降低, 从而维持稳定的迭代过程并保持 FDTD 方法的精确性.

3 数值结果

为了验证算法的正确性, 如图 4 所示, 我们用 DD-FDTD 法计算了带口径相位和幅度校正的 E 面喇叭天线. 该喇叭天线是通过在 E 面喇叭中插入导体片, 调节口面幅度; 通过设置 H 面台阶改变相速, 调节口面相位. 如图 4, 天线的尺寸为: 张角为 42° , $B=360\text{mm}$, $R=290\text{mm}$, $a_1=40.4\text{mm}$, $a_2=34.83\text{mm}$; 用金属隔片分为 8 个小喇叭, 每个小喇叭 E 面口径为 44.93mm , H 面台阶长度依次为 $l_1=0$, $l_2=41.7\text{mm}$, $l_3=101.6\text{mm}$, $l_4=177.2\text{mm}$; $s_1:s_2:s_3:s_4=1.0000:0.7776:0.4400:0.1427$. 该天线有非常多的折线和交点, 因此很难得到一个适合的网格划分, 需要使用区域分解法, 每个小喇叭是一个子域, 其本地坐标原点经平移和旋转与大喇叭坐标原点发生联系. 另外, 采用文献 [13] 中的办法, 计算三角形网格场量.

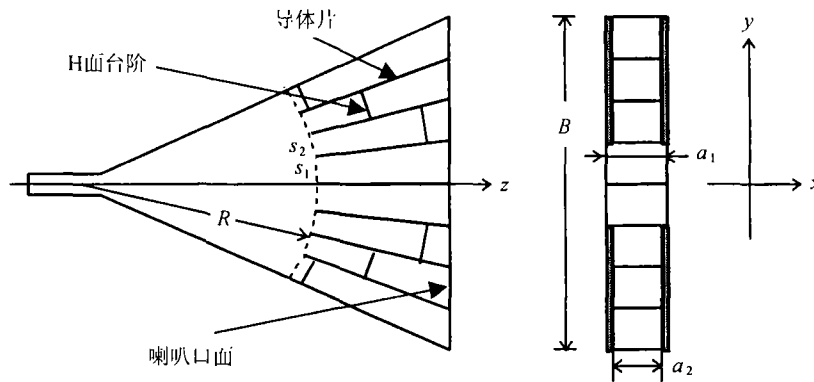
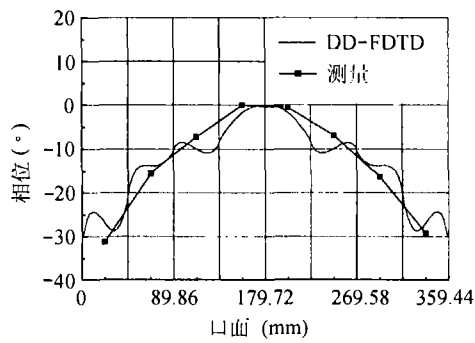
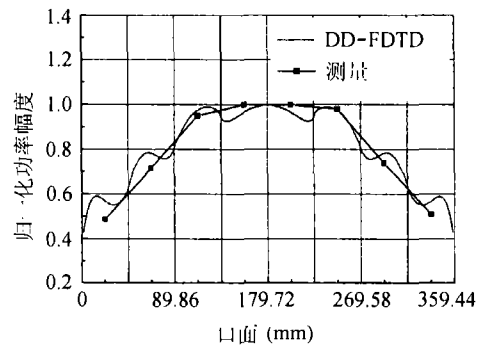


图 4 带口面相位和幅度校正的 E 面喇叭天线

在图 5 和图 6 中, 分别给出了 DD-FDTD 法计算的和实测的口面相位和幅度分布曲线. 实测时, 是用同样口径大小的小喇叭口对口进行测量的, 图 7 给出了计算和实测的 E 面方向图, 测量频率为 5.5GHz . 从这些图中可以看到, 计算和实测的数据是吻合的, 充分证明了算法的正确性与可靠性.



(a) 喇叭天线的口面相位分布



(b) 喇叭天线的口面幅度分布

图 5

4 结 论

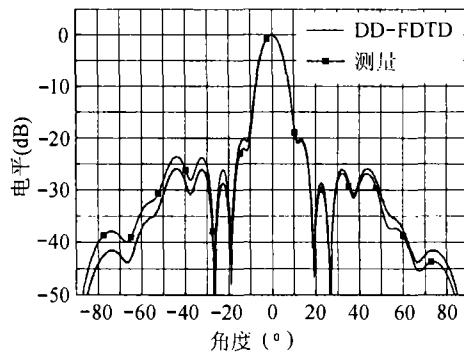


图 6 E 面方向图

本文通过区域分解的办法,使一个复杂的问题可以得到简化,从而变得适于求解。文中所用的插值方法,简单易行,灵活性强。通过引入广义的吸收边界的概念,得到误差修正的办法,为插值交换信息的方法,找到了理论支撑,大幅度地削减了插值误差,从而使区域分解的时域有限差分算法得以实现。将之应用于三维喇叭口径天线问题,获得了精确的计算结果,充分说明了该方法是有效和精确的。

参 考 文 献

- [1] K. S. Yee, Numerical solution of initial boundary value problems involving Maxwell's equations in isotropic media, *IEEE Trans. on Antennas Propagat.*, 1966, AP-14(5), 302-307.
- [2] R. Holland, Finite-difference solutions of Maxwell's equations in generalized nonorthogonal coordinates, *IEEE Trans. on Nucl. Sci.*, 1983, NS-30(6), 4589-4591.
- [3] J. F. Lee, R. Palandech, R. Mittra, Modeling three-dimensional discontinuities in waveguides using nonorthogonal FDTD algorithm, *IEEE Trans. on Microwave Theory Tech.*, 1992, MTT-40(2), 346-352.
- [4] T. G. Jurgens, A. Talflove, K. Umashanker, T. G. Moore, Finite-difference time-domain modeling of curved surfaces, *IEEE Trans. on Antennas Propagat.*, 1992, AP-40(4), 357-366.
- [5] J. Fang, J. Ren, A locally conformed finite-difference time-domain algorithm of modeling arbitrary shape planar metal strips, *IEEE Trans. on Microwave Theory Tech.*, 1993, MTT-41(5), 830-838.
- [6] S. S. Zivanovic, K. S. Yee, K. K. Mei, A subgridding method for the time-domain finite-difference method to solve Maxwell's equations, *IEEE Trans. on Microwave Theory and Tech.*, 1991, MTT-39(3), 471-479.
- [7] K. S. Yee, J. S. Chen, A. H. Chang, Conformal Finite-Difference Time-Domain (FDTD) with overlapping grid, *IEEE Trans. on Antennas Propagat.*, 1992, AP-40(9), 1068-1075.

- [8] R. B. Wu, T. Itoh, Hybrid finite-difference time-domain modeling of curved surfaces using tetrahedral edge elements, *IEEE Trans. on Antennas Propagat.*, 1997, AP-45(8), 1302-1309.
- [9] D. Koh, H. Lee, T. Itoh, A hybrid full-wave analysis of via-hole grounds using finite-difference and finite-element time-domain methods, *IEEE Trans. on Microwave Theory and Tech.*, 1997, MTT-45(12), 2217-2222.
- [10] 许锋, 洪伟, 董创明, 区域分解时域有限差分方法 (DD-FDTD) 及其在散射问题中的应用, *电子学报*, 2001, 29(12), 1642-1645.
- [11] K. K. Mei, J. Fang, Superabsorption - A method to improve absorbing boundary conditions, *IEEE Trans. on Antennas Propagat.*, 1992, AP-40(9), 1001-1010.
- [12] Xiaolei Zhang, K. K. Mei, Time-Domain finite difference approach to the calculation of the frequency-dependent characteristics of microstrip discontinuities, *IEEE Trans. on Microwave Theory and Tech.*, 1988, MTT-36(12), 1775-1787.
- [13] P. Mezzanotte, L. Roselli, R. Sorrentino, A simple way to model curved metal boundaries in FDTD algorithm avoiding staircase approximation, *IEEE Microwave and Guided Wave Letters*, 1995, 5(8), 267-269.

THE DOMAIN DECOMPOSITION FDTD ALGORITHM(DD-FDTD) FOR THREE-DIMENSIONAL COMPLEX PROBLEMS

Xu Feng Hong Wei Zhou Houxing

(Center for Computational Electromagnetics, Southeast Univ., Nanjing 210096, China)

Abstract The Domain Decomposition FDTD (DD-FDTD) method is presented for solving complex 3-D problems and improving the accuracy of solutions. According to the features of the problem, the original domain is decomposed into several sub-domains. In each sub-domain, the conformal meshes are created in local coordinates and the FDTD computation is carried out independently in local meshes. In the iteration procedure of FDTD, the data are exchanged between adjacent sub-domains with overlapped meshes. An interpolating and error-modifying scheme proposed here integrates the sub-domains and leads to a more exact solution. A complex 3-D aperture antenna problem is calculated by using this method and the accuracy of the solution validates the usefulness and exactness of this method.

Key words Domain decomposition, Time-domain finite-difference, Conformal meshes, Aperture antenna

许 锋: 男, 1963 年生, 博士, 研究方向是电磁场时域方法数值计算, 电磁散射和电路分析.

洪 伟: 男, 1962 年生, 教育部长江学者计划特聘教授, 东南大学无线电工程系教授、博士生导师. 研究方向是电磁场与微波技术.

周后型: 男, 1956 年生, 博士, 副教授, 研究方向是电磁场数值计算.